

CHUDENG SHUXUE YANJIU

HIT

数学·统计学系列

初等数学研究(II) 下

甘志国 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

初等数学研究（Ⅱ）下

甘志国 著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书包括整数性质、不定方程、现行高中数学教科书11章内容(集合与逻辑,函数与方程,数列,三角,平面向量,不等式,平面解析几何,立体(平面)几何,排列、组合与二项式定理,概率与统计,极限与导数)、数系、教材研究、数学竞赛、数学问题、数学应用、数学试题、数学史话、趣味数学、其他等22个部分的初等数学研究方面的论文387篇(其中189篇以前曾发表过,有些文章是由发表的多篇文章综合成的),每篇文章各自独立成文。本书注重了科学性、系统性和趣味性,可供中学、大学师生及初等数学爱好者阅读、钻研,也可作为高三学生在数学高考复习备考时参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究.2.下/甘志国著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.4

ISBN 978-7-5603-2820-1

Ⅰ.初… Ⅱ.甘… Ⅲ.初等数学-研究 Ⅳ.O12

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第032357号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐蕾 翟新烨
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张75 字数1428千字
版　　次 2009年5月第1版 2009年5月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2820-1
定　　价 118.00元(上,下)

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

目　录

平面解析几何

也谈曲线相似 …… 3
对一道高考题的研究 …… 5
2007 高考(重庆卷)压轴题的一般情形 …… 7
2006 年莫斯科大学入学试卷的一道压轴题的一般情形 …… 10
理解·巧记·应用 …… 12
2008 年高考试题北京卷(理科)解析几何大题的简解 …… 13
过有些点不能作双曲线的中点弦 …… 16
形同质异的解析几何题 …… 19
一道求离心率题的简解 …… 20
圆锥曲线的切点弦、中点弦、切线方程 …… 22
对称轴是 $y=\pm x+b$ 的轴对称问题的简单解法 …… 23
对一道课本习题的探究 …… 27
对一道小题的探究 …… 29
两道(国内外)考题的一般情形 …… 30
一个圆的问题的一般结论 …… 35
过定点与定双曲线有唯一公共点的直线有哪几条 …… 37
用平面几何知识帮助解答解析几何题 …… 38
也谈"由圆生成圆锥曲线" …… 43
圆或椭圆的切线的求法 …… 46
一道题的一般情形及其简洁解法 …… 48
三条直线围成的三角形面积公式 …… 49
对 2005 年高考湖北卷文科、理科压轴题的研究 …… 51
"圆锥曲线的又一性质"的补充 …… 55
直线分有向线段所成的比及其应用 …… 57
用"三角形的两边之差小于第三边"求最值 …… 60
椭圆上四点共圆的充要条件及其简证 …… 62

对一道题的研究 …… 64
中心二次曲线的一条性质——兼否定一条猜想 …… 67
一道题的五种解法 …… 70
例谈关于双曲线焦半径的习题的解法 …… 74
一道最值题的解法 …… 78
对《新题征展(102)》中三道题的注记 …… 80
关于直线方程的两点式的一个简洁结论及其运用 …… 86
对 2008 年高考江苏卷(理科)第 9 题的研究 …… 89

立体(平面)几何

四种 Fermat 点及其作法 …… 93
几种成比例线段题的证明方法 …… 98
何谓点到射线的距离? …… 100
几何三文 …… 102
立体几何中的两个“直线条数”问题及其解答 …… 104
从三角余弦定理到三垂线定理 …… 106
对课本公式 $\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$ 的加强及其应用 …… 107
求二面角大小的适用向量方法 …… 109

排列、组合与二项式定理

$(ax+by)^n$ 的展开式系数绝对值的单峰性 …… 113
错位数公式的化简 …… 116
一种有趣的排列 …… 118
一道简单的计数原理趣题 …… 119
用四面体解决异面直线的计数问题 …… 120
用“五环旗”解一道数学题 …… 121
组合数的性质 $iC_n^i=nC_{n-1}^{i-1}$ 在方差中的运用 …… 122
传球问题的一般解法 …… 124
一个组合恒等式的简证 …… 127
几个排列恒等式及两类递推数列 …… 128

概率与统计

已经试验过的事件不是随机事件 …… 133

骰子的妙想 …………………………………………………………………… 135
最佳查血方案问题 ……………………………………………………………… 137
你是否决定打开另一只信封 ……………………………………………………… 141
一道课本例题的广义形式 ………………………………………………………… 143
快求一类期望 …………………………………………………………………… 145

极限与导数

蠕虫爬橡皮绳问题 ……………………………………………………………… 149
请不要轻信你的猜想 …………………………………………………………… 151
介绍洛必达法则 ………………………………………………………………… 153
用导数研究一个猜想 …………………………………………………………… 154
平均每个人查血次数的最小值 …………………………………………………… 157
对两个结论的注记 ……………………………………………………………… 159
$(1+x)^a$ 的展开式的应用 ……………………………………………………… 163
极限与导数三文 ………………………………………………………………… 167
一道课本趣题的伴随问题 ………………………………………………………… 169
2008 年高考试题(辽宁理科卷)压轴题的简解 …………………………………… 171
一道例题的简解 ………………………………………………………………… 173
由数学问题 1749 得到两类有极限的数列 ………………………………………… 174
对渐近线的定义及求法的质疑 …………………………………………………… 177
谈谈切线的定义 ………………………………………………………………… 180
几个含无限步运算的函数的定义域和值域 ………………………………………… 182
对 2008 年高考江苏卷压轴题的深入研究 ………………………………………… 191
对一道高考题和一道研究生试题的再研究 ………………………………………… 195

数　系

循环小数的一个猜想的证明 ……………………………………………………… 201
纯循环小数的一个猜想的推广 …………………………………………………… 203
关于循环小数的几个猜想的证明 ………………………………………………… 207
一个奇妙的分数 ………………………………………………………………… 209
复数不能比大小 ………………………………………………………………… 210
国家公务员考试中的数字计算趣题 ……………………………………………… 211
分数与小数的互化及纯循环小数的性质 ………………………………………… 216

教材研究

对人教版教科书(必修)《数学·第一册(上)》的若干思考 ………………… 223
对人教版教科书(必修)《数学·第一册(下)》的若干思考 ………………… 233
对人教版教科书(必修)《数学·第二册(上)》的若干思考 ………………… 243
对人教版教科书(必修)《数学·第二册(下 A)、(下 B)》的若干思考 … 258
对人教版教科书《数学·第三册(选修 II)》的若干思考 ……………………… 263

数学竞赛

一道加拿大数学竞赛题的推广 ………………………………………………… 271
一道全国联赛试题一般情形的简洁解法 ……………………………………… 273
新加坡中一、二数学竞赛题选 ………………………………………………… 275
介绍两道竞赛题 ………………………………………………………………… 279
谈谈第四届“希望杯”(高一初赛)压轴题 …………………………………… 281
一个三角形的面积 ……………………………………………………………… 283
2004 年全国高中联赛压轴题的别证及推广 ………………………………… 285
一道赛题的又一解法 …………………………………………………………… 287
IMO41 - 2 及与之等价的几道奥赛题 ……………………………………… 289
一道“希望杯”赛题的另证 …………………………………………………… 291
IMO32 中一道试题的推广 …………………………………………………… 292
一道西部数学奥赛题与一道高考压轴题的联系及区别 …………………… 294

数学问题

争鸣 ……………………………………………………………………………… 299
对一个问题的研究 ……………………………………………………………… 307
《数学通讯》问题征解第 145 题的解答 ……………………………………… 309
《湖南数学通讯》中学数学问题 2 的解答 …………………………………… 312
对一个问题的部分解答 ………………………………………………………… 316

数学应用

一道合理选址问题的推广 ……………………………………………………… 323
人生“算术” …………………………………………………………………… 325
用计算风格学证明“作者是谁” ……………………………………………… 328
概率帮了盟军 …………………………………………………………………… 331

时间就是金钱——算一算你的一分钟值多少钱 …… 332
烧焦的遗嘱 …… 333
推铅球的最佳抛射角应小于45° …… 335
数学应用三文 …… 337
参赛应用题选登 …… 339
新编应用题选登 …… 342
应用题新编选登 …… 346
伏尔泰拉与生物数学 …… 348
即将来临的数字时代 …… 349
早期的航空事业与数学 …… 350
笔尖下的行星 …… 352
高三数学《数学应用》水平测试 …… 353
介绍书号、刊号的校验码 …… 359

数学试题

排列、组合和二项式定理趣题 …… 363
排列组合、二项式定理同步测试题 …… 365
综合题新编选登 …… 371
新题征展 …… 382
课外练习 …… 409

数学史话

祖冲之的精细严密 …… 415
康熙大帝与数学大师 …… 416
东方第一个几何学家 …… 417
缅怀国际数学大师陈省身 …… 419
几何学之父——欧几里得 …… 421
想撬动地球的阿基米得 …… 423
莱布尼兹对康熙的仰慕之情 …… 425
海内存知己　天涯若比邻 …… 426
拉格朗日的成才之路 …… 427
闵可夫斯基与四色猜想 …… 429
巧借他山之石　妙攻本地之玉 …… 430
数学家的文学修养 …… 431

天才的品格 …… 432
他未到13岁就赢得IMO金牌 …… 433
数学史六文 …… 434
最有影响的七部数学名著 …… 438
业余数学家韦达 …… 439
失明的数学家欧拉 …… 440
成绩不佳的数学大师 …… 442
数学王子高斯 …… 443
科学家的另一面 …… 445

趣味数学

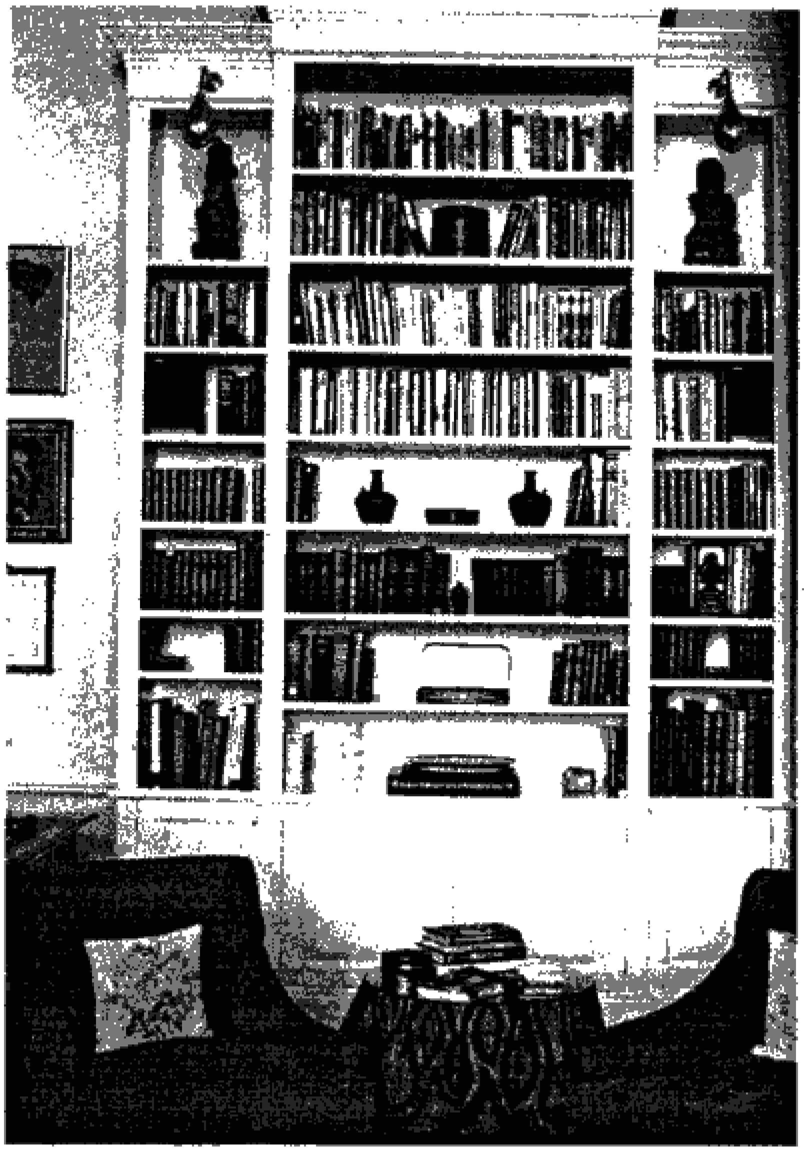
钟表上时针、分针、秒针所夹的角度 …… 449
谈多边形的剪拼 …… 452
神奇的指数效应 …… 454
趣谈无理数e …… 457
服饰商的难题 …… 459
“摸球赢钱”的把戏 …… 461
π的一些奇异特征 …… 463
有趣的十位数 …… 465
什么能使生活变得圆满？ …… 466
动物世界中的“数学家” …… 467
加德纳的数学趣题 …… 468
10与9的差别不仅仅是1 …… 470
幽默风趣的“十字令” …… 471
对联中的数学演算 …… 472
妙联趣语 …… 473
用数学眼光看世界(1) …… 475
用数学眼光看世界(2) …… 477
用数学眼光看世界(3) …… 481
用数学眼光看世界(4) …… 482
用数学眼光看世界(5) …… 484
数学计算的智巧 …… 486
数学趣题(1) …… 488
数学趣题(2) …… 491

数理结合题欣赏 …… 497
趣苑拾贝(1) …… 491
趣苑拾贝(2) …… 502
趣苑拾贝(3) …… 506
趣苑拾贝(4) …… 510
数学谜语(初中) …… 513
数学谜语(高中) …… 517
不可或缺的常数 …… 518
巧填数学词语 …… 519
$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ 的推广 …… 520
国语中的数字 …… 521
加法“链条” …… 522
买土地的故事 …… 523
漂洗衣服 …… 524
求 $1+2+\cdots+n$ 的异类问题 …… 525
数学格言四则 …… 527
数学趣题 …… 528
数学天才——诺伯特·维纳 …… 531
自叙数与反自叙数 …… 532
最高的、最矮的 …… 533
最美的数学定理 …… 534
趣题“四位王子” …… 538
“智猪博弈”、竞争及学校管理 …… 540
又一组“似非而是”的等式 …… 542
又两组“金蝉脱壳”数组 …… 544

其　他

理化四文 …… 549
怎样撰写初等数学论文 …… 552

平面解析几何



也谈曲线相似

我们学过相似多边形,你可曾注意过相似曲线?在千姿百态的曲线世界中,分清哪些曲线具有相似性质,对于我们认识各类曲线的"面目"是十分有益的.文献[1]就证明了所有的抛物线相似,本文再给出一种判定曲线相似的方法.

定义[2] 若曲线 C 上的任意两点 A,B 的连线 AB 与曲线 C' 上对应的两点 A',B' 的连线 $A'B'$ 的比值为定值 k,则称这两条曲线 C 与 C' 相似,记作 $C\backsim C'$,并且说 C 与 C' 的相似比是 k.

不难看出,这个定义是三角形与多边形相似定义的推广.

平面曲线相似的判定定理 曲线 $C:F(x,y)=0$ 与曲线 $C':F(kx,ky)=0$(k 是非零常数)相似,且相似比为 $|k|$.

证明 设 $M(x,y)$ 是曲线 C 上的任意一点,则 $F(x,y)=0$,也得 $F(k\cdot\frac{1}{k}x,k\cdot\frac{1}{k}y)=0$,这说明 $M'(\frac{1}{k}x,\frac{1}{k}y)$ 是 C' 上的点.我们就规定:

曲线 C 上点 $M(x,y)$ 的对应点是曲线 C' 上的点 $M'(\frac{1}{k}x,\frac{1}{k}y)$.

(这种规定满足:直线 MM' 经过坐标原点 O.)

可设曲线 C 上任意不同的两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 的对应点分别是曲线 C' 上的点 $A'(\frac{1}{k}x_1,\frac{1}{k}y_1),B'(\frac{1}{k}x_2,\frac{1}{k}y_2)$.由两点间的距离公式可证得

$$\frac{AB}{A'B'}=|k|=\text{定值}$$

即定理成立.

推论 (1)所有的直线相似,且相似比为1;

(2)任意两个圆都相似,且相似比为它们的半径之比;

(3)任意两条抛物线都相似,抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 与 $C':y^2=2p'x(p>0)$ 的相似比为 $\frac{p}{p'}$;

(4)离心率相等的两个椭圆(双曲线)相似,且相似比为它们的焦距之比;

(5)曲线 C(叫超圆[3]):$|x|^n+|y|^n=r^n(r,n\in\mathbf{R}^+)$ 与曲线 $C':|x|^n+|y|^n=r'^n(r'\in\mathbf{R}^+)$ 相似,且相似比为 $\frac{r}{r'}$.

证明 这里只证(3).

经过平移及旋转变换总可把两条抛物线都变成标准形式

$$C:y^2=2px(p>0)$$

$$C':y^2=2p'x(p'>0)$$

也即

$$C:y^2=2px(p>0)$$

$$C':(\frac{p}{p'}y)^2=2p\cdot(\frac{p}{p'}x)(p'>0)$$

由定理立知 $C\backsim C'$,且 C 与 C' 的相似比为$\frac{p}{p'}$.

参考文献

[1] 余学虎.任意两条抛物线相似[J].数学通讯,2005(9):17.
[2] 路见可.谈相似形 —— 中学数学笔谈之三[J].数学通讯,1998(9):1-3.
[3] 张文忠.中学数学中的趣题[M].西安:陕西科学技术出版社,1989.

对一道高考题的研究

2005年数学高考湖北卷的文科压轴题(也是理科第21题)是:

设 A,B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点,点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点,线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C,D 两点.

(Ⅰ)确定 λ 的取值范围,并求直线 AB 的方程;

(Ⅱ)试判断是否存在这样的 λ,使得 A,B,C,D 四点在同一圆上?并说明理由.

分析和解 (Ⅰ)求直线 AB 的方程,通常是用待定系数法(可先设 $AB:y-3=k(x-1)$)及点差法,但下面的对称法更简洁.

因为点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点,所以可设 $A(x,y)$,$C(2-x,6-y)$,由 A,B 均在椭圆上,得

$$3x^2+y^2=\lambda,3(2-x)^2+(6-y)^2=\lambda$$

所以 $3x^2+y^2=3(2-x)^2+(6-y)^2$,即

$$x+y-4=0 \quad ①$$

① 即直线 AB 的方程.理由:由以上求法知,点 $A(x,y)$ 在直线 ① 上,又易验证点 $N(1,3)$ 或 $B(2-x,6-y)$ 也在直线 ① 上.

由点 $N(1,3)$ 在椭圆内,得 $3\times1^2+3^2<\lambda$,即 $\lambda>12$,且椭圆内的点都可作为椭圆的弦的中点,所以 λ 的取值范围是 $(12,+\infty)$.

(Ⅱ)(Ⅰ)的解答中已求出直线 AB 的方程:$x+y-4=0$,而 CD 是过点 $N(1,3)$ 的 AB 的垂线,所以直线 CD 的方程为 $x-y+2=0$.

由直线 AB,CD 组成的曲线方程为

$$(x+y-4)(x-y+2)=0$$

即

$$x^2-y^2-2x+6y-8=0$$

它与椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 的交点 A,B,C,D 的坐标即方程组

$$\begin{cases}x^2-y^2-2x+6y-8=0 & ②\\3x^2+y^2=\lambda & ③\end{cases}$$

的解,③ - ②,并整理得

$$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{\lambda-3}{2} \quad ④$$

即 A,B,C,D 四点必在圆 $(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{\lambda-3}{2}$ 上.

再结合(Ⅰ)的答案知,当 $\lambda>12$ 时,点 A,B,C,D 共圆(且在圆④上).

可以猜测这道高考题是由2002年高考数学江苏卷第20题改编的,原题是:

设 A,B 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 上的两点,点 $N(1,2)$ 是线段 AB 的中点.

(Ⅰ)求直线 AB 的方程;

(Ⅱ)如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C,D 两点,那么 A,B,C,D 四点是否共圆?为什么?

由这道高考题,笔者得到

定理　设两条直线 $l_i:y-y_0=k_i(x-x_0)(i=1,2)$ 与二次曲线 Γ: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0(A\neq B)$ 有四个交点,则这四个交点共圆的充要条件是 $k_1+k_2=0$.

证明　由 l_1,l_2 组成的曲线即

$$[y-y_0-k_1(x-x_0)][y-y_0-k_2(x-x_0)]=0$$

所以,经过它与 Γ 的四个交点的二次曲线一定能表成(λ,μ 不同时为0)以下形式

$$\lambda(Ax^2+By^2+Cx+Dy+E)+\mu[y-y_0-k_1(x-x_0)][y-y_0-k_2(x-x_0)]=0 \quad ⑤$$

必要性　若四个交点共圆,则存在 λ,μ 使方程⑤表示圆,故式⑤左边展开式中含 xy 项的系数 $-\mu(k_1+k_2)=0$.而 $\mu\neq0$,否则⑤表示曲线 Γ,不表示圆,所以 $k_1+k_2=0$.

充分性　当 $k_1+k_2=0$ 时,式⑤左边的展开式中不含 xy 的项,选 $\mu=1$ 时,再令式⑤左边的展开式中含 x^2,y^2 项的系数相等,即 $\lambda A-k_1^2=\lambda B+1$,得 $\lambda=\frac{k_1^2+1}{A-B}$.

此时曲线⑤即

$$x^2+y^2+C'x+D'y+E'=0 \quad ⑥$$

的形式,这种形式表示的曲线有且仅有三种情形:一个圆,一个点,无轨迹,而题中的四个交点在曲线⑥上,所以方程⑥表示圆.这就证得了四个交点共圆.

2007 高考(重庆卷)压轴题的一般情形

2007 年高考(重庆卷)的压轴题 22 是:

如图 1,中心在原点 O 的椭圆的右焦点 $F(3,0)$,右准线 l 的方程为 $x = 12$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 在椭圆上任取三个不同点 P_1,P_2,P_3,使 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \angle P_3FP_1$,证明:$\frac{1}{|FP_1|} + \frac{1}{|FP_2|} + \frac{1}{|FP_3|}$ 为定值,并求此定值.

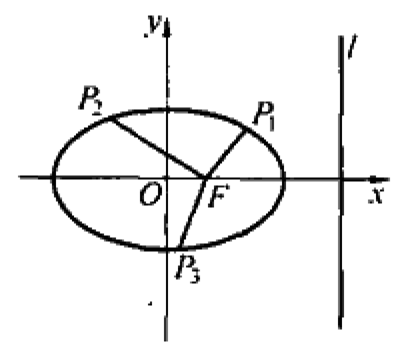


图 1

(答案:(1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$;(2) 定值为$\frac{2}{3}$.)

由此题,笔者得到了以下一般性的结论:

定理 1 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n(n \geqslant 3)$ 是椭圆 Γ 上的不同点,F 是 Γ 的一个焦点,且 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \cdots = \angle P_{n-1}FP_n = \angle P_nFP_1$,则 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|FP_i|} = \frac{na}{b^2}$(其中 a,b 分别是 Γ 的长半轴,短半轴长).

定理 2 若双曲线 Γ 的一个焦点是 F,且 Γ 的同一支上存在 $n(n \geqslant 3)$ 个不同的点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 满足 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \cdots = \angle P_{n-1}FP_n = \angle P_nFP_1$,则 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|FP_i|} = \frac{na}{b^2}$(其中 a,b 分别是 Γ 的实半轴,虚半轴长).

定理 3 若抛物线 Γ 的焦点是 F,且 Γ 上存在 $n(n \geqslant 3)$ 个不同的点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 满足 $\angle P_1FP_2 = \angle P_2FP_3 = \cdots = \angle P_{n-1}FP_n = \angle P_nFP_1$,则 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|FP_i|} = \frac{n}{p}$(其中 p 是 Γ 的焦点到准线的距离).

引理 1[1] $\sum_{i=1}^{n} \cos i\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \cos \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$,$\sum_{i=1}^{n} \sin i\theta =$

$\dfrac{\sin\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$.(可用数学归纳法证明,也可用复数证明)

引理 2 $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\dfrac{2i\pi}{n}=0(n\geqslant 2),\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{2i\pi}{n}=0(n\in\mathbf{N}^*)$.

引理 3 $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos(\alpha+\dfrac{2i\pi}{n})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sin(\alpha+\dfrac{2i\pi}{n})=0(n\geqslant 2)$.

证明

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha+\frac{2i\pi}{n})&=\sum_{i=1}^{n}(\cos\alpha\cos\frac{2i\pi}{n}-\sin\alpha\sin\frac{2i\pi}{n})=\\&\cos\alpha\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{2i\pi}{n}-\sin\alpha\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{2i\pi}{n}=\\&0-0=0(n\geqslant 2)\end{aligned}$$

同理,可证

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(\alpha+\frac{2i\pi}{n})=0(n\geqslant 2).$$

还可给出引理3的一个简洁解释:可设单位圆 O 的内接正n边形$A_1A_2\cdots A_n$各顶点的坐标分别是 $A_i(\cos(\alpha+\dfrac{2i\pi}{n}),\sin(\alpha+\dfrac{2i\pi}{n}))(i=1,2,\cdots,n)$,易知从点 O 出发的力$\overrightarrow{OA_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 的合力$\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{0}$,即

$$(\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha+\frac{2i\pi}{n}),\sum_{i=1}^{n}\sin(\alpha+\frac{2i\pi}{n}))=(0,0)$$

得 $n\geqslant 3$ 时引理 3 成立.

定理1的证明 可不妨设椭圆 Γ 的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$F(c,0)$是右焦点(其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$).再设$\angle xFP_i=\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$,不失一般性,可设$0\leqslant\alpha_1<\dfrac{2\pi}{n}$,且$\alpha_i=\alpha_1+\dfrac{2(i-1)\pi}{n}$.又设点 P_i 的横坐标为x_i,由焦半径公式,得

$$|FP_i|=a-\frac{c}{a}x_i=a-\frac{c}{a}(|FP_i|\cos\alpha_i+c)$$

$$\frac{1}{|FP_i|}=\frac{a+c\cos\alpha_i}{b^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{na}{b^2}+\frac{c}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha_1-\frac{2\pi}{n}+\frac{2i\pi}{n})=\frac{na}{b^2}$$

(用引理 3).

定理 2 的证明 可不妨设双曲线 Γ 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$，$F(c,0)$ 是右焦点(其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$).再设 $\angle xFP_i=\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$,不失一般性,可设 $0\leqslant\alpha_1<\frac{2\pi}{n}$,且 $\alpha_i=\alpha_1+\frac{2(i-1)\pi}{n}$.

(1) 当点 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均在右支上时,设点 P_i 的横坐标是 x_i,由焦半径公式,得

$$|FP_i|=\frac{c}{a}x_i-a=\frac{c}{a}(|FP_i|\cos\alpha_i+c)-a$$

$$\frac{1}{|FP_i|}=\frac{a-c\cos\alpha_i}{b^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{na}{b^2}$$

(2) 当点 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均在左支上时,设点 P_i 的横坐标为 x_i,由焦半径公式,得

$$|FP_i|=a-\frac{c}{a}x_i=a-\frac{c}{a}(|FP_i|\cos\alpha_i+c)$$

$$\frac{1}{|FP_i|}=\frac{a+c\cos\alpha_i}{b^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{na}{b^2}$$

定理 3 的证明 可不妨设抛物线 Γ 的方程为 $y^2=2px(p>0)$,又设点 P_i 的横坐标为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$.再设 $\angle xFP_i=\alpha_i$,不失一般性,可设 $0\leqslant\alpha_1<\frac{2\pi}{n}$,且 $\alpha_i=\alpha_1+\frac{2(i-1)\pi}{n}$,得

$$|FP_i|=\frac{p}{2}+x_i=\frac{p}{2}+|FP_i|\cos\alpha_i+\frac{p}{2}$$

$$\frac{1}{|FP_i|}=\frac{1-\cos\alpha_i}{p}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|FP_i|}=\frac{n}{p}$$

参考文献

[1] 张远达.浅谈高次方程[M].武汉:湖北教育出版社,1983:6.

2006年莫斯科大学入学试卷的一道压轴题的一般情形

2006年莫斯科大学数学力学系入学考试数学试卷的一道压轴题是(表述略有改动):

求二元函数 $z=|2x-y-1|+|x+y|+|y|$ 的最小值.

俄罗斯《中学数学》杂志2007年第1期上给出了该题的一种解法,此解法巧妙地利用了数形结合的思想,简洁地求得了最小值,解题过程中应用了这样一个事实:在数轴上有三个点,它们的坐标分别为 $y_1,y_2,y_3(y_1<y_2<y_3)$,如果要在数轴上再找一点(设其坐标为 y),使它与前三个点的距离之和最小,那么此点的坐标应为 y_2.

文献[1]运用以上事实又给出了一种解法,本文将运用点到直线的距离公式简洁地解答本题:

得 $z=\sqrt{5}\cdot\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}+\sqrt{2}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}+|y|$,所以 z 表示平面直角坐标系 xOy 中的动点 $P(x,y)$ 到直线 $l_1:2x-y-1=0$ 的距离 d_1 的 $\sqrt{5}$ 倍、直线 $l_2:x+y=0$ 的距离 d_2 的 $\sqrt{2}$ 倍、直线 $l_3:y=0$(即 x 轴)的距离之和.(请读者自己画图)得 $l_1,l_2;l_2,l_3;l_3,l_1$ 的交点分别是 $P_3(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$,$P_1(0,0)$,$P_2(\frac{1}{2},0)$.

结合图形易知,只有当点 P 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内部(包括边界上)时,z 才可能取到最小值;进而可得,只有当点 P 为 $\triangle P_1P_2P_3$ 顶点时,z 才可能取到最小值.而当点 P 分别是 P_1,P_2,P_3 时,z 的值分别为 $\frac{1}{3},1,\frac{1}{2}$,从而可得 z 的最小值为 $\frac{1}{3}$(当且仅当 $x=\frac{1}{3},y=-\frac{1}{3}$ 时取到最小值).

早在2000年,笔者就发表了文章《四种 Fermat 点及其作法》[2],该文第4节"3型 Fermat 点及其作法"给出了上面题目的一般情形及其解法(读者可阅读原文):

定义 在空间里,若点 P_3 到已知的三条共面直线 a,b,c 的距离之和最小(此时必有 P_3,a,b,c 共面),则点 P_3 叫做 a,b,c 的3型 Fermat 点.

定理 当三条直线 a,b,c 可围成 $\triangle ABC$ 时,若 P_3 是 a,b,c 的3型 Fermat 点,则

(1) 当 $\triangle ABC$ 是正三角形时,P_3 为 $\triangle ABC$ 内(包括边界上)的任意点.

(2) 当 $\triangle ABC$ 是腰大于底的等腰三角形时,P_3 为底上的任意点.

(3) 其他情形时,P_3 为 $\triangle ABC$ 的最大内角顶点.

参考文献

[1] 戎松魁,李学军.一个俄罗斯高考题的特殊解法[J].中学数学,2008(6):43.

[2] 甘志国.四种 Fermat 点及其作法[J].数学通讯,2000(23):31-33.

理解 · 巧记 · 应用

1 直线的方程的一些常用结论或公式

(1) 直线的倾斜角、l_1 到 l_2 的角、l_1 与 l_2 的夹角的取值范围依次是$[0,\pi)$，$[0,\pi)$，$(0,\frac{\pi}{2}]$.

(2) 直线的倾斜角与斜率的变化关系：当倾斜角为锐角时，斜率 k 随着倾斜角 α 的增大而增大. 当 α 为钝角时，k 随 α 的增大而增大.

(3) 截距不是距离，直线的截距可正，可负，也可为 0，截距相等时不要忘了过原点的特殊情形.

(4) 当 $1+k_1k_2\neq 0$ 时，设 l_1 到 l_2 的角为 θ，则 $\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

当 $1+k_1k_2\neq 0$ 时，设 l_1 到 l_2 的夹角为 α，则 $\tan\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$，注意夹角和到角的区别.

当直线 $l_1\perp l_2$ 时，直线 l_1 和 l_2 的到角与夹角均为$\frac{\pi}{2}$.

(5) 点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离公式为 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，两平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 和 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 间距离的公式 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2 简单的线性规划

确定二元一次不等式表示的平面区域时，使用下面的右手法则判断很方便：

画出直线 $Ax+By+C=0(A>0)$，沿直线向上的方向伸开右手，使五指与直线成一线(手侧放，小指在下)，掌心的一侧为 $Ax+By+C<0$ 表示的区域，手背的一侧为 $Ax+By+C>0$ 表示的区域.

2008年高考试题北京卷(理科)解析几何大题的简解

2008年高考试题北京卷(理科)的解析几何大题(即倒数第二题)及提供的解答是:

已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A,C 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上,对角线 BD 所在直线的斜率为1.

(1) 当直线 BD 过点 $(0,1)$ 时,求直线 AC 的方程;

(2) 当 $\angle ABC=60°$ 时,求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

解 (1) 由题意得直线 BD 的方程为 $y=x+1$.因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AC\perp BD$,于是可设直线 AC 的方程为 $y=-x+n$.由

$$\begin{cases}x^2+3y^2=4\\y=-x+n\end{cases}$$

得

$$4x^2-6nx+3n^2-4=0$$

因为 A,C 在椭圆上,所以

$$\Delta=-12n^2+64>0$$

$$-\frac{4}{3}\sqrt{3}<n<\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

设 A,C 两点的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,得

$$x_1+x_2=\frac{3}{2}n,x_1x_2=\frac{3}{4}n^2-1$$

$$y_1=-x_1+n,y_2=-x_2+n,y_1+y_2=\frac{n}{2}$$

所以线段 AC 的中点坐标为 $\left(\frac{3}{4}n,\frac{n}{4}\right)$.

由四边形 $ABCD$ 为菱形知,点 $\left(\frac{3}{4}n,\frac{n}{4}\right)$ 在直线 $y=x+1$ 上,可得 $n=-2$.

所以直线 AC 的方程为 $y=-x-2$,即 $x+y+2=0$.

(2) 因为四边形 $ABCD$ 为菱形,且 $\angle ABC=60°$,所以 $|AB|=|BC|=|CA|$,菱形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}|AC|^2$.由(1),得

$$|AC|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=8-\frac{3}{2}n^2$$

所以
$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(16-3n^2)\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}<n<\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$$
所以当且仅当 $n=0$ 时,菱形 $ABCD$ 的面积取到最大值,且最大值是 $4\sqrt{3}$.

本文将给出第(1)问的简解,再给出第(2)问的一般情形.

(1)(点差法)易得直线 BD 的方程为 $y=x+1,k_{AC}=-1$.

设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$,得
$$x_1^2+3y_1^2=4,x_2^2+3y_2^2=4$$
两式相减后变形可得
$$k_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{3(y_2+y_1)}=-1$$
又线段 AC 的中点坐标为 (x_0,y_0),得
$$x_1+x_2=2x_0,y_1+y_2=2y_0$$
所以
$$k_{AC}=-\frac{2x_0}{3\cdot 2y_0}=-1,x_0=3y_0$$
又 AC 的中点 (x_0,y_0) 在直线 $BD:y=x+1$ 上,可得点 (x_0,y_0) 即 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$,再由点斜式方程可求得直线 AC 的方程为 $x+y+2=0$.

(2)有一般性的结论:若菱形 $ABCD$ 的顶点 A,C 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上,直线 AC 的斜率 k 及 $\angle ABC$ 的大小 2α(α 为锐角)均为定值,则

①当且仅当直线 AC 过原点时,$|AC|$ 取到最大值,取且最大值为 $\frac{4(k^2+1)a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$;

②当且仅当直线 AC 过原点时,菱形 $ABCD$ 面积最大,且最大值为 $\frac{2(k^2+1)a^2b^2}{(a^2k^2+b^2)\tan\alpha}$.(当 k 不存在时,也是当且仅当直线 AC 过原点时,菱形 $ABCD$ 面积最大,且最大值为 $\frac{2a^2b^2}{a^2\tan\alpha}$,即 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2(k^2+1)a^2b^2}{(a^2k^2+b^2)\tan\alpha}$.)

证明 设直线 AC 的方程为 $y=kx+n$,将其代入椭圆方程,得
$$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2knx+a^2(n^2-b^2)=0$$
由 $\Delta>0$,得
$$-\sqrt{a^2k^2+b^2}<n<\sqrt{a^2k^2+b^2}$$
由弦长公式,可得
$$|AC|^2=(k^2+1)(x_1-x_2)^2=\frac{4(k^2+1)a^2b^2(a^2k^2+b^2-n^2)}{(a^2k^2+b^2)^2}$$

① 当且仅当 $n=0$(满足 $\Delta>0$) 也即直线 AC 过原点时，$|AC|$ 取到最大值，且最大值为$\frac{4(k^2+1)a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$；

② 又 $S_{菱形}=\frac{1}{2}|AC||BD|=\frac{|AC|^2}{2\tan\alpha}$，所以当且仅当 $|AC|^2$ 取最大值，即 $n=0$(满足 $\Delta>0$) 也即直线 AC 过原点时，菱形 $ABCD$ 面积最大，且最大值为 $\frac{2(k^2+1)a^2b^2}{(a^2k^2+b^2)\tan\alpha}$.（当 k 不存在时，也有 $S_{菱形}=\frac{1}{2}|AC||BD|=\frac{|AC|^2}{2\tan\alpha}$，所以当且仅当 $|AC|$ 取最大值 $2b$ 时，菱形 $ABCD$ 面积最大，即当且仅当直线 AC 过原点时菱形 $ABCD$ 面积的最大，且最大值为$\frac{2a^2b^2}{a^2\tan\alpha}$，即$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2(k^2+1)a^2b^2}{(a^2k^2+b^2)\tan\alpha}$.）

过有些点不能作双曲线的中点弦

引例 求以点 $P(1,1)$ 为中点的双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的弦所在直线的方程.

解 (点差法)设所求的直线 l 与双曲线 C 的交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,得

$$x_1+x_2=y_1+y_2=2$$

$$x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1,x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1$$

相减整理,得

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{y_1+y_2}=2$$

得所求直线 l 的斜率 $k=2$,从而可得所求直线 l 的方程为

$$2x-y-1=0$$

此解答并不正确!因为容易验证所求的直线 l 与已知的双曲线 C 并无交点,说明所求的直线 l 绝不是要求的中点弦所在的直线的方程!即所求的直线不存在.

问题 对于怎样的点 P,以点 P 为中点的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 的弦不存在(存在)?

定理 1 (1) 当 $0<|x_0|\leqslant a$ 时,以点 $P(x_0,0)$ 为中点的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 的弦不存在.

(2) 当 $|x_0|>a$ 或 $x_0=0$ 时,以点 $P(x_0,0)$ 为中点的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 的弦存在,且当 $x_0=0$ 时,以点 $P(0,0)$ 为中点的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 的弦所在的直线的方程有无数条:$y=kx\left(-\frac{b}{a}<k<\frac{b}{a}\right)$;当 $|x_0|>a$ 时,以点 $P(x_0,0)$ 为中点的双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-$

$\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 的弦所在的直线的方程是 $x=x_0$.

定理 2 （以下 $y_0\neq 0$）

(1) 当点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 内(即含焦点的区域)或两条渐进线之间(含 y 轴的部分)(即满足 $\frac{a}{b}|y_0|\leqslant|x_0|\leqslant\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y_0^2}$ 的点 (x_0,y_0) 确定的区域)时,以点 P 为中点的双曲线 C 的弦不存在.

(2) 当点 $P(x_0,y_0)$ 不落在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 与其渐近线之间的部分(即满足 $|x_0|<\frac{a}{b}|y_0|$ 或 $|x_0|>\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y_0^2}$ 的点 (x_0,y_0) 确定的区域)时,以点 P 为中点的双曲线 C 的弦存在,且此弦所在的直线方程是 $y-y_0=\frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0)$.

(3) 当点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 上时,双曲线 C 的过点 P 的切线方程为 $y-y_0=\frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0)$.

证明 设所求的直线 l 与双曲线 C 的交点为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,得

$$x_1+x_2=2x_0,\ y_1+y_2=2y_0$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$$

相减整理,得所求直线的斜率 $k=\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$,从而可得所求直线 l 的方程为

$$y-y_0=\frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0) \qquad ①$$

将 ① 代于 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,整理得

$$(a^2y_0^2-b^2x_0^2)(x-x_0)^2=\frac{a^2y_0^2}{b^2}(a^2b^2+a^2y_0^2-b^2x_0^2) \qquad ②$$

(1) 当 $(a^2y_0^2-b^2x_0^2)(a^2b^2+a^2y_0^2-b^2x_0^2)\leqslant 0$,即

$$\frac{a}{b}|y_0|\leqslant|x_0|\leqslant\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y_0^2}$$

时,方程 ② 不是有两个不相等的实数根,此时方程 ① 不合题意,所以此时以点 P 为中点的双曲线 C 的弦不存在.

(2) 当 $(a^2y_0^2-b^2x_0^2)(a^2b^2+a^2y_0^2-b^2x_0^2)>0$,即

$$|x_0| < \frac{a}{b}|y_0| \text{ 或 } |x_0| > \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y_0^2}$$

时,方程②有两个不相等的实数根,此时方程①合题意,所以此时以点 P 为中点的双曲线 C 的弦存在,且此弦所在的直线方程就是①.

当 $a^2b^2 + a^2y_0^2 - b^2x_0^2 = 0$ 时,方程①有两个相等的实数根 $x = x_0$,所以双曲线 C 的过点 P 的切线方程为 $y - y_0 = \frac{x_0b^2}{y_0a^2}(x - x_0)$.

当且仅当点 P 在圆、椭圆、抛物线内部时,该圆锥曲线的以点 P 为中点的弦存在,并且当点 P 不是该圆锥曲线的中心时中点弦存在且唯一;当点 P 是该圆锥曲线的中心时中点弦有无数条(过点 P 的任意直线与该圆锥曲线相交形成的弦).

形同质异的解析几何题

题1 已知 F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦点，P 是该椭圆上的动点，点 A 的坐标是 $(1,1)$，求：

(1) $\frac{3}{2}|PF_1|+|PA|$ 的最小值；

(2) $|PF_1|+|PA|$ 的最小值.

解 (1) 由 $e=\frac{2}{3}$ 并联想到椭圆的第二定义，可将 $\frac{3}{2}|PF_1|$ 转化为点 P 到左准线的距离，所以当 PA 垂直于左准线时，$\frac{3}{2}|PF_1|+|PA|$ 最小，且最小值是 $\frac{11}{2}$.

(2) 用(1)的方法做不出来，应当这样做：

联想到椭圆的第一定义(设 F_2 是该椭圆的右焦点)，得

$$|PF_1|+|PA|=|PA|+6-|PF_2|=6+|PA|-|PF_2|$$

而 $||PA|-|PF_2||\leqslant|AF_2|=\sqrt{2}$，所以 $|PF_1|+|PA|$ 的最小值是 $6-\sqrt{2}$.

注 (1) 由(1)的转化方法并结合图形立知，当且仅当点 P 是椭圆的右顶点时，$\frac{3}{2}|PF_1|+|PA|$ 取到最大值，从而得 $\frac{3}{2}|PF_1|+|PA|$ 的取值范围是 $[\frac{11}{2},\frac{15}{2}+\sqrt{5}]$.

(2) $|PF_1|+|PA|$ 的取值范围是 $[6-\sqrt{2},6+\sqrt{2}]$.

题2 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的点，F_1,F_2 是该椭圆的两个焦点，求：

(1) $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值；

(2) $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最小值.

解 (1) 由椭圆的第一定义，得 $|PF_1|+|PF_2|=4$，所以当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=2$ 时，$|PF_1|\cdot|PF_2|$ 取到最大值 4.

(2) 由(1)的方法继续下去难以解决此问，但可这样做

$$|PF_1|\cdot|PF_2|=|PF_1|(4-|PF_1|)=4-(|PF_1|-2)^2$$

又 $|PF_1|\in[1,3]$，所以当且仅当 $|PF_1|=1$ 或 3 时，$|PF_1|\cdot|PF_2|$ 取到最大值 3.

注 求最值时若用均值不等式不能求出，则用求函数最值的方法计算.

一道求离心率题的简解

题目 过椭圆的左焦点 F 且倾斜角为 $\alpha(\alpha \neq \frac{\pi}{2})$ 的直线交该椭圆于 A,B 两点,若 $|FA| = \lambda|FB|(\lambda > 1)$,求该椭圆的离心率.

解 可设该椭圆的方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

(1) 当 $\alpha = 0$ 时,得

$$|FA| = \lambda|FB|$$

即

$$a + c = \lambda(a - c)$$

所以

$$e = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} = \frac{\lambda-1}{(\lambda+1)|\cos\alpha|}$$

(2) 当 $\alpha \in (0,\frac{\pi}{2})$ 时,点 A,B 分别在 x 轴的上,下方.由点 A,B 分别向该椭圆的左准线作垂线,设垂足分别为 C,D,再由点 B 向 AC 作垂线,设垂足为 E(图 1).

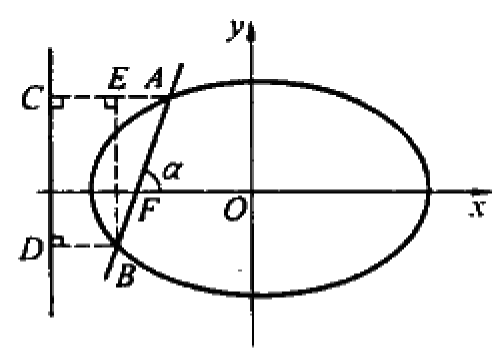


图 1

在 Rt△ABE 中,$\angle BAE = \alpha$,所以

$$|AC|-|BD| = |AE| = |AB||\cos\alpha|$$

又 $|BF| = \frac{1}{\lambda+1}|AB|$,$|AF| = \frac{\lambda}{\lambda+1}|AB|$,所以

$$|AF|-|BF| = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}|AB|$$

由椭圆的第二定义,得

$$e = \frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|BD|}$$

所以

$$e = \frac{|AF|-|BF|}{|AC|-|BD|} = \frac{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}|AB|}{|AB||\cos\alpha|} = \frac{\lambda-1}{(\lambda+1)|\cos\alpha|}$$

(3) 当 $\alpha \in (\frac{\pi}{2},\pi)$ 时,点 B,A 分别在 x 轴的上,下方.由点 A,B 分别向椭圆的左准线作垂线,设垂足分别为 C,D,再由点 B 向 AC 作垂线,设垂足为 E(图 2).

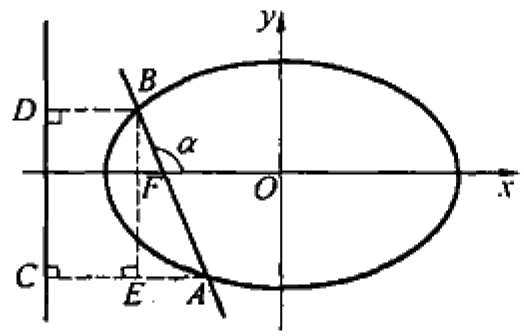


图 2

在 Rt△ABE 中,∠BAE = π - α,所以

$$|AC|-|BD|=|AE|=|AB||\cos\alpha|$$

又 $|BF|=\frac{1}{\lambda+1}|AB|$, $|AF|=\frac{\lambda}{\lambda+1}|AB|$, 所以

$$|AF|-|BF|=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}|AB|$$

由椭圆的第二定义,得

$$e=\frac{|AF|}{|AC|}=\frac{|BF|}{|BD|}$$

所以 $$e=\frac{|AF|-|BF|}{|AC|-|BD|}=\frac{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}|AB|}{|AB||\cos\alpha|}=\frac{\lambda-1}{(\lambda+1)|\cos\alpha|}$$

综上所述,均有

$$e=\frac{\lambda-1}{(\lambda+1)|\cos\alpha|}$$

注 若设出直线的方程后联立解方程组来解此题,运算量将要大得多,要善于运用平面几何知识解决解析几何问题,并注意运用圆锥曲线的第二定义.

圆锥曲线的切点弦、中点弦、切线方程

结论1 (1)若 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(|a|\neq|b|)$ 上一点,则该椭圆以点 $P(x_0,y_0)$ 为切点的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$;

(2)若 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点,则该双曲线以点 $P(x_0,y_0)$ 为切点的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$;

(3)若 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px(p\neq0)$ 上一点,则该抛物线以点 $P(x_0,y_0)$ 为切点的切线方程是 $y_0y=2p\cdot\frac{x_0+x}{2}$.

结论2 (1)若 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(|a|\neq|b|)$ 外一点,PM,PN 分别切该椭圆于点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则切点弦 MN 的方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$;

(2)若 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一点,PM,PN 分别切该双曲线于点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则切点弦 MN 的方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$;

(3)若 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px(p\neq0)$ 外一点,PM,PN 分别切该抛物线于点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则切点弦 MN 的方程是 $y_0y=2p\cdot\frac{x_0+x}{2}$.

结论3 (1)椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(|a|\neq|b|)$ 以点 $P(x_0,y_0)$ 为中点的中点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$;

(2)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 以点 $P(x_0,y_0)$ 为中点的中点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$;

(3)抛物线 $y^2=2px(p\neq0)$ 以点 $P(x_0,y_0)$ 为中点的中点弦方程是 $y_0y-2p\cdot\frac{x_0+x}{2}=y_0^2-2px_0$.

对称轴是 $y=\pm x+b$ 的轴对称问题的简单解法

解析几何中的对称问题有两类：一是中心对称（即两个图形关于一个点对称），二是轴对称（即两个图形关于一条直线对称）. 有关的结论分别是：

定理 1 (1) 点 $P(x_0,y_0)$ 关于点 $A(a,b)$ 的对称点是 $Q(2a-x_0,2b-y_0)$；

(2) 曲线 $f(x,y)=0$ 关于点 $A(a,b)$ 的对称曲线是 $f(2a-x,2b-y)=0$.

定理 2 (1) 点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $Ax+By+C=0(AB\neq 0)$ 的对称点是 $Q(x'_0,y'_0)$，其中 x'_0,y'_0 由以下方程组的解确定

$$\begin{cases}\dfrac{y-y'_0}{x-x'_0}\cdot\left(-\dfrac{A}{B}\right)=-1\\ A\cdot\dfrac{x+x'_0}{2}+B\cdot\dfrac{y+y'_0}{2}+C=0\end{cases}$$

(2) 曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $Ax+By+C=0(AB\neq 0)$ 的对称曲线是 $f(x',y')=0$，其中 x',y' 由以下方程组的解（视 x,y 为已知数）确定

$$\begin{cases}\dfrac{y'-y}{x'-x}\cdot\left(-\dfrac{A}{B}\right)=-1\\ A\cdot\dfrac{x'+x}{2}+B\cdot\dfrac{y'+y}{2}+C=0\end{cases}$$

用定理 2 来解决轴对称问题时，往往运算量很大，所以本文将给出两类轴对称问题的简单解法（见下文的定理 5,6）.

定理 3 (1) 点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $x=a$ 的对称点是 $Q(2a-x_0,y_0)$；

(2) 曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $x=a$ 的对称曲线是 $f(2a-x,y)=0$.

定理 4 (1) 点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=b$ 的对称点是 $Q(x_0,2b-y_0)$；

(2) 曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=b$ 的对称曲线是 $f(x,2b-y)=0$.

定理 5 (1) 点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称点是 $Q(y_0-b,x_0+b)$；

(2) 曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称曲线是 $f(y-b,x+b)=0$.

证明 (1) 先把点 $P(x_0,y_0)$ 及直线 $y=x+b$ 都向右平移 b 个单位（当 b 是负数时表示向左平移 $-b$ 个单位，下同），得它们分别变为点 $P'(x_0+b,y_0)$ 及直线 $y=x$. 显然点 P' 关于直线 $y=x$ 的对称点是 $Q'(y_0,x_0+b)$.

再把满足轴对称关系的点 $P'(x_0+b,y_0)$，直线 $y=x$ 及点 $Q'(y_0,x_0+b)=0$

都向左平移 b 个单位,得点 $P(x_0,y_0)$,直线 $y=x+b$ 及点 $Q(y_0-b,x_0+b)$,它们仍满足轴对称关系(因为平移不改变对称关系),又点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称点是唯一的,所以结论(1) 成立.

(2) 先把曲线 $f(x,y)=0$ 及直线 $y=x+b$ 都向右平移 b 个单位,得它们分别变为曲线 $f(x-b,y)=0$ 及直线 $y=x$. 显然曲线 $f(x-b,y)=0$ 关于直线 $y=x$ 的对称曲线是 $f(y-b,x)=0$(只需 x,y 互换即可).

再把满足轴对称关系的曲线 $f(x,y)=0$,直线 $y=x$ 及曲线 $f(y-b,x)=0$ 都向左平移 b 个单位,得曲线 $f(x,y)=0$,直线 $y=x+b$ 及曲线 $f(y-b,x+b)=0$,它们仍满足轴对称关系,得结论(2) 成立.

注 (1) 按先向下平移 b 个单位(当 b 是负数时表示向上平移 $-b$ 个单位,下同) 再向上平移 b 个单位的思路也可证得定理 5 成立.

(2) 由结论(1) 也可证得结论(2) 成立:

设 $M(x,y)$ 是曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称曲线上的任一点,由结论(1) 知,点 $M(x,y)$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称点是 $M'(y-b,x+b)$,又点 $M'(y-b,x+b)$ 在已知的曲线 $f(x,y)=0$ 上,所以 $f(y-b,x+b)=0$,这就是所求的曲线方程.

定理 6 (1) 点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=-x+b$ 的对称点是 $Q(b-y_0,b-x_0)$;

(2) 曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=-x+b$ 的对称曲线是 $f(b-y,b-x)=0$.

证明 (1) 先把点 $P(x_0,y_0)$ 及直线 $y=-x+b$ 都向下平移 b 个单位,得它们分别变为点 $P'(x_0,y_0-b)$ 及直线 $y=-x$. 显然点 P' 关于直线 $y=-x$ 的对称点是 $Q'(b-y_0,-x_0)$.

再把满足轴对称关系的点 $P'(x_0,y_0-b)$,直线 $y=-x$ 及点 $Q'(b-y_0,-x_0)$ 都向上平移 b 个单位,得点 $P(x_0,y_0)$,直线 $y=-x+b$ 及点 $Q(b-y_0,b-x_0)$,它们仍满足轴对称关系,所以结论(1) 成立.

(2) 先把曲线 $f(x,y)=0$ 及直线 $y=-x+b$ 都向下平移 b 个单位,得它们分别变为曲线 $f(x,y+b)=0$ 及直线 $y=-x$. 显然曲线 $f(x,y+b)=0$ 关于直线 $y=-x$ 的对称曲线是 $f(-y,-x+b)=0$(只需把 x,y 分别换为 $-y,-x$ 即可).

再把满足轴对称关系的曲线 $f(x,y)=0$,直线 $y=-x$ 及曲线 $f(-y,-x+b)=0$ 都向上平移 b 个单位,得曲线 $f(x,y)=0$,直线 $y=-x+b$ 及曲线 $f(b-y,b-x)=0$,它们仍满足轴对称关系,得结论(2) 成立.

注 (1) 按先向左平移 b 个单位再向右平移 b 个单位的思路也可证得定理

6 成立.

(2) 由结论(1) 也可证得结论(2) 成立:

设 $M(x,y)$ 是曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=-x+b$ 的对称曲线上的任一点,由结论(1) 知,点 $M(x,y)$ 关于直线 $y=-x+b$ 的对称点是 $M'(b-y,b-x)$,又点 $M'(b-y,b-x)$ 在已知的曲线 $f(x,y)=0$ 上,所以 $f(b-y,b-x)=0$ 就是所求的曲线方程.

笔者经过计算把定理 2 简化为:

定理 7 (1) 点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $Ax+By+C=0(AB\neq 0)$ 的对称点为 $Q(x_0+At,y_0+Bt)$,其中 $t=-\dfrac{2(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}$;

(2) 曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $Ax+By+C=0(AB\neq 0)$ 的对称曲线方程为 $f(x+At,y+Bt)=0$,其中 $t=-\dfrac{2(Ax+By+C)}{A^2+B^2}$.

例 求直线 $l_1:y=\dfrac{1}{2}x$ 关于直线 $l:y=2x$ 的对称直线的方程.

解法 1 把 $A=2,B=-1,C=0,f(x,y)=x-2y$ 代入定理 7(2),得所求直线的方程为 $l_2:y=-\dfrac{11}{2}x$.

解法 2 先把直线 $l_1:y=\dfrac{1}{2}x$ 及直线 $l:y=2x$ 上的点的横坐标都扩大到原来的 2 倍(纵坐标不变,下同),得它们分别变为直线 $l'_1:y=\dfrac{1}{4}x$ 及直线 $l':y=x$.显然直线 l'_1 关于直线 l' 的对称直线是 $l'_2:y=4x$.

再把满足轴对称关系的直线,$l':y=x$ 及 $l'_2:y=4x$ 上的点的横坐标都缩小到原来的$\dfrac{1}{2}$,得直线 $l_1:y=\dfrac{1}{2}x,l:y=2x,l_2:y=8x$ 它们仍满足轴对称关系,所以所求直线的方程为 $l_2:y=8x$.

对两种解法的分析 解法 1 无疑是正确的,那么解法 2 又错在何处呢?

经过伸缩变换后,两直线的夹角一般会改变. 比如,把互相垂直的两直线 $y=\pm x$ 上的点的横坐标都缩小到原来的$\dfrac{1}{2}$,得到的直线 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ 却不再互相垂直.

在解法 2 中,l',l'_2 与 l' 的夹角都相等,把这些直线上的点的横坐标都缩小到原来的$\dfrac{1}{2}$,得到的直线 $l_1:y=\dfrac{1}{2}x,l_2:y=8x$ 与 $l:y=2x$ 的夹角不再相等,所以解法 2 中说“得直线 $l_1:y=\dfrac{1}{2}x,l:y=2x,l_2:y=8x$ 它们仍满足轴对称关系”当然不成立!

读者应当注意:只有进行平移变换时,角度才不改变;若进行了伸缩变换,角度一般要改变.

练 习

1.点 $P(2,5)$ 关于直线 $x+y=1$ 的对称点的坐标是( ).

A.$(-4,-1)$ B.$(-5,-2)$ C.$(-6,-3)$ D.$(-4,-2)$

2.直线 $2x-y-2=0$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称图形的方程是( ).

A.$x-2y+1=0$ B.$x-2y-1=0$

C.$x+y-1=0$ D.$x+2y-1=0$

3.曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $x-y-2=0$ 的对称曲线的方程是( ).

A.$f(y+2,x)=0$ B.$f(x-2,y)=0$

C.$f(y+2,x-2)=0$ D.$f(y-2,x+2)=0$

4.直线 $2x+3y+1=0$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称图形的方程是________.

5.点 $P(-1,2)$ 关于直线 $3x+4y+5=0$ 的对称点的坐标是________.

(答案:1.A 2.B 3.C 4.$3x+2y=0$ 5.$(-\frac{17}{5},-\frac{6}{5})$)

对一道课本习题的探究

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第133页习题的第7题是:

过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点的一条直线和此抛物线相交,两个交点的纵坐标分别为 y_1, y_2,求证:$y_1y_2 = -p^2$.

简证 因为直线过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,所以可设该直线的方程为 $x = my + \frac{p}{2}$,代入 $y^2 = 2px$,得

$$y^2 - 2pmy - p^2 = 0$$

因为 y_1, y_2 是此方程的两个实根,所以 $y_1y_2 = -p^2$.

对于该题本文得到了以下众多结论.

结论1 若一条直线与抛物线 $y^2 = 2px$ 相交的两个交点的纵坐标之积为 $-p^2$,则该直线过此抛物线的焦点.

简证 可设该直线的方程为 $x = my + a$,代入 $y^2 = 2px$,得

$$y^2 - 2pmy - 2pa = 0$$

所以

$$y_1y_2 = -2pa = -p^2, a = \frac{p}{2}$$

从而可得结论1成立.

结论2 过定点 $(c, 0)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 2px$ 相交的两个交点的纵坐标之积为定值 $-2pc$.

结论3 若一条直线与抛物线 $y^2 = 2px$ 相交的两个交点的纵坐标之积为定值 v,则该直线过定点 $\left(-\frac{v}{2p}, 0\right)$.

结论4 若一条直线与抛物线 $y^2 = 2px$ 交于 A, B 两点,设直线 OA, OB 的倾斜角分别为 α, β(其中 O 是坐标原点,一定有 $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}$),若 $\alpha + \beta$ 为定值 θ(一定有 $0 < \theta < 2\pi$),则当 $\theta = \pi$ 时,该直线的倾斜角是 $\frac{\pi}{2}$;当 $\theta \neq \pi$ 时,该直线过定点.

(1) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 时,该直线过定点 $(-2p, 0)$;

(2) 当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 时,该直线过定点 $(-2p, 2p\cot\theta)$.

证明 可设题中直线的方程为

$$x = my + a(a \neq 0) \quad ①$$

代入 $y^2 = 2px$,得

$$y^2 - 2pmy - 2pa = 0$$

可设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,得

$$y_1 + y_2 = 2pm, y_1y_2 = -2pa, x_1x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = a^2$$

$$k_{OA} = \tan\alpha = \frac{y_1}{x_1}, k_{OB} = \tan\beta = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{-2pa}{a^2} = -\frac{2p}{a}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}} + \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2p}} = 2p \cdot \frac{y_1 + y_2}{y_1y_2} = -\frac{2pm}{a}$$

若 $\alpha + \beta = \theta = \pi$,得 $\tan\alpha + \tan\beta = -\frac{2pm}{a} = 0, m = 0$,直线①即 $x = a$,其倾斜角是 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 当 $\alpha + \beta = \theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 时,$\tan\alpha\tan\beta = -\frac{2p}{a} = 1, a = -2p$,直线①即 $x = my - 2p$,它过定点 $(-2p, 0)$.

(2) 当 $\alpha + \beta = \theta, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 时,$\tan\theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -\frac{2pm}{a + 2p}, a = -\frac{2pm}{\tan\theta} - 2p$,直线①即 $x = m(y - 2p\cot\theta) - 2p$,它过定点 $(-2p, 2p\cot\theta)$.

对一道小题的探究

苏州大学《中学数学月刊》编辑部编写的《高二数学教学与测试》(2006年第7次修订印刷,苏州大学出版社)中第19套自我测试的第7题是:

题1　若直线 $l_1: 2x-5y+20=0$ 和直线 $l_2: mx-2y-10=0$ 与两坐标轴围成的四边形有一个外接圆,则实数 m 的值等于________.

教师用书第70页给出的解答为"提示: $l_1 \perp l_2 \Rightarrow 2m+10=0 \Rightarrow m=-5$".

这个答案是正确的!我们再来看一道类似的题目:

题2　若直线 $l_1: 2x-5y+20=0$ 和直线 $l_2: mx+2y-10=0$ 与两坐标轴围成的四边形有一个外接圆,则实数 m 的值等于________.

若按以上解答得到的答案是 $m=5$,而实际上题2的正确答案是 $m=\pm 5$.

图1中的四边形 $ABCD$ 也可以有外接圆,此时,$\angle ABO=\angle ADC$,得 $\angle ABO+\angle DCO=\frac{\pi}{2}$,$k_1 \cdot k_2=1$,$m=-5$.

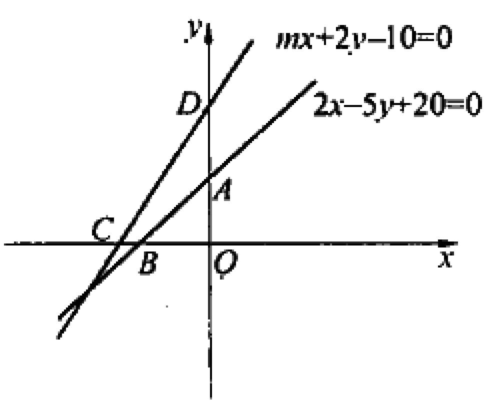


图1

一般的问题:若 l_1 是已知直线,含参数 m 的直线 l_2 过定点 T,这两条直线与两坐标轴围成的四边形有一个外接圆,求实数 m 的取值范围.

应分两种情形:

(1) 当 T,O 在直线 l_1 的同侧时,只有一种情形,由 $k_1 \cdot k_2=-1$ 求解;

(2) 当 T,O 在直线 l_1 的异侧时,只有两种情形,由 $k_1 \cdot k_2=\pm 1$ 求解.

两道(国内外)考题的一般情形

题1 (2008年江苏高考卷第17题)如图1,某地有三家工厂,分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A,B 及 CD 的中点 P 处,已知 $AB=20$ km,$CB=10$ km,为了处理三家工厂的污水,现要在矩形 $ABCD$ 的区域上(含边界),且与 A,B 等距离的一点 O 处建造一个污水处理厂,并铺设三条排污管道 AO,BO,OP,设排污管道的总长为 y km.

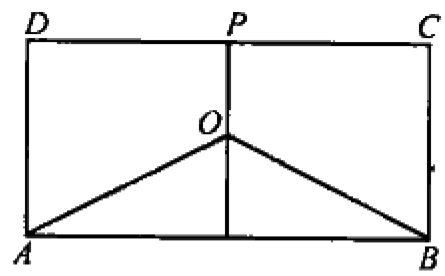


图1

(Ⅰ)按下列要求写出函数关系式:

① 设 $\angle BAO=\theta(\text{rad})$,将 y 表示成 θ 的函数关系式;

② 设 $OP=x(\text{km})$,将 y 表示成 x 的函数关系式.

(Ⅱ)请你选用(Ⅰ)中的一个函数关系,确定污水处理厂的位置,使三条排污管道总长度最短.

题2 (2006年莫斯科大学数学力学系入学考试数学试卷的压轴题)求二元函数 $z=|2x-y-1|+|x+y|+|y|$ 的最小值.

文献[1]给出了题1(Ⅱ)的四种解法,而这些解法都是容易想到的常规解法.

文献[2]运用点到直线的距离公式给出了题2的简洁解答:

得 $z=\sqrt{5}\cdot\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}+|y|$,所以 z 表示平面直角坐标系 xOy 中的动点 $P(x,y)$ 到直线 $l_1:2x-y-1=0$ 的距离 d_1 的 $\sqrt{5}$ 倍、直线 $l_2:x+y=0$ 的距离 d_2 的 $\sqrt{2}$ 倍、直线 $l_3:y=0$(即 x 轴)的距离之和.(请读者自己画图,下同)

得 $l_1,l_2;l_2,l_3;l_3,l_1$ 的交点分别是 $P_3\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$,$P_1(0,0)$,$P_2\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

结合图形易知只有当点 P 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内部或边界上时,z 才可能取到最小值;进而可得,只有当点 P 为 $\triangle P_1P_2P_3$ 顶点时,z 才可能取到最小值.而当点 P 分别是 P_1,P_2,P_3 时,z 的值分别为 $\dfrac{1}{3}$,1,$\dfrac{1}{2}$,从而可得 z 的最小值为 $\dfrac{1}{3}$(当

且仅当 $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$ 时取到最小值).

题 1 的一般情形是求一个点到两个已知点和一条已知直线(已知的三者共面)的距离之和最小.

题 2 的一般情形是求一个点到已知的三条共面直线的距离之和最小.

早在 2000 年,笔者就发表了文章《四种 Fermat 点及其作法》[3],该文把熟知的 Fermat 点(即在空间里,到三个已知点的距离之和最小的点)推广为四种 Fermat 点,并给出了它们的作法,当然就很容易求出对应的"距离之和的最小值"了.下面介绍其中的 1 型、3 型 Fermat 点,即题 1、2 的一般情形(0 型 Fermat 点就是通常的 Fermat 点[4],2 型 Fermat 点可由 3 型 Fermat 点来解决,建议读者阅读原文):

定义 1 在空间里,若点 P_1 到已知的两点 A,B 及直线 c(A,B,c 共面)的距离之和最小(此时必有 P_1,A,B,c 共面),则点 P_1 叫做 A,B,c 的 1 型 Fermat 点.

关于点 P_1 的作法,这里只给出 A,B 在 c 的同侧的情形(读者不难得到其余情形的结论,下同):

定理 1 若点 A,B 及直线 c 共面,A,B 在 c 的同侧,$A \notin c, B \in c, AD \perp c, BE \perp c, D, E$ 是垂足,$AD = p, BE = q, DE = s \geqslant 0, P_1$ 是 A,B,c 的 1 型 Fermat 点,则

(1) 当 $\sqrt{3}\,|p-q| < s < \sqrt{3}(p+q)$ 时,点 P_1 在四边形 $ADEB$ 内,且 $\angle DAP_1 = \angle EBP_1 = 60°$.

(2) 当 $s \leqslant \sqrt{3}(q-p)$ 时,$P_1 = A$;当 $s \leqslant \sqrt{3}(p-q)$ 时,$P_1 = B$.

(3) 当 $s \geqslant \sqrt{3}(p+q)$ 时,作 A',A 关于 c 对称,$P_1 = A'B \cap c$.

(由定理 1 知,题 1 的设计是所有的情形中距离之和最小的.)

定义 2 在空间里,若点 P_3 到已知的三条共面直线 a,b,c 的距离之和最小(此时必有 P_3,a,b,c 共面),则点 P_3 叫做 a,b,c 的 3 型 Fermat 点.

定理 2 当三条直线 a,b,c 可围成 $\triangle ABC$ 时,若 P_3 是 a,b,c 的 3 型 Fermat 点,则

(1) 当 $\triangle ABC$ 是正三角形时,P_3 为 $\triangle ABC$ 内(包括边界上)的任意点.

(2) 当 $\triangle ABC$ 是腰大于底的等腰三角形时,P_3 为底上的任意点.

(3) 其他情形时,P_3 为 $\triangle ABC$ 的最大内角顶点.

文献[3]是用解析几何中的点到直线的距离公式(并用线性规划知识去掉该公式中的绝对值符号)来证明的,现在读来却感觉有些繁杂,下面给出一种非常简洁(仅用三角形面积公式)的统一证明(纯粹的平面几何证明读者也是容易给出的):

先同文献[3]的证明,已得点 P_3 在 $\triangle ABC$ 内或边界上(是纯粹的平面几何证明).

设点 O 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任一点,作 $OD\perp BC$, $OE\perp CA$, $OF\perp AB$, $AH\perp BC$,垂足分别是 D,E,F,H,由三角形面积公式,得

$$S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}=S_{\triangle ABC}$$

$$|OD|\cdot|BC|+|OE|\cdot|CA|+|OF|\cdot|AB|=|AH|\cdot|BC| \quad ①$$

在 $\triangle ABC$ 中,可不妨设 $|AB|\leqslant|AC|\leqslant|BC|$,得

$$|OE|\cdot|BC|+|OF|\cdot|BC|\geqslant|OE|\cdot|CA|+|OF|\cdot|AB| \quad ②$$

再由①,立得

$$|OD|+|OE|+|OF|\geqslant|AH| \quad ③$$

③中取等号即②中取等号也即 $|OE|\cdot|BC|=|OE|\cdot|CA|$ 且 $|OF|\cdot|BC|=|OF|\cdot|AB|$(因为可证 $|OE|\cdot|BC|\geqslant|OE|\cdot|CA|$ 且 $|OF|\cdot|BC|\geqslant|OF|\cdot|AB|$),其充要条件是:

"$|AB|=|BC|$ 即 $\triangle ABC$ 是正三角形,点 O 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任意点"或"$|AB|<|BC|$(此时必 O,F 重合)且 $|OE|\cdot|BC|=|OE|\cdot|CA|$",也即

"$\triangle ABC$ 是正三角形,点 O 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任意点"或"$|AB|<|AC|=|BC|$ 且 O,F 重合"或"$|AB|\leqslant|AC|<|BC|$ 且 O,E,F 重合",也即

"$\triangle ABC$ 是正三角形,点 O 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任意点"或"$|AB|<|AC|=|BC|$ 且 O 是线段 AB 上的任意点"或"$|AB|\leqslant|AC|<|BC|$ 且 O,A 重合".

再由③即知定理 2 成立!

由文献[2]的解题思路,还可得

定理 3 设三条直线 $l_i(i=1,2,3,$下同$)$能围成 $\triangle P_1P_2P_3$(其最大内角是 P_3),且 $l_1\cap l_2=P_3$, $l_2\cap l_3=P_1$, $l_3\cap l_1=P_2$,已知的三个正数 k_i 中的最小数是 k_3,空间任意一点 O 到直线 l_i 的距离是 d_i,则当点 O 与 P_3 重合时,$\sum\limits_{i=1}^{3}k_id_i$ 取到最小值.

证明 首先,容易理解:当 $\sum\limits_{i=1}^{3}k_id_i$ 取到最小值时,点 O 必在 $\triangle P_1P_2P_3$ 所在的平面上.

再参见文献[3]的证明可知,当 $\sum\limits_{i=1}^{3}k_id_i$ 取到最小值时,点 O 必在 $\triangle P_1P_2P_3$ 内或边界上.

有 $\sum_{i=1}^{3} k_i d_i \geqslant k_3 \sum_{i=1}^{3} d_i \geqslant k_3 \cdot P_3H$(参见③,其中 P_3H 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的高),即定理 3 成立!

猜想 1 设三条直线 $l_i: A_ix + B_iy + C_i = 0(i = 1,2,3)$ 能围成 $\triangle P_1P_2P_3$,且有坐标 $P_i(x_i, y_i), k_i > 0(i = 1,2,3), f(x,y) = \sum_{i=1}^{3} k_i \mid A_ix + B_iy + C_i \mid$.

(1) 对于坐标平面内的任意点 (x,y), 有 $[f(x,y)]_{\min} = \min\{f(x_i,y_i) \mid i = 1,2,3\}$;

(2) 对于 $\triangle P_1P_2P_3$ 内或边界上的任意点 (x,y), 有 $[f(x,y)]_{\max} = \max\{f(x_i,y_i) \mid i = 1,2,3\}$.

猜想 2 设 n 条直线(其中可以有重合的直线) $l_i: A_ix + B_iy + C_i = 0(i = 1,2,3,\cdots,n)$ 能围成封闭区域,且该封闭区域各顶点的坐标分别为 $P_j(x_j,y_j)$ $(j = 1,2,\cdots,m), k_i > 0(i = 1,2,3,\cdots,n), f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mid A_ix + B_iy + C_i \mid$,则

(1) 对于坐标平面内的任意点 (x,y), 有 $[f(x,y)]_{\min} = \min\{f(x_j,y_j)j \mid j = 1,2,3,\cdots,m\}$;

(2) 对于 $\triangle P_1P_2P_3$ 内或边界上的任意点 (x,y), 有 $[f(x,y)]_{\max} = \max\{f(x_j,y_j)j \mid j = 1,2,3,\cdots,m\}$.

(不能由线性规划理解猜想 1,2 成立)

文献[3]给出了四种 Fermat 点的定义及其作法,下面再推广这些定义(当然也推广了文献[5]中的 Steiner(史坦纳)问题):

定义 3 在空间里,若点 $P_{m,n}$ 到已知的 m 个点及 n 条直线(这些已知的点与直线均共面 α,点、直线均可重复)的距离之和最小(此时必有 $P_{m,n} \in \alpha$),则点 $P_{m,n}$ 叫做这些已知的点和直线的 $m-n$ 型 Fermat 点,对应的距离之和的最小值记作 $g_{m,n}$.

定义 4 设 $k_i(i = 1,2,\cdots,m), l_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是已知的正数,在空间里,空间的点 $P_{m,n}$ 到已知的 m 个点 $A_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 及 n 条直线 $a_j(j = 1,2,\cdots,n)$(这些已知的点与直线均共面 α,点、直线均可重复)的距离分别为 $d_i(i = 1,2,\cdots,m), D_j(j = 1,2,\cdots,n)$,若 $\sum_{i=1}^{m} k_i d_i + \sum_{j=1}^{n} l_j D_j$ 最小(此时必有 $P_{m,n} \in \alpha$),则点 $P_{m,n}$ 叫做这些已知的点和直线及已知数 $k_i(i = 1,2,\cdots,m)$, $l_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 的 $m-n$ 型加权 Fermat 点,对应的距离之和的最小值记作 $gg_{m,n}$.

问题 1 对于定义 3,如何求作 $m-n$ 型 Fermat 点,如何求出 $g_{m,n}$?

问题 2 对于定义 4,如何求作 $m-n$ 型加权 Fermat 点,如何求出 $gg_{m,n}$?

上述题 2 就是一种 0 - 3 型加权 Fermat 点问题.

参考文献

[1] 李鹏.一道高考应用题的解法探究与评析[J].中学数学杂志(高中),2008(9):51-53.

[2] 甘志国.2006 年莫斯科大学一道入学试卷的压轴题的一般情形[J].中学数学杂志(高中),2008(9):27.

[3] 甘志国.四种 Fermat 点及其作法[J].数学通讯,2000(23):31-33.

[4] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992:133-134.

[5] RICHARD C,HERBERT R.数学是什么[M].汪浩,朱煜民,译.长沙:湖南教育出版社,1985:378-421.

一个圆的问题的一般结论

问题　设圆 C 的圆心 C 及直线 l 均已知(所以圆心 C 到直线 l 的距离 d 也是已知的),若圆 C 上有且仅有 $n(n \in \mathbf{N})$ 个点到直线 l 的距离为 $a(a \geqslant 0)(n, a$ 也已知),求圆 C 的半径 $r(r > 0)$ 的取值范围.

读者通过画图容易得出以下答案:

结论　(1) 当 $d < a$ 时.

① 若 $n = 0$,则 $0 < r < a - d$;

② 若 $n = 1$,则 $r = a - d$;

③ 若 $n = 2$,则 $a - d < r < a + d$;

④ 若 $n = 3$,则 $r = a + d$;

⑤ 若 $n = 4$,则 $r > a + d$;

⑥ 若 $n > 4$,则 r 不存在.

(2) 当 $d = a$ 时.

① 若 $n = 0$ 或 1,则 r 不存在;

② 若 $n = 2$,则 $0 < r < 2a$;

③ 若 $n = 3$,则 $r = 2a$;

④ 若 $n = 4$,则 $r > 2a$;

⑤ 若 $n > 4$,则 r 不存在.

(3) 当 $d > a$ 时.

① 若 $n = 0$,则 $0 < r < d - a$;

② 若 $n = 1$,则 $r = d - a$;

③ 若 $n = 2$,则 $d - a < r < d + a$;

④ 若 $n = 3$,则 $r = d + a$;

⑤ 若 $n = 4$,则 $r > d + a$;

⑥ 若 $n > 4$,则 r 不存在.

练　习

1. 若圆 $x^2 + y^2 = r^2(r > 0)$ 上恰有两点到直线 $4x - 3y + 25 = 0$ 的距离为

1,求 r 的取值范围.

2.若圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上恰有两点到直线 $4x-3y+5=0$ 的距离为1,求 r 的取值范围.

3.若圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上恰有两点到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离为1,求 r 的取值范围.

(答案:分别由以上结论的(3)③,(2)②,(1)③ 可以求得答案分别为 1.(4,6);2(0,2);3.$\left(1-\frac{\sqrt{5}}{5},1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.)

过定点与定双曲线有唯一公共点的直线有哪几条

学生在解决过定点的直线与已知双曲线有唯一公共点的问题时总感觉难度很大，下表用数形结合思想给出其完整结论：

序号	定点 A 的位置	过定点与定双曲线有唯一公共点的直线有哪几条
(1)	在双曲线内(指含焦点的区域)	2 条：分别与该双曲线的两条渐近线平行
(2)	在双曲线上	3 条：有 2 条分别与该双曲线的两条渐近线平行；另 1 条是该双曲线在定点 A 处的切线
(3)	在双曲线的渐近线上(但不是该双曲线的中心)	2 条：1 条与该双曲线不过定点 A 的渐近线平行；另 1 条是该双曲线过定点 A 的切线
(4)	是双曲线的中心	0 条
(5)	在双曲线外(但不在该双曲线的渐近线上)	4 条：有 2 条分别与该双曲线的两条渐近线平行；另 2 条是该双曲线过定点 A 的切线

由以下两个事实便可理解以上结论成立：

(1) 过双曲线内的点不能作该双曲线的切线；过双曲线上的点只能作该双曲线的一条切线；过双曲线外的点只能作该双曲线的两条切线(但渐近线应视作该双曲线在无穷远点处的切线)。(该结论与圆的切线的结论类似)

(2) 与双曲线的渐近线平行的直线与该双曲线相交且有唯一交点.

例　过点 $P(3,2)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 有唯一公共点的直线有(　　).

A.1 条　　B.2 条　　C.3 条　　D.4 条

解　由以上结论(3) 立知选 B.

用平面几何知识帮助解答解析几何题

解答平面解析几何题往往运算量大,而用平面几何知识有时却能减少运算量,下面举例说明.

例1 (由全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第79页第8题改编)设直线 $l_1: a_1(x+1)+b_1y=0$, $l_2: a_2(x-1)+b_2y=0$ 满足 $a_1a_2+b_1b_2=0$,求 l_1 与 l_2 的交点 P 的轨迹方程.

解法1 直线 l_1, l_2 分别是经过定点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$ 的直线,由"直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半"立得 $OP=\frac{1}{2}AB=1$(其中 O 是坐标原点),所以点 P 的轨迹是以点 O 为圆心以1为半径的圆(即单位圆),其轨迹方程是 $x^2+y^2=1$.

解法2 直线 l_1, l_2 分别是经过定点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$ 的直线,由 $\angle APB=90°$ 及"半圆所含的圆周角是直角"立得点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆(即单位圆),其轨迹方程是 $x^2+y^2=1$.

例2 (教科书第83~84页例3)图1是某圆拱桥的一孔圆拱的示意图.该圆拱跨度 $AB=20$ m,拱高 $OP=4$ m,在建造时每隔4 m需用一个支柱支撑,求支柱 A_2P_2 的长度(精确到0.01 m).

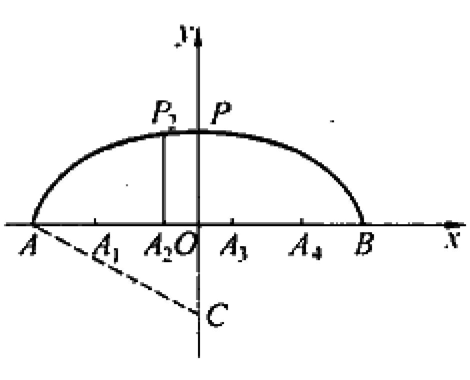


图1

教科书是用圆的标准方程及待定系数法通过解方程组进行求解的,而用垂径定理及勾股定理更容易求解.

解 显然,圆心 C 在 y 轴的负半轴上,所以可设 $C(b,0)(b<0)$,又设圆的半径是 r,在 Rt$\triangle AOC$ 中,由垂径定理及勾股定理,得

$$10^2+(r-4)^2=r^2$$

$$r=14.5, b=-10.5$$

这个圆的方程是

$$x^2+(y+10.5)^2=14.5^2$$

而后的解答同教科书.

例3 过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作该圆的两条切线,切点分别

是 A,B,求证:直线 AB 的方程是 $x_0x+y_0y=r^2$.

证明 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为直线 PA 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 过圆上一点 $A(x_1,y_1)$ 的切线,所以由教科书第 83 页例 2 的结论知直线 PA 的方程是 $x_1x+y_1y=r^2$,又点 $P(x_0,y_0)$ 在此直线上,得 $x_0x_1+y_0y_1=r^2$,即点 $A(x_1,y_1)$ 在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上;同理,点 $B(x_2,y_2)$ 也在直线 $x_0x+y_0y=r^2$ 上.

由"两点确定一条直线"立知直线 AB 的方程是 $x_0x+y_0y=r^2$.

注 直线 AB 也是圆 $x^2+y^2=r^2$(其圆心为坐标原点 O)与以 OP 为直径的公共弦所在的直线(图 2),把这两个圆的方程相减也可求出直线 AB 的方程,但相减的原理还是"两点确定一条直线".

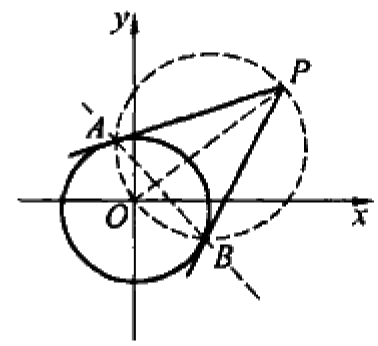


图 2

例 4 (由教科书第 97 页第 1 题改编) 设 $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(6,13)$,求 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线所在的直线方程.

解 如图 3,在 $\triangle ABC$ 中,与向量 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 方向相同的单位向量分别是 $\overrightarrow{AB_1}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$,$\overrightarrow{AC_1}=\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$.

设 $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)=\left(\frac{64}{65},\frac{112}{65}\right)$,得 $\overrightarrow{AD}\parallel\left(1,\frac{7}{4}\right)$.

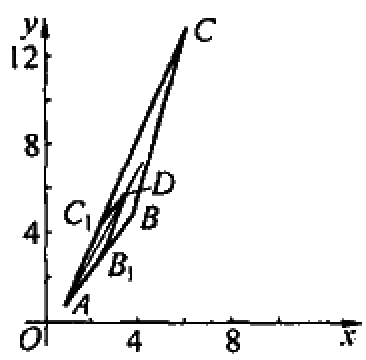


图 3

因为 $|\overrightarrow{AB_1}|=|\overrightarrow{AC_1}|=1$,所以 $\square AB_1DC_1$ 是菱形,直线 AD 就是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线所在的直线,由 $\overrightarrow{AD}\parallel\left(1,\frac{7}{4}\right)$ 知,直线 AD 的斜率是 $k=\frac{7}{4}$,所以所求直线的方程是

$$y-1=\frac{7}{4}(x-1)$$

$$7x-4y-3=0$$

例 5 已知 F_1 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦点,P 是该椭圆上的动点,点 A 的坐标是 $(1,1)$,求 $|PF_1|+|PA|$ 的取值范围.

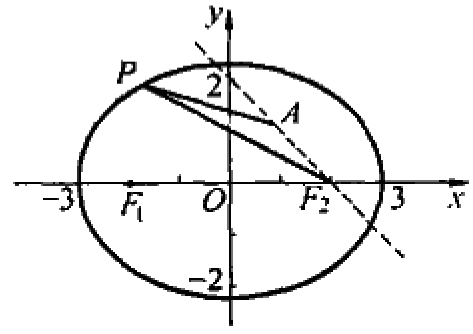


图 4

解 如图 4,由椭圆的第一定义(设 F_2 是该椭圆的右焦点),得

$$|PF_1|+|PA|=|PA|+6-|PF_2|=6+|PA|-|PF_2|$$

而 $||PA|-|PF_2|| \leqslant |AF_2| = \sqrt{2}$(三角形两边之差的绝对值小于第三边),所以 $|PF_1|+|PA|$ 的取值范围是 $[6-\sqrt{2}, 6+\sqrt{2}]$.(当 P,F_1,A 共线时可取到两个端点的值)

例6　在平面直角坐标系中,y 轴的正半轴上有两定点 $A(0,a),B(0,b)$,试在 x 轴的正半轴上求一点 C,使 $\angle ACB$ 取得最大值.

解　如图5,过点 A,B 作一个圆与 x 轴相切,切点 C 即为所求的最大值点(用平面几何中圆的知识极易获证,在足球场上的两句顺口溜:"冲向球门跑,越近就越好;斜着球门跑,射点要选好."就是这个意思).由切割线定理知,$OC^2 = OB \cdot OA = ab$,则点 C 的坐标为 $(\sqrt{ab}, 0)$.

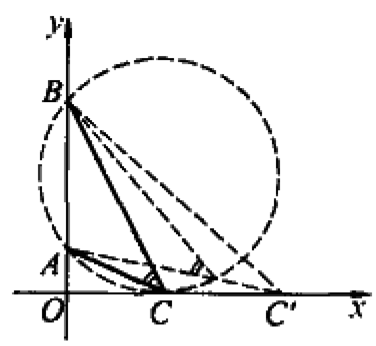


图5

注　用此法解决2005天津20题,2005浙江理17(文19),2004全国高中数学联赛第11题都很容易.

例7　已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上满足 $\angle F_1PF_2=\theta$ 的点(其中 F_1,F_2 是椭圆的左、右焦点),若存在点 P 使 $\angle F_1PF_2=90°$,求该椭圆离心率的取值范围.

解　如图6,题意即以 F_1F_2 为直径的圆与该椭圆有公共点,也即

$$c > b, c^2 > b^2 = a^2 - c^2$$

$$e = \frac{c}{a} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以该椭圆离心率的取值范围 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

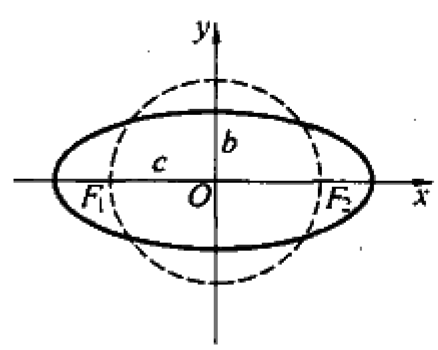


图6

例8　(2008全国理Ⅰ第10题)若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 通过点 $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$,则(　　).

A. $a^2+b^2 \leqslant 1$　　B. $a^2+b^2 \geqslant 1$　　C. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \leqslant 1$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geqslant 1$

解　当 α 变化时,点 M 的轨迹是单位圆 $x^2+y^2=1$,题意就是直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即 $bx+ay-ab=0$ 与单位圆有公共点,所以由直线与圆的位置关系,得圆心(即坐标原点)到直线 $bx+ay-ab=0$ 的距离不大于半径:$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1$,

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$.

选 D.

例 9 求证：椭圆的准线与长轴所在直线的交点与这条准线对应的焦点的弦两端所成的角被长轴所在的直线平分.

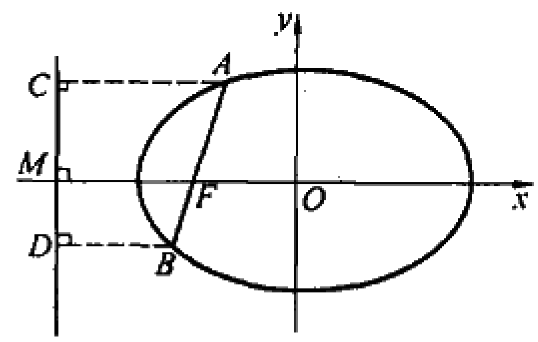


图 7

证明 如图 7，设椭圆的一条准线是 l，对应的焦点是 F，l 与长轴的交点是 M，过点 F 的焦点弦是 AB，过 A,B 分别作 l 的垂线，垂足分别为 C,D，由椭圆的第二定义及三角形相似的知识，得

$$\frac{|AF|}{|AC|}=\frac{|BF|}{|BD|}=e$$

所以

$$\frac{|AC|}{|BD|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|CM|}{|DM|}$$

$$\text{Rt}\triangle ACM\backsim\text{Rt}\triangle BDM$$

$$\angle AMC=\angle BMD,\angle AMF=\angle BMF$$

即长轴平分 $\angle AMB$.

例 10 （教科书第 137 页第 6 题）过抛物线焦点的一条直线与它交于两点 P,Q，经过点 P 和抛物线顶点的直线交准线于点 M，求证：直线 MQ 平行于抛物线的对称轴.

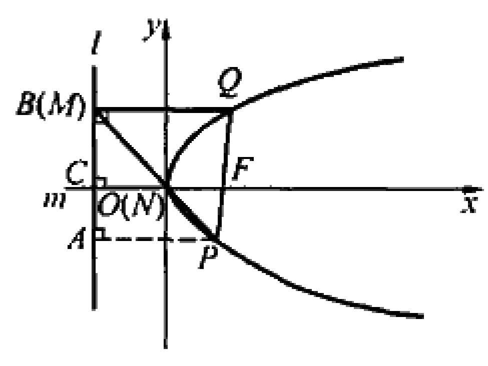


图 8

证明 如图 8，设抛物线的顶点是坐标原点 O，焦点是 F，准线是 l，过 P,Q 分别作 l 的垂线，垂足分别为 A,B，准线 l 与抛物线的对称轴 m 的交点是 C，本题即证 B,O,P 共线. 又设直线 BP 与 m 交于点 N，本题即证 O,N 重合，也即证 $|CN|=|NF|$. 证明如下：

由抛物线的定义及成比例线段的知识，得

$$\frac{|CN|}{|PF|}=\frac{|CN|}{|AP|}=\frac{|BC|}{|BA|}=\frac{|QF|}{|QP|}=\frac{|QB|}{|QP|}=\frac{|NF|}{|PF|}$$

即

$$|CN|=|NF|$$

注 运用教科书第 133 页第 7 题的结论“对称轴是 x 轴的抛物线的焦点弦两个端点纵坐标之积是常数”也可给出本题的简证.

例 11 点 M 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的任意一点，两个焦点分

别为 F_1,F_2,I 是 $\triangle MF_1F_2$ 的内心,延长 MI 交 F_1F_2 于点 N,若 $\frac{|MI|}{|NI|}=2$,求该椭圆的离心率 e.

解 如图9,由 I 是 $\triangle MF_1F_2$ 的内心及三角形的内角平分线性质,得

$$\frac{|MI|}{|NI|}=2=\frac{|MF_1|}{|NF_1|}=\frac{|MF_2|}{|NF_2|}$$

再由等比性质,得

$$e=\frac{|NF_1|+|NF_2|}{|MF_1|+|MF_2|}=\frac{1}{2}$$

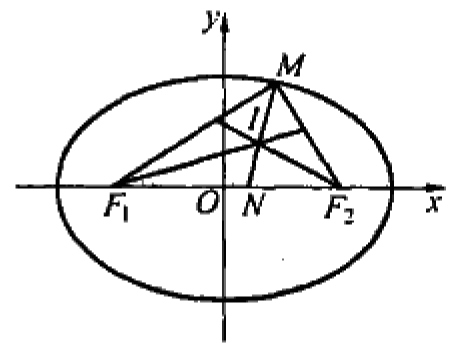


图 9

例 12 已知动抛物线经过点 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,原点到其准线的距离恒为 2,求抛物线焦点的轨迹方程.

解 如图 10,设该抛物线的焦点为 F,由于原点到其准线的距离恒为 2,所以抛物线的准线是以原点为圆心,2 为半径的圆的切线 l.设切点为 M,过 A,B 分别作 l 的垂线,垂足分别为 C,D,由梯形中位线的性质,得

$$|FA|+|FB|=|AC|+|BD|=2|OM|=4>|AB|=2$$

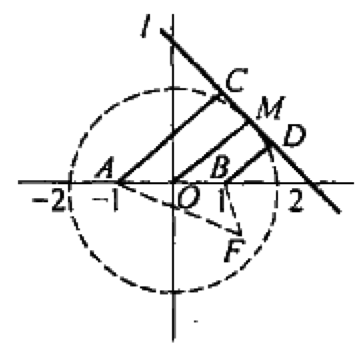


图 10

所以点 F 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆,其方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$.

也谈“由圆生成圆锥曲线”

文献[1]给出了由圆生成圆锥曲线的妙法,但文献[1]的定理及其证明均欠严谨.完整的结论应当是:

定理 设 $A(a,0),B(b,0)(b\neq 0,a)$ 是两个定点,P 是定圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上的动点,P 在 y 轴上的射影是 Q,$M(x,y)$ 是直线 AP 与 BQ 的公共点,则

(1) 当 $|a|<r$ 时,M 的轨迹方程为 $[(a-b)^2-r^2]x^2+2br^2x+b^2y^2-b^2r^2=0$ 及 $y=0$,也即

① 当 $|a-b|=r$ 时,M 的轨迹方程为抛物线 $y^2=-\frac{2r^2}{b}(x-\frac{b}{2})$ 及直线 $y=0$;

② 当 $|a-b|>r$ 且 $b\neq\frac{a^2-r^2}{2a}$ 时,M 的轨迹方程为椭圆 $\frac{[x+\frac{br^2}{(a-b)^2-r^2}]^2}{[\frac{b(a-b)r}{(a-b)^2-r^2}]^2}+\frac{y^2}{\frac{(a-b)^2r^2}{(a-b)^2-r^2}}=1$ 及直线 $y=0$;当 $b=\frac{a^2-r^2}{2a}$ 时(此时必有 $|a-b|>r$),M 的轨迹方程为圆 $(x+\frac{r^2}{b})^2+y^2=r^2(\frac{a}{b}-1)^2$ 及直线 $y=0$;

③ 当 $|a-b|<r$ 时,M 的轨迹方程为双曲线 $\frac{[x+\frac{br^2}{(a-b)^2-r^2}]^2}{[\frac{b(a-b)r}{(a-b)^2-r^2}]^2}-\frac{y^2}{\frac{(a-b)^2r^2}{r^2-(a-b)^2}}=1$ 及直线 $y=0$.

(2) 当 $|a|\geqslant r$ 时,M 的轨迹方程为 $[(a-b)^2-r^2]x^2+2br^2x+b^2y^2-b^2r^2=0(x\neq a)$ 及直线 $y=0$,也即

① 当 $|a-b|=r$ 时,M 的轨迹方程为抛物线 $y^2=-\frac{2r^2}{b}(x-\frac{b}{2})$ 及直线 $y=0$;

② 当 $|a-b|>r$ 时,M 的轨迹方程为 $\dfrac{\left[x+\dfrac{br^2}{(a-b)^2-r^2}\right]^2}{\left[\dfrac{b(a-b)r}{(a-b)^2-r^2}\right]^2}+\dfrac{y^2}{\dfrac{(a-b)^2r^2}{(a-b)^2-r^2}}=1(x\neq a)$ 及直线 $y=0$;

③ 当 $|a-b|<r$ 时,M 的轨迹方程为 $\dfrac{\left[x+\dfrac{br^2}{(a-b)^2-r^2}\right]^2}{\left[\dfrac{b(a-b)r}{(a-b)^2-r^2}\right]^2}-\dfrac{y^2}{\dfrac{(a-b)^2r^2}{r^2-(a-b)^2}}=1(x\neq a)$ 及直线 $y=0$.

证明 (1) 结合图 1 并由各点的坐标,得

直线 AP 的方程:当 $x_0=a$ 时为 $x=a$;当 $x_0\neq a$ 时为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-a}(x-a)$.

直线 BQ 的方程:$y=-\dfrac{y_0}{b}(x-b)$.

当 $x_0=a$ 时,$y_0=\pm\sqrt{r^2-a^2}$,得 $M\left(a,\pm\dfrac{b-a}{b}\sqrt{r^2-a^2}\right)$;

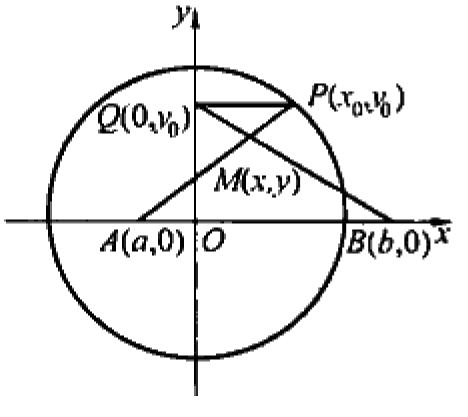


图 1

当 $x_0\neq a$ 时,因为 $M(x,y)$ 是 AP 与 BQ 的公共点,所以 $x\neq b$(若 $x=b$,由 $M\in BQ$ 得 $M(b,0)$,$P(\pm r,0)$,$Q(0,0)$,此时直线 AP 与 BQ 的公共点 M 有无数个,这与 $M(b,0)$ 矛盾),由 $M\in BQ$,得 $y_0=\dfrac{by}{b-x}$,将其代入 AP 的方程,得

$$yx_0=y\cdot\frac{x(a-b)}{x-b}$$

$$y=0,\text{或 } x_0=\frac{x(a-b)}{x-b}$$

可证 $x_0\neq a\Leftrightarrow x\neq a$.

把 $x_0=\dfrac{x(a-b)}{x-b}$,$y_0=\dfrac{by}{b-x}$ 代入 $x_0^2+y_0^2=r^2$,得

$$[(a-b)^2-r^2]x^2+2br^2x+b^2y^2-b^2r^2=0(x\neq a)$$

而此时 $x\neq a\Leftrightarrow(x,y)\neq\left(a,\pm\dfrac{b-a}{b}\sqrt{r^2-a^2}\right)$.

从而可得结论(1)成立.

(2) 证法同(1),过程略有不同.

由 $|a| \geqslant r$,可证 $x_0 \neq a$.

当 $|a| > r$ 时显然成立.当 $|a| = r$ 时,若 $x_0 = a$,得 A,P 重合,这与"直线 AP" 矛盾!说明也有 $x_0 \neq a$.

所以,当 $|a| \geqslant r$ 时,M 的轨迹方程为 $[(a-b)^2 - r^2]x^2 + 2br^2x + b^2y^2 - b^2r^2 = 0(x \neq a)$ 及直线 $y = 0$.

参考文献

[1] 姜坤崇.由圆生成圆锥曲线[J].数学通报,2004(3):39.

圆或椭圆的切线的求法

定理 直线 $Ax+By+C=0$ 与圆或椭圆 $mx^2+ny^2+p=0(mn>0)$ 相切 $\Leftrightarrow \frac{A^2}{m}+\frac{B^2}{n}+\frac{C^2}{p}=0$.

证明 直线与圆或椭圆相切 $\Leftrightarrow$ 它们有唯一公共点.

当 $B\neq 0$ 时,直线 $Ax+By+C=0$ 即 $y=-(\frac{A}{B}x+\frac{C}{B})$,所以此时

直线 $Ax+By+C=0$ 与圆或椭圆 $mx^2+ny^2+p=0$ 相切 $\Leftrightarrow$ 关于 x 的方程 $mx^2+n(\frac{A}{B}x+\frac{C}{B})^2+p=0$ 即 $(nA^2+mB^2)x^2+2nACx+(pB^2+nC^2)=0$ 有两个相等的实数根 $\Leftrightarrow \frac{A^2}{m}+\frac{B^2}{n}+\frac{C^2}{p}=0$(因为可证 $nA^2+mB^2\neq 0$)

当 $B=0$ 时(一定有 $A\neq 0$),直线 $Ax+By+C=0$ 即 $x=-\frac{C}{A}$,它与圆或椭圆 $mx^2+ny^2+p=0$ 相切 $\Leftrightarrow$ 关于 y 的方程 $m(-\frac{C}{A})^2+ny^2+p=0$ 有两个相等的实数根 $y=0 \Leftrightarrow mC^2+pA^2=0 \Leftrightarrow \frac{A^2}{m}+\frac{C^2}{p}=0$(因为由题设知 $p\neq 0$)$\Leftrightarrow$ $\frac{A^2}{m}+\frac{B^2}{n}+\frac{C^2}{p}=0$(因为 $B=0$)

推论 直线 $Ax+By+C=0$ 与圆或椭圆 $m(x-a)^2+n(y-b)^2+p=0(mn>0)$ 相切 $\Leftrightarrow \frac{A^2}{m}+\frac{B^2}{n}+\frac{(Aa+Bb+C)^2}{p}=0$.

运用上述结论求圆或椭圆的切线将极为方便.

例 (原高级中学课本《解析几何(必修)》第110页习题第8题)从圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 外一点 $P(2,3)$ 向该圆引切线,求切线的方程.

解 当所求切线的斜率存在时,可设切线的方程是

$$y-3=k(x-2)$$

即

$$kx-y+(3-2k)=0$$

由推论,得

$$\frac{k^2}{1}+\frac{(-1)^2}{1}+\frac{[k\times 1-1\times 1+(3-2k)]^2}{-1}=0$$

解得

$$k=\frac{3}{4}$$

此时所求的切线方程为

$$3x-4y+6=0$$

因为从圆外一点可作此圆的两条切线，所以还有一条切线的斜率必不存在，又经过点 P，所以此时的切线为 $x=2$.

所以所求的切线为

$$3x-4y+6=0 \text{ 及 } x=2$$

一道题的一般情形及其简洁解法

很多资料上都有这样一道题:

$\triangle ABC$ 的两个顶点 A,B 的坐标分别是 $(-a,0),(a,0)(a>0)$,直线 AC,BC 的斜率之积等于 k.

① 若 $k=-1$,则 $\triangle ABC$ 是直角三角形;

② 若 $k=1$,则 $\triangle ABC$ 是直角三角形;

③ 若 $k=-2$,则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形;

④ 若 $k=2$,则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

以上四个命题中正确的序号是________.

解 ① 显然成立;①、② 对照知 ② 不成立.

设 $C(x,y)$:

当 $k=-2$ 时,$\frac{y}{x+a}\cdot\frac{y}{x-a}=-2$,$\frac{y^2}{2a^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$,点 C 在此椭圆上,易知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形;

当 $k=2$ 时,$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2a^2}=1$,点 C 在此双曲线上,$\angle A$ 或 $\angle B$ 可以是钝角.

填 ①③.

以上解答繁杂且不严密.本文得到:

结论 设 $\triangle ABC$ 的两个顶点 $A(-a,0)$,$B(a,0)(a>0)$,$k_{AC}\cdot k_{BC}=k(k\neq 0)$,则

(1) 当 $k<-1$ 时,$\triangle ABC$ 是锐角三角形;

(2) 当 $k=-1$ 时,$\triangle ABC$ 是直角三角形,且 C 是直角;

(3) 当 $k>-1$ 且 $k\neq 0$ 时,$\triangle ABC$ 是钝角三角形,且 $k>0$ 时 A 或 B 是钝角,$-1<k<0$ 时 C 是钝角.

证明 可得

$$k=\tan A\tan(\pi-B)$$

$$\tan A\tan B=-k \quad ①$$

$$\tan C=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1} \quad ②$$

(1) 由 ① 知 A,B 都是锐角,由 ② 知 C 也是锐角,所以 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

(2) 显然成立.

(3) 由 ①② 知成立.

三条直线围成的三角形面积公式

我们知道，若 $\triangle P_1P_2P_3$ 的三个顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$，则 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

并且还可以证明，三点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

怎样求三条直线

$$l_i: A_ix+B_iy+C_i=0(i=1,2,3)(\text{其中每两条不平行}) \qquad ①$$

围成的三角形面积呢？

当然可以先求出每两条直线相交得到的共三个交点的坐标，再由上述结论求得以这三个交点为顶点的三角形面积（用上述结论解决），即三条直线 $l_i(i=1,2,3)$ 围成的三角形面积．但是，我们还会问：关于此，有没有简洁直接的公式呢？请看下文．

本文记 $\delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$，$a_i,b_i,c_i$ 分别是行列式 δ 中的 $A_i,B_i,C_i(i=1,2,3)$ 的代数余子式，可以证得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\delta^2 \qquad ②$$

（见张禾瑞，郝钢新编《高等代数》（1980年人民教育出版社）第169～170页习题第6题）

定理1 ① 中的三条直线围成的三角形面积为 $\frac{\delta^2}{2|c_1c_2c_3|}$（各字母的意义见②）．

证明 因为 l_1,l_2,l_3 中每两条直线都不平行,所以 $c_1c_2c_3\neq 0$.

设 $l_2\cap l_3=P_1,l_3\cap l_1=P_2,l_1\cap l_2=P_3$,可求得它们的坐标分别为 $P_i(\frac{a_i}{c_i},\frac{b_i}{c_i})(i=1,2,3)$.

所以 ① 中的三条直线围成的三角形面积为

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_1} & 1\\ \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_2} & 1\\ \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_3} & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}=\left|\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{2c_1c_2c_3}\right|=\frac{\delta^2}{2|c_1c_2c_3|}$$

还可以证明:

定理 2 ① 中的三条直线共点 $\Leftrightarrow\delta=0$.

从定理1,2的结论来看,它们是有联系的:可以把点看成是面积为0的三角形.

对2005年高考湖北卷文科、理科压轴题的研究

2005年高考湖北卷文科压轴题(也即理科倒数第2题)是:

设 A,B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点,点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点,线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C,D 两点.

(Ⅰ)确定 λ 的取值范围,并求直线 AB 的方程;

(Ⅱ)试判断是否存在这样的 λ,使得 A,B,C,D 四点在同一个圆上?并说明理由.

同试卷给出的参考答案的解法2可解答第(Ⅱ)问:容易用差分法求出直线 AB 的方程为 $x+y-4=0$.

由 $N(1,3)$ 在椭圆内,得 $3\times1^2+3^2<\lambda$,即 $\lambda>12$.且椭圆内的点都可作为椭圆的弦的中点,所以 λ 的取值范围是 $(12,+\infty)$.

第(Ⅱ)问的巧解 (Ⅰ)的解答中已求出直线 AB 的方程为 $x+y-4=0$,而 CD 是过点 $N(1,3)$ 的 AB 的垂线,所以直线 CD 的方程为 $x-y+2=0$.

所以直线 AB,CD 组成的曲线方程为

$$(x+y-4)(x-y+2)=0$$

即

$$x^2-y^2-2x+6y-8=0$$

它与椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 的交点 A,B,C,D 即方程组

$$\begin{cases}x^2-y^2-2x+6y-8=0\\3x^2+y^2=\lambda\end{cases}$$

的解,此方程组也即

$$\begin{cases}4x^2=2x-6y+8+\lambda\\4y^2=-6x+18y-24+\lambda\end{cases} \quad ①$$

由①可得

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{\lambda-3}{2} \quad ②$$

再结合(Ⅰ)的答案知,当 $\lambda>12$ 时,A,B,C,D 四点总在圆②上.

下面对本题再作些研究:题中的 A,B,C,D 四点还能在椭圆,双曲线上吗(圆可以看成是离心率 $e=0$ 的椭圆)?

由①还可得

$$4x^2+4py^2=(2-6p)x+(18p-6)y+8-24p+\lambda(p+1)$$

$$(x+\frac{3p-1}{4})^2+p(y-\frac{9p-3}{4p})^2=\frac{p+1}{4}[\frac{3(p-3)(3p-1)}{4p}+\lambda]$$

本文令

$$u=\frac{p+1}{4}[\frac{3(p-3)(3p-1)}{4p}+\lambda](p\neq 0,\lambda>12) \quad ③$$

对于 u,有以下结论:

结论 1 当 $p>0$ 时,$u>0$.

(因为 $\lambda>12$,所以只需证$\frac{3(p-3)(3p-1)}{4p}+12>0$,即$(p+1)^2>0$.)

结论 2 当 $p<0$ 时:$u=0\Leftrightarrow p=-1$ 或$\frac{1}{9}(15-2\lambda\pm 2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$,且有$\frac{1}{9}(15-2\lambda-2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})<-1<\frac{1}{9}(15-2\lambda+2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})<0$;

$u>0\Leftrightarrow p<\frac{1}{9}(15-2\lambda-2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$ 或 $-1<p<\frac{1}{9}(15-2\lambda+2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$;

$u<0\Leftrightarrow \frac{1}{9}(15-2\lambda-2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})<p<-1$ 或$\frac{1}{9}(15-2\lambda+2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})<p<0$.

得点 A,B,C,D 在以下二次曲线上

$$(x+\frac{3p-1}{4})^2+p(y-\frac{9p-3}{4p})^2=u(p\neq 0) \quad ④$$

(1) 令 $p=1$,得 A,B,C,D 四点在圆 ② 上.

(2) 当 $0<p<1$ 时,④ 表示长轴所在的直线是 $x=\frac{1-3p}{4}$,离心率 $e=\sqrt{1-p}$ 的椭圆;

当 $p>1$ 时,④ 表示长轴所在的直线是 $y=\frac{9p-3}{4p}$,离心率 $e=\sqrt{1-\frac{1}{p}}$ 的椭圆.

注意到$\sqrt{1-p}(0<p<1)$,$\sqrt{1-\frac{1}{p}}(p>1)$ 均可表示(0,1) 中的任意数,所以 A,B,C,D 四点可以在长轴与 x 轴平行的任意形状(椭圆,双曲线的形状均由离心率 e 确定)的椭圆上,也可以在长轴与 y 轴平行的任意形状的椭圆上.

(3) 当 $p<\frac{1}{9}(15-2\lambda-2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$ 或 $-1<p<\frac{1}{9}(15-2\lambda+2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$ 时,$u>0$,④ 表示实轴所在的直线是 $y=\frac{9p-3}{4p}$,离心率

$e=\sqrt{1-\frac{1}{p}}$ 的双曲线,此时 $1<e^2<\frac{1}{9}(2\lambda-6-2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$ 或 $2<e^2<\frac{1}{9}(2\lambda-6+2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$;

当 $\frac{1}{9}(15-2\lambda-2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})<p<-1$ 或 $\frac{1}{9}(15-2\lambda+2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})<p<0$ 时,$u<0$,④表示实轴所在的直线是 $x=\frac{1-3p}{4}$,离心率 $e=\sqrt{1-p}$ 的双曲线,此时 $1<e^2<\frac{1}{9}(2\lambda-6-2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$ 或 $2<e^2<\frac{1}{9}(2\lambda-6+2\sqrt{\lambda^2-15\lambda+36})$.

由(3)知,A,B,C,D 四点不能在任意形状的双曲线上.

关于这道高考题的来源及更深刻的结论,读者还可阅读笔者发表于《数学通讯》2005 年第 22 期的文章《对一道高考题的研究》.

2005 年高考湖北卷理科压轴题是:

已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$,其中 n 为大于 2 的整数,$[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数.设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正,且满足 $a_1=b(b>0)$,$a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$,$n=2,3,4,\cdots$

(Ⅰ)证明:$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$,$n=3,4,5,\cdots$;

(Ⅱ)猜测数列 $\{a_n\}$ 是否有极限?如果有,写出极限的值(不必证明);

(Ⅲ)试确定一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对于任意的 $b>0$,都有 $a_n<\frac{1}{5}$.

这里给出同参考答案不同的解法:

(Ⅰ)(分析法)欲证结论成立,只需证 $\frac{1}{a_n}>\frac{2+b[\log_2 n]}{2b}$,即

$$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{1}{2}[\log_2 n](n\geqslant 3).$$

由题设 $0<a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$,得

$$\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}$$

即

$$\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$$

反复用此式,得

$$\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{a_{n-1}} \geqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{a_{n-2}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{a_1}$$

再由题设,立得

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{b} + \frac{1}{2}[\log_2 n](n \geqslant 3) \qquad ⑤$$

所以结论(Ⅰ)成立.

(Ⅱ)由⑤得,当 $n \to +\infty$ 时,$\frac{1}{a_n} \to +\infty$,即 $a_n \to 0$,也即数列$\{a_n\}$有极限,且极限为0.

(Ⅲ)$0 < a_n < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} > 5$.

若$[\log_2 n] \geqslant 10$即 $n \geqslant 2^{10} = 1\ 024$时,由⑤知$\frac{1}{a_n} > 5$对于任意的 $b > 0$都成立.

所求的一个 $N = 1\ 024$.

此题显然是以高等数学中的调和级数为背景的,出题者为了降低这道压轴题的难度而给出了题目开头的那个已知不等式.下面证之:

全体正整数集可分割成$[2^0,2^1) \cup [2^1,2^2) \cup \cdots \cup [2^k,2^{k+1}) \cup \cdots$,所以,对于任意的正整数 n,总存在自然数 k,使 $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$,得 $k \leqslant \log_2 n < k+1$,即$[\log_2 n] = k$.当 $n \geqslant 3$ 时,有

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} =$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots +$$

$$\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) >$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \times 2 + \frac{1}{2^3} \times 2^2 + \cdots + \frac{1}{2^k} \times 2^{k-1} =$$

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}[\log_2 n]$$

“圆锥曲线的又一性质”的补充

文献[1]给出了圆锥曲线(即椭圆、双曲线和抛物线的统称)的一条美妙性质,即文献[1]的定理.还可把这条定理补充为:

定理1 自圆锥曲线的准线与对称轴的交点引这条圆锥曲线的切线,则切线斜率的平方等于这条圆锥曲线离心率的平方,且切点与这条准线对应的焦点的连线垂直于圆锥曲线的一条对称轴(即椭圆的长轴、双曲线的实轴或抛物线唯一的对称轴所在的直线).

实际上,定理1中补充的内容(即“且…”)是以下定理2的特例.

定理2 自圆锥曲线 Γ 的准线 l_1(l_1 对应的焦点是 F_1)上任一点 M 作 Γ 的切线 MA(A 是切点),则 $MF_1 \perp AF_1$.

证明 以下只证 Γ 是椭圆的情形(其他情形的证明安全类似).

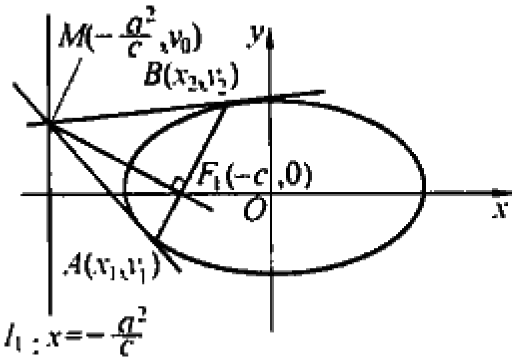


图1

如图1,设切线 MA 的斜率是 k,椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,a^2=b^2+c^2)$,得直线 MA 的方程是:$y-y_0=k(x+\frac{a^2}{c})$,所以方程组

$$\begin{cases} y = kx + \frac{ka^2}{c} + y_0 & ① \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & ② \end{cases}$$

有唯一一组解,得关于 x 的方程

$$c^2(k^2a^2+b^2)x^2+2ka^2c(ka^2+cy_0)x-a^2[b^2c^2-(ka^2+cy_0)^2]=0 \quad ③$$

有两个相等的实根,所以

$$\Delta = 4a^2b^2c^2[c^2(k^2a^2+b^2)-(ka^2+cy_0)^2]=0$$

$$a^2b^2k^2+2ac^2y_0k-c^2(b^2-y_0^2)=0 \quad ④$$

由③④①,可得

$$x_1=-\frac{ka^2(ka^2+cy_0)}{c(k^2a^2+b^2)},y_1=kx_1+\frac{ka^2}{c}+y_0$$

$k_{MF_1}=-\frac{cy_0}{b^2},k_{AF_1}=\frac{y_1}{x_1+c}$,所以

$MF_1\perp AF_1\Leftrightarrow k_{MF_1}\cdot k_{AF_1}=-1\Leftrightarrow cy_0(kx_1+\frac{ka^2}{c}+y_0)=b^2(x_1+c)\overset{⑤}{\Leftrightarrow}$
$\frac{ka^2(b^2-cy_0k)(ka^2+cy_0)}{k^2a^2+b^2}=c^2(b^2-y_0^2)-ka^2cy_0\Leftrightarrow(b^2-cy_0k)(ka^2+cy_0)=$
$(k^2a^2+b^2)(b^2k+cy_0)\Leftrightarrow$ 式④成立

即要证结论成立.

由定理2及图1,还可得

推论1 自圆锥曲线Γ的准线l_1(l_1对应的焦点是F_1)上任一点M作Γ的两条切线MA,MB(A,B是切点),则$MF_1\perp AB$且F_1在直线AB上.

定理3 设M是圆锥曲线Γ的准线l上任一点,F_1是l_1对应的焦点,若$MF_1\perp AF_1(A\in\Gamma)$,则$MA$是$\Gamma$的切线.

推论2 设圆锥曲线Γ的准线l_1对应的焦点是$F_1,M\in l_1,A,B\in\Gamma$,$F_1\in AB$,若$MF_1\perp AB$,是$MA,MB$均是$\Gamma$的切线.

由推论1,2还可提出这样的问题:

自圆锥曲线Γ的焦点F_1(F_1对应的准线是l_1)作弦AB,又过A,B作Γ的切线交于M,则一定有$M\in l_1$吗?一定有$MF_1\perp AB$吗?可以验证它们均不能普遍成立.

参考文献

[1] 颜学华.圆锥曲线的又一性质[J].数学通讯,2004(11):14.
[2] 方宏伟,史文波.圆锥曲线的又一特性[J].中学数学教学,2003(3):22.
[3] 邱昌银.圆锥曲线的准线切线焦点弦的相关性[J].数学通报,2003(11):32-33.

直线分有向线段所成的比及其应用

定义 如图1,设点 P_2 不在直线 l 上,P_1P_2 不平行于 l,直线 l 与直线P_1P_2 交于点 P,则点 P 分有向线段$\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ 也叫做直线 l 分$\overline{P_1P_2}$ 所成的比.

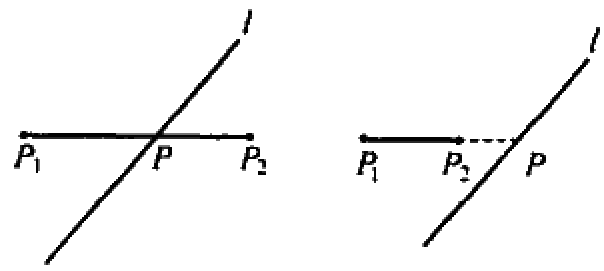


图 1

从定义可得:当 P_1,P_2 在 l 的异侧时,l 分$\overline{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda>0$;当 P_1,P_2 在 l 的同侧且 P_1P_2 不平行于 l 时,$\lambda<0$;当 P_1 在 l 上时,$\lambda=0$. λ 的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

定理 1 设 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,$l:Ax+By+C=0$,点 P_2 不在 l 上,$P_1P_2\neq l$,则 l 分$\overline{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda=-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

分析 可以求出直线 P_1P_2 与 l 的交点 P 的坐标(x_0,y_0),则

$$\lambda=\frac{x_1-x_0}{x_0-x_2}$$

按此思路证明是可行的,但计算量大,以下方法更简洁.

证明 如图2,过点 P_1,P_2 分别作 l 的平行线

$$l_1:A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

$$l_2:A(x-x_2)+B(y-y_2)=0$$

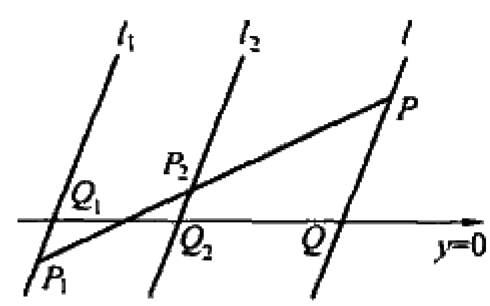


图 2

(1) 当 $A\neq 0$时,l,l_1,l_2均与直线 $y=0$相交,得交点依次是 $Q_1(\frac{Ax_1+By_1}{A},0)$,$Q_2(\frac{Ax_2+By_2}{A},0)$,$Q(-\frac{C}{A},0)$,所以

$$\lambda=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{\overline{Q_1Q}}{\overline{QQ_2}}=\frac{-\dfrac{C}{A}-\dfrac{Ax_1+By_1}{A}}{\dfrac{Ax_2+By_2}{A}+\dfrac{C}{A}}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

(2) 当 $A=0$时,得 $B\neq 0$,此时,得

$$l:y=-\frac{C}{B},l_1:y=y_1,l_2:y=y_2$$

$$\lambda=\frac{-\frac{C}{B}-y_1}{y_2+\frac{C}{B}}=-\frac{By_1+C}{By_2+C}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

总之,定理 1 成立.

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2006 年人民教育出版社)第 64 页对二元一次不等式表示的平面区域作了以下阐述:

"由于对在直线 $Ax+By+C=0$ 同一侧的所有点(x,y),把它的坐标(x,y)代入 $Ax+By+C$,所得到实数的符号相同,所以只需在此直线的某一侧取一个特殊点(x_0,y_0),从 Ax_0+By_0+C 的正负即可判断 $Ax+By+C>0$ 表示直线哪一侧的平面区域.特殊地,当 $C\neq 0$ 时,常把原点作为此特殊点."

对此,有的文章(比如文献[1])把它概括为:同侧同号,异侧异号.

教科书中没有给出以上结论的证明,文献[1]已给出了它的一种巧妙证明,即证:

定理 2 已知直线 $l:Ax+By+C=0$,点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$.

(1) 若 P_1,P_2 在 l 的异侧,则 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 异号;

(2) 若 P_1,P_2 在 l 的同侧,则 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 同号.

证明 (1) 连结 P_1P_2 交 l 于点 P,设 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ,则 $\lambda>0$.得点 P 的坐标为$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

因为点 P 在 l 上,所以

$$A\cdot\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\cdot\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C=0$$

$$(Ax_1+By_1+C)+\lambda(Ax_2+By_2+C)=0$$

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

因为 $\lambda>0$,所以 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 异号.

(2) 设 $P_3(x_3,y_3)$ 是与 P_1,P_2 异侧的点.

由(1)得 Ax_1+By_1+C,Ax_2+By_2+C 均与 Ax_3+By_3+C 异号,所以 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 同号.

下面再运用定理 1 给出定理 2 的另一种证明:

(1) 因为此时 l 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}>0$,所以 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 异号.

(2) 同第一种证明也可简洁得出，也可用以下方法证明.

当 P_1P_2 不平行于 l 时，得 l 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} < 0$，所以 $Ax_1 + By_1 + C$ 与 $Ax_2 + By_2 + C$ 同号.

当 $P_1P_2 \parallel l$ 时，可证 $Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C$.

又当 $B = 0$ 时，得 $x_1 = x_2$，此时有 $Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C$；

又当 $B \neq 0$ 时，有 $x_1 \neq x_2$，得 $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\dfrac{A}{B}$，所以 $Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C$.

参考文献

[1] 王增良."同侧"同号,"异侧"异号及其拓广应用[J].数学通报,2002(2):25-26.

用“三角形的两边之差小于第三边”求最值

可把性质“三角形的两边之差小于第三边”推广为：

$||AB|-|AC|| \leqslant |BC|$（当且仅当 A,B,C 三点共线时取等号）

本文用此推广简洁的解一些最值问题.

例 1　已知椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，$F_1,F_2$ 为其左右焦点，P 为椭圆上一点，点 $A(1,1)$，则 $|PF_1|+|PA|$ 的最大值为________，最小值为________.

解　如图 1，$|PF_1|+|PA|=2a+|PA|-|PF_2|$，又 $||PA|-|PE_2|| \leqslant |AF_2|$，所以

$$-|AF_2| \leqslant |PA|-|PF_2| \leqslant |AF_2|$$

$$2a-|AF_2| \leqslant 2a+|PA|-|PF_2| \leqslant 2a+|AF_2|$$

即 $2\sqrt{3}-1 \leqslant |PF_1|+|PA| \leqslant 2\sqrt{3}+1$（当且仅当 P 为直线 AF_2 与椭圆的交点时取等号）

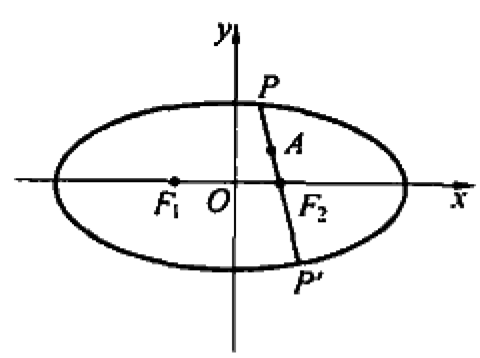


图 1

所以，填“$2\sqrt{3}+1$”，“$2\sqrt{3}-1$”.

例 2　求函数 $f(a,b)=(a-b)^2+(\sqrt{2-a^2}-\frac{9}{b})^2$ 的最小值.

解　因为 $P(a,\sqrt{2-a^2})$ 是半圆 $x^2+y^2=2(y \geqslant 0)$ 上的点，$Q(b,\frac{9}{b})$ 是双曲线 $xy=9$ 上的点，所以 $f(a,b)=|PQ|^2$（图 2）.

$$|OQ|=\sqrt{b^2+\frac{81}{b^2}} \geqslant 3\sqrt{2}\text{（当且仅当 } b=\pm 3 \text{ 时取等号）}$$

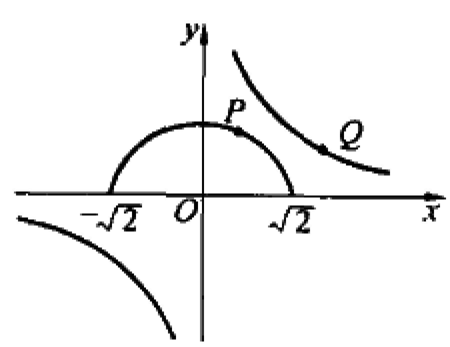


图 2

$$|OP|=\sqrt{2}$$

$|PQ| \geqslant |OQ|-|OP|$（当且仅当点 P 在线段 OQ 上时取等号）$\geqslant 3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

所以　　$|PQ| \geqslant 2\sqrt{2}$（当且仅当 $b=3,a=1$ 时取等号）

所以当且仅当 $a=1,b=3$ 时 $f(a,b)$ 取到最小值，且最小值是 8.

例 3　已知点 P 是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的动点，B 是该椭圆的下顶点，F_1,F_2

是左、右焦点，猜想 $\triangle PBF_2$ 的周长最大时点 P 的位置，并证明你的结论.

解 如图3，猜想点 P 是直线 BF_1 与椭圆的另一个交点 Q（不是 B）时，$\triangle PBF_2$ 的周长最大. 证明如下

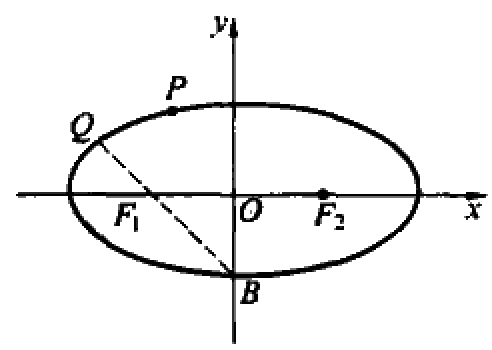


图3

$$|PB|+|PF_2|+|BF_2|=4+(|PB|-|PF_1|+|BF_2|\leqslant 4+|BF_1|+|BF_2|\text{（当且仅当 }P,Q\text{ 重合时取等号）}=8$$

椭圆上四点共圆的充要条件及其简证

百年前,著名教材《坐标几何》(Loney 著)中曾提到椭圆上四点共圆的一个必要条件是这四点的离心角之和为周角的整数倍(椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$上任一点 A 的坐标可以表示为$(a\cos\theta,b\sin\theta)(\theta\in\mathbf{R})$,角 θ 就叫做点A的离心角),证明方法十分巧妙,还要运用高次方程的韦达定理.这一条件是否充分,一直是悬案.在 20 世纪 80 年代编写《数学题解辞典(平面解析几何)》时,仍未解决.到20世纪90年代初编写《中学数学范例点评》时,才证明了此条件的充分性.[1]

2005 年湖北高考卷理科倒数第二题(即文科压轴题)及 2002 年江苏、广东高考卷第 20 题均是椭圆上四点共圆的问题,所以又触及了人们对这一简明结论的好奇心.文献[2]针对 2005 年的这道高考题,经过深入研究,立即得到了二次曲线(包括退化成两条直线的情形)上的四点共圆的充要条件:

定理 1 设两条直线 $l_i:y-y_0=k_i(x-x_0)(i=1,2)$ 与二次曲线 Γ: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0(A\neq B)$有四个交点,则这四个交点共圆的充要条件是 $k_1+k_2=0$.

由定理 1,立得

定理 2 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上四点共圆的充要条件是这四点的离心角之和为周角的整数倍.

证明 设椭圆上的四点为 $A_i(a\cos\alpha_i,b\sin\alpha_i)(i=1,2,3,4)$(它们按逆时针排列).

由画图(图 1)知直线 A_1A_3,A_2A_4 的斜率均存在.

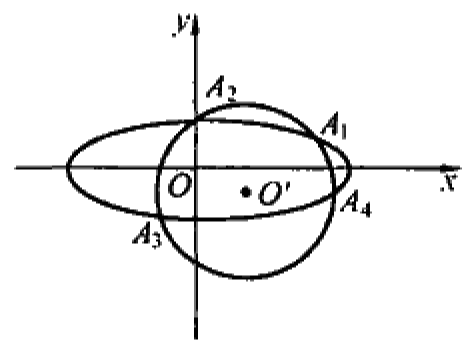


图 1

再由定理 1,得 $k_{A_1A_3}+k_{A_2A_4}=0$,即

$$\frac{b(\sin\alpha_1-\sin\alpha_3)}{a(\cos\alpha_1-\cos\alpha_3)}+\frac{b(\sin\alpha_2-\sin\alpha_4)}{a(\cos\alpha_2-\cos\alpha_4)}=0$$

$$\frac{2\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}}{-2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}}+\frac{2\cos\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_4}{2}}{-2\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_4}{2}}=0$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}}{\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}}=0$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}}{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2+\alpha_4}{2}}=0$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=n\pi(n\in\mathbf{Z})$$

参考文献

[1] 陈振宣.圆锥曲线上四点共圆的充要条件[J].数学教学,2007(2):33.
[2] 甘志国.对一道高考题的研究[J].数学通讯,2005(22):21.

对一道题的研究

题 已知点 $P(0,4)$ 和曲线 $C: y = |ax^2 - 1|$，若 C 上恰有 $n(n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2)$ 个点与 P 的距离相等，求实数 a 的取值范围.

本文只能解决 n 是奇数的情形.

因为曲线 C 的对称轴是 y 轴，点 P 在 y 轴上，所以若 A, A' 是曲线 C 上关于 y 轴对称的点(若 A, A' 重合，则 A 在 y 轴上)，则 $AP = A'P$.

当 n 是奇数时：

因为 C 上恰有奇数个点与 P 的距离相等，所以这些点中必有一点在 y 轴上，此点是 y 轴与曲线 C 的交点，坐标是 $(0,1)$. 得以 P 为圆心，3 为半径的圆与曲线 C 恰有 n(n 是奇数) 个公共点，即方程组

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = |ax^2 - 1| \end{cases} \qquad ①$$

恰有 n 组解 (x, y).

(1) 当 $n = 3$ 时(有 $a \neq 0$，否则 ① 只有一组解 $(0,1)$).

① 当 $a > 0$ 时，参见图 1，可得方程组

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = ax^2 - 1 \end{cases}$$

有且仅有两组解.

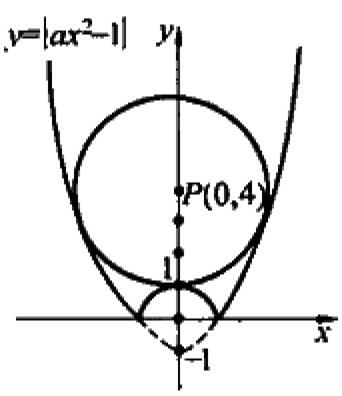


图 1

所以 $ay^2 + (1 - 8a)y + 7a + 1 = 0$ 有两个相等的解 y(且 $y > -1$)，从而有 $a = \frac{1}{2}$.

② 当 $a < 0$ 时，方程组

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = -ax^2 + 1 \end{cases}$$

有且仅有三组解，得

$$ay^2 - (8a+1)y + 7a + 1 = 0$$

$$(y-1)(ay - 7a - 1) = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = \frac{7a+1}{a}$$

所以 $y_2 = \frac{7a+1}{a} > 1, a < -\frac{1}{6}$.

得 $n = 3$ 时，a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{6}) \cup \{\frac{1}{2}\}$.

(2) 当 $n = 5$ 时(也有 $a \neq 0$).

① 当 $a > 0$ 时，参见图 1，也可得方程组

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = ax^2 - 1 \end{cases}$$

有且仅有四组解.

得 $f(y) = ay^2 + (1-8a)y + 7a + 1 = 0$ 有两个大于 -1 且不相等的实数根. 由一元二次方程根的分布的结论[1]，得

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{8a-1}{2a} > -1 \\ f(-1) = 16a > 0 \end{cases}$$

解得 $a > \frac{1}{2}$.

② 当 $a < 0$ 时，因为抛物线与圆最多有四个交点，所以此时 $a \in \varnothing$.

得 $n = 5$ 时，a 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

(3) 当 n 是奇数且 $n \geqslant 7$ 时.

此时易得 $a \in \varnothing$.

请读者再研究 n 是偶数时的情形. 当然只需分别求出 $n = 2,4,6$ 时 a 的取值范围(因为当 $n \geqslant 8$ 时，$a \in \varnothing$). 且可得 $n = 2,4,6$ 时 a 的取值范围的并集是 $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

还可证得以下结论：

定理 方程组 ① 有且仅有 $n(n \in \mathbf{N})$ 组解的充要条件是：

(1) 当 n 为偶数时，$a \in \varnothing$；

(2) 当 $n = 1$ 时，$a \in [-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$；

(3) 当 $n = 3$ 时，$a \in (-\infty, -\frac{1}{6}) \cup \{\frac{1}{2}\}$；

(4) 当 $n = 5$ 时，$a \in (\frac{1}{2}, +\infty)$；

(5) 当 n 是奇数且 $n \geqslant 7$ 时，$a \in \varnothing$.

证明 (1) 因为 ① 有解 (x_0, y_0) 时，必有解 $(-x_0, y_0)$，而 ① 满足 $x_0 = 0$ 的解为 $(0,1)$，所以 ① 必有奇数组解.

(2) 由前文的证明知(3),(4),(5)成立,从而可得(2)也成立.

对于(2),也可另证如下:

① 当 $a = 0$ 时,① 有且仅有一组解(0,1).

② 当 $a > 0$ 时,参见图1,得$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = ax^2 - 1 \end{cases}$无解,即 $f(y) = ay^2 + (1 - 8a)y + 7a + 1 = 0$ 无解或有解但 $y < -1$,得

$$\Delta = 36a^2 - 20a + 1 < 0 \text{ 或 } \begin{cases} \Delta = 0 \\ y = \dfrac{8a-1}{2a} < -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{8a-1}{2a} < -1 \\ f(-1) = 16a > 0 \end{cases}$$

即 $\frac{1}{18} < a < \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{1}{18}$ 或 $a < \frac{1}{18}$,即 $a \in (0, \frac{1}{2})$.

③ 当 $a < 0$ 时,即方程组

$$\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 9 \\ y = -ax^2 + 1 \end{cases}$$

有唯一解(0,1),得

$$y_2 = \frac{7a+1}{a} \leqslant 1, \ -\frac{1}{6} \leqslant a < 0$$

所以,此时 a 的范围是$[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

(3),(4),(5)无须再证.

参考文献

[1] 杨之.初等数学研究的问题与课题[M].长沙:湖南教育出版社,1993:183-184.

中心二次曲线的一条性质
——兼否定一条猜想

文献[1]给出了抛物线的一条性质，并猜想一般的中心二次曲线也有此性质：

猜想 若过中心二次曲线 $mx^2+ny^2=1$ 上任意一点 A 的两条直线 AB，AC（B，C 均在这条曲线上，A，B，C 互不重合）的斜率之积为非零常数 k，则直线 BC 恒过定点.

本文将给出中心二次曲线的一条性质，从而否定上述猜想.

定理 1 设 $A(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ 是椭圆或圆 $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 上的定点，$B(a\cos\beta, b\sin\beta)$，$C(a\cos\gamma, b\sin\gamma)$ 是这条曲线上的动点，A，B，C 互不重合，$\alpha,\beta,\gamma\in[0,2\pi)$，$\beta<\gamma$，则

(1) $k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{b^2}{a^2}\Leftrightarrow r=\beta+\pi$；

(2) 当 $k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{b^2}{a^2}$ 时，直线 BC 的方程是：$\frac{x}{a}\sin\beta=\frac{y}{b}\cos\beta$.

证明 (1)

$$k_{AB}\cdot k_{AC}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{b(\sin\alpha-\sin\beta)}{a(\cos\alpha-\cos\beta)}\cdot\frac{b(\sin\alpha-\sin\gamma)}{a(\cos\alpha-\cos\gamma)}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}\cdot$$

$$\frac{(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\gamma)+(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\gamma)}{(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\gamma)}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1+\cos(\beta-\gamma)-[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\gamma)]}{(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\gamma)}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{2})}{(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\gamma)}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

从而可得结论(1)成立.

(2) 可得 $C(-a\cos\beta, -b\sin\beta)$,所以直线 BC 的方程是

$$\frac{y+b\sin\beta}{x+a\cos\beta}=\frac{2b\sin\beta}{2a\cos\beta}$$

即

$$\frac{x}{a}\sin\beta=\frac{y}{b}\cos\beta$$

由定理1(2)知,此时直线 BC 不能恒过定点,这就说明文献[1]的猜想对于椭圆或圆 $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$ 在 $k=-\frac{b^2}{a^2}$ 时不成立.

定理2 设 $A(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$ 是双曲线 $(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2=1(a,b\in\mathbf{R}^+)$ 上的定点,$B(a\sec\beta, b\tan\beta)$,$c(a\sec\gamma, b\tan\gamma)$ 是这条曲线上的动点,A,B,C 互不重合,$\alpha,\beta,\gamma\in[0,2\pi)$,且 $\alpha,\beta,\gamma\notin\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$,则

(1) $k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{b^2}{a^2}\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta-\cos\gamma}\Leftrightarrow k_{BC}=-\frac{b}{a}\sin\alpha$;

(2) 当 $k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 BC 的方程是 $\frac{x}{a}\sin\alpha+\frac{y}{b}=\sin\alpha\sec\beta+\tan\beta$.

证明 (1)

$$k_{AB}\cdot k_{AC}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{b(\tan\alpha-\tan\beta)}{a(\sec\alpha-\sec\beta)}\cdot\frac{b(\tan\alpha-\tan\gamma)}{a(\sec\alpha-\sec\beta)}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}\cdot$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\gamma)}{(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\gamma)}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2})}{4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+2\sin\alpha\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}=$$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\sin(\beta-\gamma)-\sin\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

从而可得

$$k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{b^2}{a^2}\Leftrightarrow\sin\alpha=\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta-\cos\gamma}$$

且有

$$k_{BC}=\frac{b(\tan\beta-\tan\gamma)}{a(\sec\beta-\sec\gamma)}$$

又易证 $\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{\sec\beta-\sec\gamma}=-\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta-\cos\gamma}$，从而有结论(1)成立.

(2)得直线 BC 的方程是

$$\frac{y-\tan\beta}{x-a\sec\beta}=-\frac{b}{a}\sin\alpha$$

即

$$\frac{x}{a}\sin\alpha+\frac{y}{b}=\sin\alpha\sec\beta+\tan\beta.$$

由定理2(2)知，此时直线 BC 不能恒过定点，这就说明文献[1]的猜想对于双曲线 $(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2=1$ 在 $k=-\frac{b^2}{a^2}$ 时不成立.

参考文献

[1] 辛民.一道全国联赛试题的思考[J].中学数学月刊,2000(7):35-36.

一道题的五种解法

题　已知 $A(1,1)$，$B(2,-1)$，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与线段 AB 有公共点，求 P 的取值范围.

解法1　线段 AB 的方程为

$$y=-2x+3(-1\leqslant y\leqslant 1)$$

题意即方程组 $\begin{cases} y=-2x+3(-1\leqslant y\leqslant 1) \\ y^2=2px(p>0) \end{cases}$ 有实数解 (x,y).

也即方程 $f(y)=y^2+py-3p=0(p>0)$ 在 $[-1,1]$ 上有实数解 y.

可得此方程有两个不同的实数解 $y_1,y_2(y_1<y_2)$，抛物线 $f(y)$ 的对称轴是 $y=-\frac{p}{2}<0$.

方程 $f(y)=0$ 在 $[-1,1]$ 上无解的情形有三种：

(1) $y_1<-1$，$y_2<-1$（图1），得

$$\begin{cases} -\frac{p}{2}<-1 \\ f(-1)=1-4p>0 \end{cases}$$

解得 $p\in\varnothing$.

(2) $y_1>1$，$y_2>1$，这将与"$f(y)$ 的对称轴是 $y=-\frac{p}{2}$"矛盾！

(3) $y_1<-1$，$y_2>1$（图2），得

$$\begin{cases} f(-1)=1-4p<0 \\ f(1)=1-2p<0 \end{cases}$$

此时对称轴没有固定的位置，解得 $p>\frac{1}{2}$.

所以，所求范围是 $\complement_{\mathbf{R}^+}(\frac{1}{2},+\infty)=(0,\frac{1}{2}]$.

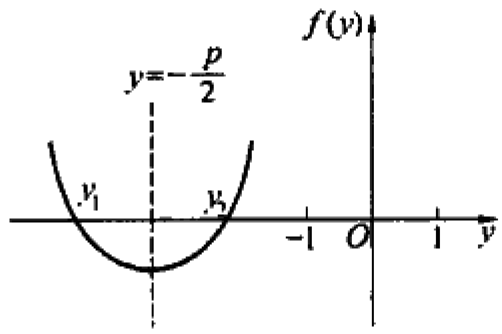


图 1

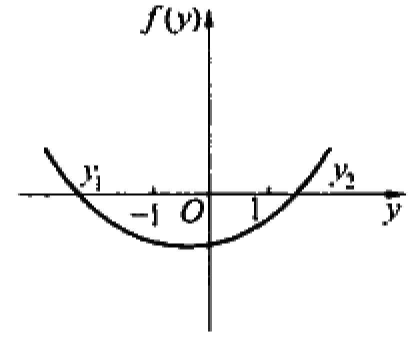


图 2

解法 2 参见解法 1，只需求出方程 $f(y)=y^2+py-3p=0(p>0)$ 在 $[-1,1]$ 上有解 y 的充要条件.

方程 $f(y)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个不同的解 $y_1,y_2(y_1<y_2)$，抛物线 $f(y)$ 的对称轴是 $y=-\frac{p}{2}$.

(1) 两个解均在 $[-1,1]$ 上，即 $-1\leqslant y_1<y_2\leqslant 1$，得(图 3)

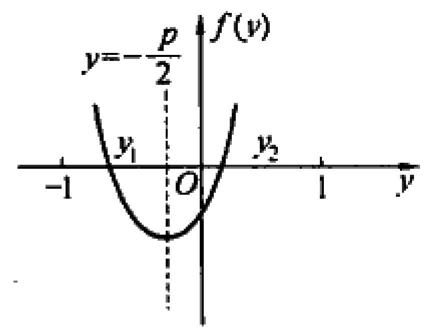


图 3

$$\begin{cases}f(-1)=1-4p\geqslant 0\\ f(1)=1-2p\geqslant 0\\ -1<-\frac{p}{2}<1\end{cases}$$

解得 $-2<p\leqslant\frac{1}{4}$，此时 p 的范围是 $(0,\frac{1}{4}]$.

(2) 恰有一个解在 $[-1,1]$ 上时，又有五种情形(请读者自己画出图形).

① $\begin{cases}y_1<-1\\ y_2=-1\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{p}{2}<-1\\ f(-1)=1-4p=0\end{cases}$，解得 $p\in\varnothing$；

② $y_1<-1<y_2<1$，即 $\begin{cases}f(-1)=1-4p<0\\ f(1)=1-2p>0\end{cases}$，解得 $\frac{1}{4}<p<\frac{1}{2}$；

③ $\begin{cases}y_1<-1\\ y_2=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{p}{2}<0\\ f(1)=1-2p=0\end{cases}$，解得 $p=\frac{1}{2}$；

④ $\begin{cases}y_1=-1\\ y_2>1\end{cases}$；

⑤ $-1<y_1<1<y_2$.

④⑤ 两种情形均将与“对称轴是 $y=-\frac{p}{2}<0$”矛盾(因为对称轴是 $y=\frac{y_2+y_1}{2}>0$)！

此时 p 的范围是 $(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$.

所以,所求范围是$(0,\frac{1}{2}]$.

解法3 同解法1,得方程$y^2+py-3p=0$ $(p>0)$在$[-1,1]$上有解y,所以,本题即求函数$p=\frac{y^2}{3-y}(-1\leqslant y\leqslant 1)$的值域.

设$3-y=t$,得

$$y=3-t(2\leqslant t\leqslant 4)$$

$$p=\frac{(3-t)^2}{t}=t+\frac{9}{t}-6$$

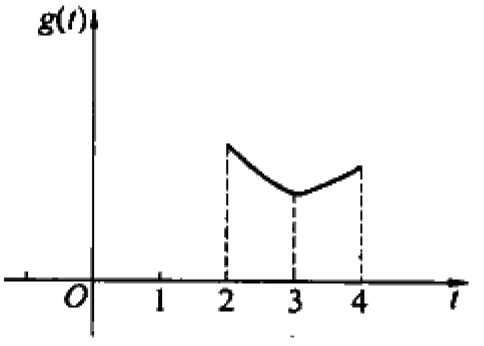


图4

由均值不等式,可得$g(t)=t+\frac{9}{t}\geqslant 6$,从而可画出函数$g(t)$的图象,如图4所示,进而得$g(t)$在$[2,3]$上递减,在$[3,4]$上递增,所以$g(t)\in[6,6\frac{1}{2}]$,$p\in[0,\frac{1}{2}]$.又$p>0$,所以$p\in(0,\frac{1}{2}]$.

解法4 同解法1,得方程$y^2+py-3p=0(p>0)$在$[-1,1]$上有解.又

$$y_1=\frac{-p-\sqrt{p^2+12p}}{2},y_2=\frac{-p+\sqrt{p^2+12p}}{2}(y_1<y_2)$$

由题意,得$y_1\geqslant-1$或$y_2\leqslant 1$,可分别解得$p\leqslant\frac{1}{4}$或$p\leqslant\frac{1}{2}$,所以$p\in(0,\frac{1}{2}]$.

解法5 如图5,作$AC\perp x$轴,垂足为D,$BC\perp AD$,垂足为C,则点C的坐标是$(1,-1)$.直线AC的方程是:$x=1$,它与抛物线交点的坐标是$(1,\pm\sqrt{2p})$.

由题意,得$AD=1\geqslant\sqrt{2p}$,解得$p\leqslant\frac{1}{2}$,所以$p\in(0,\frac{1}{2}]$.

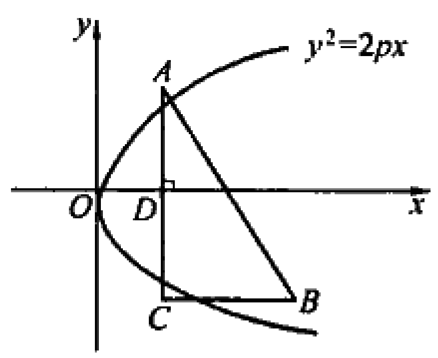


图5

评注 解法1,2用到了“一元二次方程根的分布”的结论:

设x_1,x_2是一元二次方程$f(x)=ax^2+bx+c=0(a>0)$的根,则

(1)$x_1>m,x_2>m\Leftrightarrow\Delta>0,-\frac{b}{2a}>m,f(m)>0$.

(2)$x_1<n,x_2<n\Leftrightarrow\Delta>0,-\frac{b}{2a}<n,f(n)>0$.

(在(1),(2)中$x_1\neq x_2$)

(3)$x_1<p<x_2\Leftrightarrow f(p)<0$.

(4)$m < x_1 \leqslant x_2 < n \Leftrightarrow \Delta \geqslant 0, m < -\frac{b}{2a} < n, f(m) > 0, f(n) > 0$.

(5)$m < x_1 < p < x_2 < n \Leftrightarrow f(m) > 0, f(p) < 0, f(n) > 0$.

(该结论摘自杨之《初等数学研究的问题与课题》(1993年湖南教育出版社)第183 ~ 184页,读者也可根据抛物线自证.记忆时应注意对称轴的位置,Δ 的符号,点 m,n,p 的函数值.m,n,p 可取 $\pm\infty$,有 $f(\pm\infty) = +\infty$.)

解法2的(1),(2)中分别给出了抛物线与线段恰有两个、一个公共点时 p 的范围.

练　习

1.已知点 $A(-3,4)$,$B(4,3)$,若线段 AB 与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = a^2$ 有公共点,求正数 a 的取值范围.

2.将上题中"$B(4,3)$"改为"$B(4,4)$",其余不变.

(答案:1.$\frac{25\sqrt{11}}{33} \leqslant a \leqslant \sqrt{17}$(用解法4)　2.$a \in [2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}]$)

例谈关于双曲线焦半径的习题的解法

关于双曲线的焦半径(即连结双曲线上任一点与一个焦点的线段)的题目,很多读者会立即想到用焦半径公式,实际上,对于很多情形,若直接使用双曲线的定义,反而更简洁.

1 使用定义

例1 已知双曲线 $x^2-3y^2=3$ 上的一点 P 到左、右焦点 F_1,F_2 的距离之比是 $1:2$,求点 P 到右准线的距离 d.

解 可得 $a=\sqrt{3},b=1,c=2,PF_2=2PF_1$.

由双曲线的定义,得

$$|PF_2|-|PF_1|=2a(\text{因为}|PF_2|>|PF_1|)$$

$$|PF_2|=4\sqrt{3}$$

再由双曲线准线的性质,得

$$\frac{|PF_2|}{d}=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$d=6$$

例2 设 F_1,F_2 是双曲线$\frac{x^2}{4a}-\frac{y}{a}=1(a>0)$的两个焦点,点 P 在双曲线上,且 $\angle F_1PF_2=90°,S_{\triangle F_1PF_2}=1$,求 a.

解 由双曲线的定义,得

$$||PF_1|-|PF_2||=2\sqrt{4a}$$

再由题设,得

$$|PF_1|\cdot|PF_2|=2$$

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2=(2c)^2=4(4a+a)=20a$$

可求得 $a=1$

2 用准线性质

例3 已知双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,左准线为 l,能

否在双曲线上找一点 P,使 $|PF_1|$ 是 P 到 l 的距离 d 与 $|PF_2|$ 的等比中项?

解 由 $a=5,b=12,c=13$,得

$$\frac{|PF_1|}{d}=\frac{c}{a}=\frac{13}{5}$$

$$d=\frac{5}{13}|PF_1|$$

假设符合题意的点 P 存在,则

$$|PF_1|^2=d|PF_2|$$

所以

$$|PF_1|=\frac{5}{13}|PF_2|$$

又由双曲线的定义,得

$$||PF_1|-|PF_2||=10$$

所以

$$|PF_1|=\frac{25}{4},|PF_2|=\frac{65}{4}$$

得

$$|PF_1|+|PF_2|=\frac{45}{2}<26=2c$$

而这与 $|PF_1|+|PF_2|>2c$ 矛盾!所以满足题设的点 P 不存在.

例4 设过双曲线焦点的直线与双曲线交于 A,B 两点,求证:以线段 AB 为直径的圆与相应的准线相交.

证明 当过焦点 F 的直线与双曲线的两支分别交于A,B时,线段AB必与相应的准线相交,此时要证结论显然成立.

当过焦点 F 的直线与双曲线的一支交于 A,B 两点时(图1),设 AB 的中点是C,A,C,B到相应准线的距离分别为 $|AM|,|CP|,|BN|$,则

$$|CP|=\frac{1}{2}(|AM|+|BN|)$$

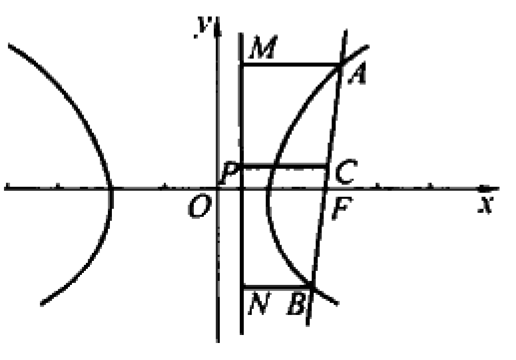


图1

又由准线的性质,得

$$\frac{|AF|}{|AM|}=\frac{|BF|}{|BN|}=e$$

所以

$$e=\frac{|AF|+|BF|}{|AM|+|BN|}=\frac{|AC|}{|CP|}>1$$

$$|CP|<|AC|$$

可得此时要证结论也成立.

3 用斜率

例5 已知双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的两个焦点是$F_1,F_2$,点$P$在这条双曲线上,$PF_1\perp PF_2$,求点$P$到$x$轴的距离.

解 $a=3,b=4,c=5,F_1(-5,0),F_2(5,0)$.

设$P(x_0,y_0)$,由$PF_1\perp PF_2$,得

$$\frac{y_0}{x_0+5}\cdot\frac{y_0}{x_0-5}=-1$$
$$x_0^2=25-y_0^2$$

又$\frac{x_0^2}{9}-\frac{y_0^2}{16}=1$,所以可得$|y_0|=\frac{16}{5}$,即点$P$到$x$轴的距离是$\frac{16}{5}$.

4 用余弦定理

例6 设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的一点$P$到两个焦点$F_1,F_2$所夹的角$\angle F_1PF_2=\theta(0<\theta<\pi)$,求$S_{\triangle F_1PF_2}$.

解 由余弦定理,得

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\theta=|F_1F_2|^2=4c^2$$

又由双曲线的定义,得

$$||PF_1|-|PF_2||=2|a|,\ |PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2$$

所以
$$2|PF_1|\cdot|PF_2|(1-\cos\theta)=4b^2$$

$$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\theta=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=b^2\cot\frac{\theta}{2}$$

5 用焦半径公式

例7 过双曲线$3x^2-y^2=3$的右焦点F_2作倾斜角为30°的直线l交双曲线于点A,B(A在B的右侧).

(1) 求$|AB|$;

(2) 设F_1是双曲线的左焦点,求$\triangle ABF_1$的周长.

解 可得$a=1,b=\sqrt{3},c=2,F_1(-2,0),F_2(2,0),l:y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$是方程组

$$\begin{cases}y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)\\3x^2-y^2=3\end{cases}$$

的两组解,从而得 x_1,x_2 是方程 $8x^2-4x-13=0$ 的解,所以

$$(x_1-x_2)^2=(\frac{4}{8})^2-4\times\frac{-13}{8}=\frac{27}{4}$$

$$|x_1-x_2|=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

(1) $|AB|=\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\cdot|x_1-x_2|=3.$

(2) 由焦半径公式,得

$$|AF_1|=|a+ex_1|=a+ex_1,\ |BF_1|=|a+ex_2|=-a-ex_2$$

$$|AF_1|+|BF_1|=e(x_1-x_2)=2\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

$\triangle ABF_1$ 的周长为 $3+3\sqrt{3}$.

练　习

1. 已知双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$的左支上一点 M 到右焦点 F_2 的距离是 18, N 是 MF_2 的中点, O 是坐标原点,求 $|ON|$.

2. 设 F_1,F_2 是双曲线的两个焦点, Q 是双曲线上的任一点,从某一焦点引 $\angle F_1QF_2$ 的平分线的垂线,求垂足 P 的轨迹方程.

3. 在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右支上有三点 $A_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$, F 是双曲线的右焦点, $|FA_i|(i=1,2,3)$ 成等差数列,且 $x_2=6$,求 x_1+x_3.

(答案:1. 14　2. $x^2+y^2=a^2$　3. 12)

一道最值题的解法

题 如图1,已知圆 C 过定点 $A(0,a)(a>0)$,且圆 C 在 x 轴上截得的弦长 $|MN|=2a$,设 $|AM|=m$, $|AN|=n$,当 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ 取最大值时求圆 C 的方程.

解法1 在 $\triangle AMN$ 中

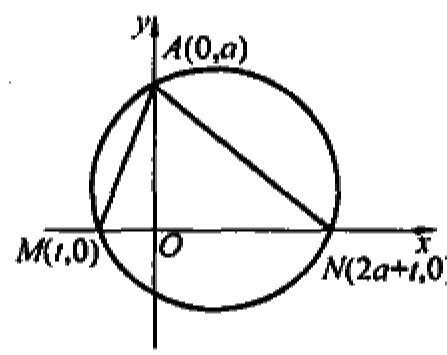


图1

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}mn\sin A=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=a^2$$

所以
$$mn=\frac{2a^2}{\sin A}$$

又由 $m^2+n^2-2mn\cos A=(2a)^2$,得

$$m^2+n^2=\frac{4a^2(\sin A+\cos A)}{\sin A}$$

所以
$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{m^2+n^2}{mn}=2(\sin A+\cos A)=$$
$$2\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})\leqslant 2\sqrt{2}$$

(当且仅当 $A=\frac{\pi}{4}$ 时取等号)

所以,当 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ 取最大值时 $A=\frac{\pi}{4}$,此时

$$\begin{cases} mn=2\sqrt{2}a^2 \\ m^2+n^2=8a^2 \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} m^2=(4\pm 2\sqrt{2})a^2 \\ n^2=(4\mp 2\sqrt{2})a^2 \end{cases}$$

又设 $M(t,0)$, $N(2a+t,0)$,得

$$\begin{cases} m^2=t^2+a^2 \\ n^2=t^2+4at+5a^2 \end{cases}$$

从而得 $t=(\sqrt{2}-1)a,(-\sqrt{2}-1)a$.

当 $t=(\sqrt{2}-1)a$ 时, $M((\sqrt{2}-1)a,0)$, $N((\sqrt{2}+1)a,0)$, $A(0,a)$,经过这三点的圆 C 的方程是 $(x-\sqrt{2}a)^2+(y-a)^2=2a^2$.

当 $t=(-\sqrt{2}-1)a$ 时, $M((-\sqrt{2}-1)a,0)$, $N((-\sqrt{2}+1)a,0)$, $A(0,a)$,经

过这三点的圆 C 的方程是$(x+\sqrt{2}a)^2+(y-a)^2=2a^2$.

总之,所求圆 C 的方程为$(x\pm\sqrt{2}a)^2+(y-a)^2=2a^2$,这两个圆关于 y 轴对称.

解法 2 设 $M(t,0)$,$N(2a+t,0)$,得 $m^2=t^2+a^2$,$n^2=t^2+4at+5a^2$.

因为$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$取到最大值,所以 $m\neq n$.

(1) 当 $m<n$ 时,$\frac{n}{m}<1$,可得 $t+a>0$.

因为$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(0,1)$上是减函数,在$(1,+\infty)$上是增函数,所以当且仅当$\frac{n}{m}$取最大值时,$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$取最大值.

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{t^2+4at+5a^2}{t^2+a^2}=1+4a\cdot\frac{t+a}{t^2+a^2}$$

所以,当且仅当$\frac{t+a}{t^2+a^2}$取最小值时$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$取最大值.

$\frac{t^2+a^2}{t+a}=t+a+\frac{2a^2}{t+a}-2a\geqslant 2(\sqrt{2}-1)a$,当且仅当 $t=(\sqrt{2}-1)a$ 时取等号.

此时 $M((\sqrt{2}-1)a,0)$,$N((\sqrt{2}+1)a,0)$,$A(0,a)$,经过这三点的圆 C 的方程是$(x-\sqrt{2}a)^2+(y-a)^2=2a^2$.

(2) 当 $m>n$ 时,$\frac{n}{m}<1$,可得 $-t-a>0$.

当且仅当$\frac{n}{m}$取最小值时,$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$取最大值.

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=1-4a\cdot\frac{-t-a}{t^2+a^2}$$

所以当且仅当$\frac{t^2+a^2}{-t-a}$取最小值时$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$取最大值.

$\frac{t^2+a^2}{-t-a}=-t-a+\frac{2a^2}{-t-a}+2a\geqslant 2(\sqrt{2}+1)a$,当且仅当 $t=(-\sqrt{2}-1)a$ 时取等号.

此时 $M((-\sqrt{2}-1)a,0)$,$N((-\sqrt{2}+1)a,0)$,$A(0,a)$,经过这三点的圆 C 的方程是$(x+\sqrt{2}a)^2+(y-a)^2=2a^2$.

总之,所求圆 C 的方程为$(x\pm\sqrt{2}a)^2+(y-a)^2=2a^2$,这两个圆关于 y 轴对称.

对《新题征展(102)》中三道题的注记

《新题征展(102)》[1] 题题新颖、处处靓丽、风景独好,特别是第7题有深刻背景,第9题还充满着浓郁的时代气息.笔者仔细研读了该文,对其中的第4,7,10题给出以下注记.

1 第4题的背景及另解

第4题(作者:王户世)是:已知双曲线$2x^2-2y^2=1$的左右焦点分别为F_1,F_2,点P在直线$l:x-y+2=0$上运动,当$\angle F_1PF_2$取最大值时,$\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}$的值为________.

原解答是:得$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,因为直线l与以F_1F_2为直径的圆相离,则当$P\in l$时,$\angle F_1PF_2$是锐角,由正弦定理知$\sin\angle F_1PF_2=\frac{|F_1F_2|}{2R}$($R$为$\triangle F_1PF_2$的外接圆半径).

所以当锐角$\angle F_1PF_2$最大时,$\sin\angle F_1PF_2$最大,R最小,由画图可知,这时点P为$\triangle F_1PF_2$的外接圆与直线l的切点.可设此时圆的方程为$x^2+(y-b)^2=R^2$,把$F_1(-1,0)$代入该式,得

$$1+b^2=R^2 \tag{①}$$

由圆心$(0,b)$到直线$l:x-y+2=0$的距离等于半径,得

$$\frac{|2-b|}{\sqrt{2}}=R \tag{②}$$

由①②解得$R=2\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$,所以当$\angle F_1PF_2$取最大值时,$\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=2R=4\sqrt{2}\pm2\sqrt{3}$.

先说说此题的足球背景.

足球场上有两句顺口溜:"冲向球门跑,越近就越好;斜着球门跑,射点要选好."

如图1,设球员接球时位于点C,他尽力沿点D冲向球门,到点D后,不仅离球门AB近了,射门更有力,而且对球门的张角也增加了,球更容易射中.

如图2,设球员沿直线l踢球,射点应选在过点A,B且与直线l相切的圆的

切点上(当 AB 与 l 不平行时,可证这样的圆有且仅有两个,切点分别在直线 l 的两侧).

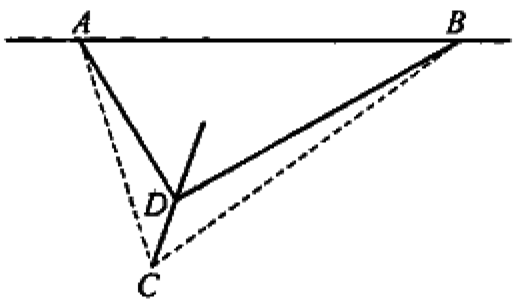


图 1

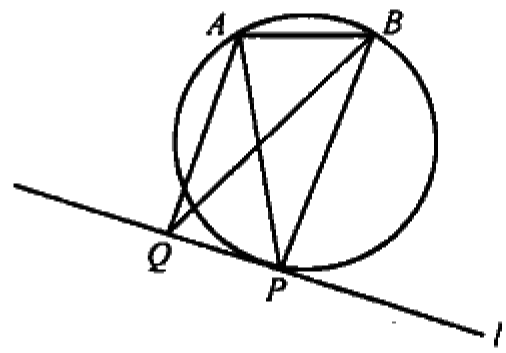


图 2

在原解法中,由 ①② 得两个方程组:$\begin{cases}1+b^2=R^2\\2-b=\sqrt{2}R\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+b^2=R^2\\b-2=\sqrt{2}R\end{cases}$,得 $R=2\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ 或 $R=-(2\sqrt{2}\pm\sqrt{3})$.

因为 $R>0$,所以 $R=2\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$(由此也得上面第二个方程组无解,所以 $2-b>0$. 实际上,圆心 $(0,b)$ 显然在直线 $l:x-y+2=0$ 的右下方,由线性规划知识可得,当 $(x,y)=(0,b)$ 时 $x-y+2=2-b>0$,所以式 ② 即 $\frac{|2-b|}{\sqrt{2}}=\frac{2-b}{\sqrt{2}}=R$,这种用线性规划去掉点到直线距离公式中的绝对值的方法应引起读者的重视),$\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=2R=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

下面再给出该题的一种解法:

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $l:x-y+2=0$ 与 x 轴的负半轴交于点 $A(-2,0)$,由切割线定理,得 $|AF_1|\cdot|AF_2|=|AP|^2$,得 $|AP|=\sqrt{1\times3}=\sqrt{3}$.

当点 P 在点 A 的上方时(见原文第 4 题解答中的图形),$\angle PAF_2=45°$,在 $\triangle APF_1$,$\triangle APF_2$,$\triangle F_1PF_2$ 中,用余弦定理,得

$$PF_1=\sqrt{4-\sqrt{6}},PF_2=\sqrt{12-3\sqrt{6}}$$

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}}$$

$$\cos^2\angle F_1PF_2=\frac{20-8\sqrt{6}}{(4-\sqrt{6})^2}$$

$$\sin^2\angle F_1PF_2=\frac{2}{(4-\sqrt{6})^2}$$

$$\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}}}=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

当点 P 在点 A 的下方时，$\angle PAF_2 = 135°$，同上计算可得

$$\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

所以所求答案为$\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2} = 4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3}$.

注 还可由 $|AP| = \sqrt{3}$，可求得点 P 的坐标是$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 2, \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$或$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 2, -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，从而可求出 ΔF_1PF_2 的外接圆方程，进而得出其直径，即$\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}$的值.

请读者能重视平面几何中的切割线定理在解析几何中的运用，下面再举一例.

例 在平面直角坐标系中，y 轴的正半轴上给定两点 $A(0,a)$，$B(0,b)$，试在 x 轴的正半轴上求一点 C，使 $\angle ACB$ 取得最大值.

解 如图 1，过点 A，B 作一个圆与 x 轴相切，切点 C 即为所求的最大值点. 由切割线定理得 $OC^2 = OB \cdot OA = ab$，所以点 C 的坐标为$(\sqrt{ab}, 0)$.

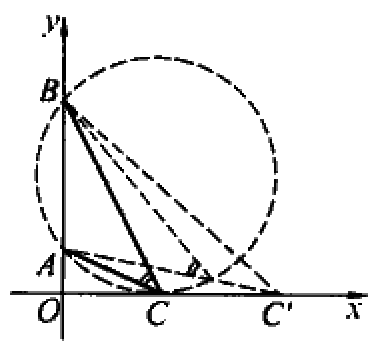


图 1

用这种方法解决 2005 年高考天津第 20 题、浙江理科第 17(文第 19) 题及 2004 全国高中数学联赛第 11 题都很容易.

2 第 7 题的背景及一般情形的简洁结论

第 7 题(作者：陈世明) 是：已知 $1 \leqslant x \leqslant 4, y \in \mathbf{R}$，求二元函数 $f(x,y) = |2x - 3y + 7| + |x + y + 1| + |7x - 3y - 13|$ 的最小值.

这道题与 2006 年莫斯科大学数学力学系入学考试数学试卷的压轴题"求二元函数 $z = |2x - y - 1| + |x + y| + |y|$ 的最小值"类似，俄罗斯《中学数学》杂志 2007 年第 1 期上给出了该题的一种数形结合解法.

文献[2] 运用点到直线的距离公式也给出了题 2 的简洁解答：

得 $z = \sqrt{5} \cdot \dfrac{|2x - y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} + \sqrt{2} \cdot \dfrac{|x + y|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} + |y|$，所以 z 表示平面直角坐标系 xOy 中的动点 $P(x,y)$ 到直线 $l_1: 2x - y - 1 = 0$ 的距离 d_1 的$\sqrt{5}$倍、直线 $l_2: x + y = 0$ 的距离 d_2 的$\sqrt{2}$倍、直线 $l_3: y = 0$(即 x 轴) 的距离之和.

得 $l_1,l_2;l_2,l_3;l_3,l_1$ 的交点分别是 $P_3\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right),P_1(0,0),P_2\left(\frac{1}{2},0\right)$.

结合图形易知点 P 只有在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内部或边界上时，z 才可能取到最小值；进而可得，点 P 只有在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的顶点时，z 才可能取到最小值．而当点 P 分别是 P_1,P_2,P_3 时，z 的值分别为 $\frac{1}{3},1,\frac{1}{2}$，从而可得 z 的最小值为 $\frac{1}{3}$（当且仅当 $x=\frac{1}{3},y=-\frac{1}{3}$ 时取到最小值）.

早在2000年，笔者就发表了文章《四种 Fermat 点及其作法》[3]，该文把熟知的 Fermat 点（即在空间里，到三个已知点的距离之和最小的点）推广为四种 Fermat 点，并给出了它们的作法，当然就很容易求出对应的"距离之和的最小值"了．下面介绍其中的1型、3型 Fermat 点，即题1、2的一般情形（0型 Fermat 点就是通常的 Fermat 点[4]，2型 Fermat 点可由3型 Fermat 点来解决，建议读者能阅读原文）：

定义1　在空间里，若点 P_3 到已知的三条共面直线 a,b,c 的距离之和最小（此时必有 P_3,a,b,c 共面），则点 P_3 叫做 a,b,c 的3型 Fermat 点.

定理1　当三条直线 a,b,c 可围成 $\triangle ABC$ 时，若 P_3 是 a,b,c 的3型 Fermat 点，

(1) 当 $\triangle ABC$ 是正三角形时，P_3 为 $\triangle ABC$ 内（包括边界上）的任意点.

(2) 当 $\triangle ABC$ 是腰大于底的等腰三角形时，P_3 为底上的任意点.

(3) 其他情形时，P_3 为 $\triangle ABC$ 的最大内角顶点.

文献[3]是用解析几何中的点到直线的距离公式（并用线性规划知识去掉该公式中的绝对值符号）来证明的，现在读来却感觉有些繁杂，下面给出一种非常简洁（仅用三角形面积公式）的统一证明（纯粹的平面几何证明读者也是容易给出的）：

先同文献[3]的证明，已得点 P_3 在 $\triangle ABC$ 内或边界上（是纯粹的平面几何证明）.

设点 O 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任一点，作 $OD\perp BC,OE\perp CA,OF\perp AB,AH\perp BC$，垂足分别是 D,E,F,H，由三角形面积公式，得

$$S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}+S_{\triangle OAB}=S_{\triangle ABC}$$

$$|OD|\cdot|BC|+|OE|\cdot|CA|+|OF|\cdot|AB|=|AH|\cdot|BC| \qquad ③$$

在 $\triangle ABC$ 中，可不妨设 $|AB|\leqslant|AC|\leqslant|BC|$，得

$$|OE|\cdot|BC|+|OF|\cdot|BC|\geqslant|OE|\cdot|CA|+|OF|\cdot|AB| \qquad ④$$

再由③，立得

$$|OD|+|OE|+|OF|\geqslant|AH| \qquad ⑤$$

⑤中取等号即④中取等号也即 $|OE|\cdot|BC|=|OE|\cdot|CA|$ 且 $|OF|\cdot$

$|BC| = |OF|\cdot|AB|$(因为可证$|OE|\cdot|BC| \geqslant |OE|\cdot|CA|$且$|OF|\cdot|BC| \geqslant |OF|\cdot|AB|$),其充要条件是:"$|AB| = |BC|$即是正三角形,点 O 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任意点"或"$|AB| < |BC|$(此时必 O,F 重合)且 $|OE|\cdot|BC| = |OE|\cdot|CA|$",也即"$\triangle ABC$ 是正三角形,点 O 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任意点"或"$|AB| < |AC| = |BC|$ 且 O,F 重合"或"$|AB| \leqslant |AC| < |BC|$ 且 O,E,F 重合",也即"$\triangle ABC$ 是正三角形,点 O 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任意点"或"$|AB| < |AC| = |BC|$ 且 O 是线段AB上的任意点"或"$|AB| \leqslant |AC| < |BC|$ 且 O,A 重合".

再由 ⑤ 即知定理 1 成立!

由文献[2]的解题思路,还可得

定理2 设三条直线 $l_i(i = 1,2,3$,下同)能围成$\triangle P_1P_2P_3$(其最大内角是 P_3),且 $l_1 \cap l_2 = P_3, l_2 \cap l_3 = P_1, l_3 \cap l_1 = P_2$,已知的三个正数 k_i 中的最小数是 k_3,空间任意一点 O 到直线 l_i 的距离是 d_i,则当点 O 与 P_3 重合时,$\sum\limits_{i=1}^{3} k_id_i$ 取到最小值.

证明 首先,容易理解:当$\sum\limits_{i=1}^{3} k_id_i$ 取到最小值时,点 O 必在 $\triangle P_1P_2P_3$ 所在的平面上.

再参见文献[3]的证明可知,当$\sum\limits_{i=1}^{3} k_id_i$ 取到最小值时,点 O 必在$\triangle P_1P_2P_3$ 内或边界上.

有$\sum\limits_{i=1}^{3} k_id_i \geqslant k_3\sum\limits_{i=1}^{3} d_i \geqslant k_3 \cdot P_3H$(参见⑤,其中 P_3H 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的高),即定理 3 成立!

文献[3]给出了四种 Fermat 点的定义及其作法,下面再推广这些定义(当然也推广了文献[5]中的 Steiner(史坦纳)问题):

定义 2 在空间里,若点 $P_{m,n}$ 到已知的 m 个点及 n 条直线(这些已知的点与直线均共面 α,点、直线均可重复)的距离之和最小(此时必有 $P_{m,n} \in \alpha$),则点 $P_{m,n}$ 叫做这些已知的点和直线的$m-n$型 Fermat 点,对应的距离之和的最小值记作 $g_{m,n}$.

上述两道题就是一种 0 - 3 型加权 Fermat 点问题.

由定理 2 的证明还可给出上述第 7 题的简洁解法:先可得当且仅当 $x = 4$,$y = 5$时二元函数$f(x,y) = |2x-3y+7|+|x+y+1|+|7x-3y-13|$($x,y \in \mathbf{R}$)取到最小值,进而可得当且仅当 $x = 4, y = 5$ 时二元函数 $f(x,y) = |2x-3y+7|+|x+y+1|+|7x-3y-13|$($1 \leqslant x \leqslant 4, y \in \mathbf{R}$)取到最小

值，且最小值是 10.

3 第 10 题的背景及简解

第 10 题(作者：陈世明)是：

(1) 设 $x>0$，求证：$\ln(1+x)>x-x^2$；

(2) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个常数 $M\in\mathbf{R}$，使得对任意的实数 $x\in D$，有 $f(x)\geqslant M$ 恒成立，则称 M 为 $f(x)$ 的一个下界；又若 M 是 $f(x)$ 的一个下界，且对任意的正实数 ϵ，存在 $x_0\in D$，使 $f(x_0)<M+\epsilon$，则称 M 为 $f(x)$ 的最大下界. 已知 $f(x)=\dfrac{x^2+\ln(1+x)}{x}(x>0)$，试问函数 $f(x)$ 是否存在最大下界？

显然，该题中最大下界就是高等数学中的“下确界”，下面再给出第(2)问的简解：

由(1)可得 1 是 $f(x)$ 的一个下界，下证 1 为 $f(x)$ 的最大下界. 这是因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[x+\frac{\ln(1+x)}{x}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

设 $g(x)=\ln(1+x)$，得

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=\left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=0}=1$$

由极限的定义立得：对任意的正实数 ϵ，存在 $x_0>0$，使 $f(x_0)<1+\epsilon$，所以 1 为 $f(x)$ 的最大下界.

参考文献

[1] 陈世明，王户世，甘志国，等. 新题征展(102)[J]. 中学数学 (高中)，2008(12)：21-24.

[2] 甘志国. 2006 年莫斯科大学一道入学试卷的压轴题的一般情形[J]. 中学数学杂志(高中)，2008(9)：27.

[3] 甘志国. 四种 Fermat 点及其作法[J]. 数学通讯，2000(23)：31-33.

[4] 谷超豪. 数学词典[M]. 上海：上海辞书出版社，1992：133-134.

[5] RICHARD C，HERBERT R. 数学是什么[M]. 汪浩，朱煜民，译. 长沙：湖南教育出版社，1985：378-421.

关于直线方程的两点式的一个简洁结论及其运用

由不同两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ($x_1 \neq x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$) 确定的直线方程的两点式为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

即

$$(y_2-y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1) \quad ①$$

当 $x_1=x_2$ 时(一定有 $y_1\neq y_2$),直线 AB 的方程是 $x=x_1$;当 $y_1=y_2$ 时(一定有 $x_1\neq x_2$),直线 AB 的方程是 $y=y_1$.而这两种情形均可由 ① 得到,所以由两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 确定的直线方程就是 ①,也即

$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0 \quad ②$$

由此还可证得

定理 1 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是不同的两点,则坐标原点 O 到直线 AB 的距离是 $\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{|AB|}$.

另证当点 A,B,O 共线时,有 $x_1y_2-x_2y_1=0$,可得此时要证结论成立.

当点 A,B,O 不共线时,有 $\triangle AOB$ 的面积为

$$\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|AB|d$$ (其中 d 表示点 O 到直线 AB 的距离)

所以

$$d=\frac{|x_1y_1-x_2y_1|}{|AB|}$$

2007 年全国高考陕西卷(理科)解析几何大题(即第 21 题,也是倒数第二题)是:

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,短轴的一个端点与右焦点的距离是 $\sqrt{3}$.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ) 设直线与椭圆 C 交于 A,B 两点,坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

容易求出椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.参考答案对第(Ⅱ)问的解答是常规的但运算量很大:当直线 l 的斜率不存在时,可得 $|AB|=\sqrt{3}$;当直线 l 的斜率存在时,可设 $l:y=kx+m$,… $|AB|_{\max}=2$,所以 $|AB|_{\max}=2$,得△AOB 面积的最大值是$\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

下面用定理 1 给出第(Ⅱ)问的巧解.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由定理 1 及题设得

$$\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{|AB|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2S_{\triangle AOB}=|AB|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=|x_1y_2-x_2y_1|$$

由椭圆的参数方程知,可设 $x_1=\sqrt{3}\cos\alpha,y_1=\sin\alpha,x_2=\sqrt{3}\cos\beta,y_2=\sin\beta$,得

$$2S_{\triangle AOB}=|x_1y_2-x_2y_1|=\sqrt{3}\,|\sin(\beta-\alpha)|$$

从而可得,当且仅当点 A,B 是椭圆 C 的两个顶点且 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ 时△AOB 的面积取到最大值,且最大值是$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

还可得到上面这道高考题的一般情形:

定理 2 设直线 l 与长半轴长、短半轴长分别是 a,b 的椭圆 C 交于不同的两点 A,B,椭圆 C 的中心与直线 l 的距离为常数 d,且 $d\in\left[\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right]$,则△$AOB$ 面积的最大值是$\frac{1}{2}ab$,且当且仅当直线 l 的方程是 $b(\sin\alpha+\cos\alpha)x+a(\sin\alpha-\cos\alpha)y-ab=0$(其中 α 满足 $\sin 2\alpha=\frac{a^2b^2-(a^2+b^2)d^2}{(a^2-b^2)d^2}$)或 $b(\sin\alpha-\cos\alpha)x-a(\sin\alpha+\cos\alpha)y+ab=0$(其中 α 满足 $\sin 2\alpha=\frac{(a^2+b^2)d^2-a^2b^2}{(a^2-b^2)d^2}$)时△$AOB$ 的面积取到最大值.

证明 可设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,其中心是坐标原点 O,又设由定理 1 得及题设得 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由定理 1 得及题设得

$$\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{|AB|}=d$$

$$2S_{\triangle AOB}=|AB|\cdot d=|x_1y_2-x_2y_1|$$

由椭圆的参数方程知,可设 $x_1=a\cos\alpha,y_1=b\sin\alpha,x_2=a\cos\beta,y_2=$

$b\sin\beta$,得

$$2S_{\triangle AOB}=|x_1y_2-x_2y_1|=ab|\sin(\beta-\alpha)|\leqslant ab$$

从而可得,$\triangle AOB$ 的面积的最大值是取到最大值$\frac{1}{2}ab$,且当且仅当 $\sin(\beta-\alpha)=\pm1$ 即以下两种情形成立时,$\triangle AOB$ 的面积取到最大值:

(1) $\beta=\alpha+2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,得 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$,$B(a\sin\alpha,-b\cos\alpha)$,直线 l 的方程是 $b(\sin\alpha+\cos\alpha)x+a(\sin\alpha-\cos\alpha)y-ab=0$,此时原点 O 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{ab}{\sqrt{b^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+a^2(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}$$

所以 $(a^2-b^2)d^2\sin2\alpha=(a^2+b^2)d^2-a^2b^2$,再由 $d\in\left[\frac{b}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2}\right]$,得 $\sin2\alpha=\frac{(a^2+b^2)d^2-a^2b^2}{(a^2-b^2)d^2}$,且 $\sin2\alpha\in[-1,1]$.

(2) $\beta=\alpha+2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,得 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$,$B(-a\sin\alpha,b\cos\alpha)$,直线 l 的方程是 $b(\sin\alpha-\cos\alpha)x-a(\sin\alpha+\cos\alpha)y+ab=0$,此时原点 O 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{ab}{\sqrt{b^2(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+a^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}}$$

所以 $(a^2-b^2)d^2\sin2\alpha=a^2b^2-(a^2+b^2)d^2$,再由 $d\in\left[\frac{b}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2}\right]$,得 $\sin2\alpha=\frac{a^2b^2-(a^2+b^2)d^2}{(a^2-b^2)d^2}$,且 $\sin2\alpha\in[-1,1]$.

得定理 2 成立!

注 若将定理 2 中的"常数"两字去掉,所得结论也成立.

对 2008 年高考江苏卷(理科)第 9 题的研究

2008 年高考江苏卷(理科)第 9 题是:

如图 1,在平面直角坐标系中,设 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(0,a)$,$B(b,0)$,$C(c,0)$,点 $P(0,p)$ 在线段 OA 上(异于端点),设 a,b,c,p 均为非零实数,直线 BP,CP 分别交 AC,AB 于点 E,F,一同学已正确算出 OE 的方程:$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$,请你求 OF 的方程:________.

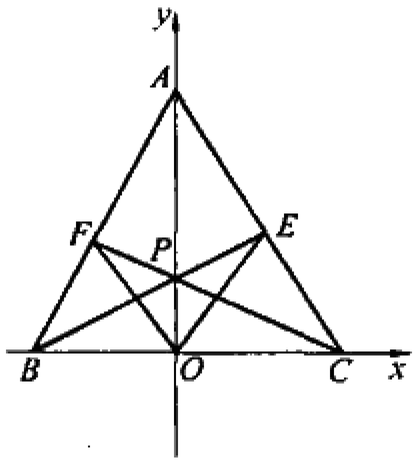


图 1

解 由对称性可得 OF 的方程:$(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})x+(\frac{1}{p}-\frac{1}{a})y=0$.(只需将 OE 的方程中的 b,c 互换.

由此题可编拟出这样一道优美的平面(解析)几何题:

如图 1(不包含平面直角坐标系),在 $\triangle ABC$ 中,$AO\perp BC$ 于 O,P 是直线 AO 上异于 A,O 的点,直线 BP,AC 交于点 E,直线 CP,AB 交于点 F,求证:AO 平分 $\angle EOF$.

证明 如图 1,建立平面直角坐标系,设 $A(0,a)$,$B(b,0)$,$C(c,0)$,$P(0,p)$($abc\neq 0$;$p\neq 0,a$),得

$$BP:\frac{x}{b}+\frac{y}{p}=1 \qquad AC:\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$$

因为直线 DE 过 BP,AC 交于点 E,所以可设

$$DE:\frac{x}{b}+\frac{y}{p}-1+\lambda\left(\frac{x}{c}+\frac{y}{a}-1\right)=0$$

又直线 DE 过点 $D(0,0)$,可求得

$$DE:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$$

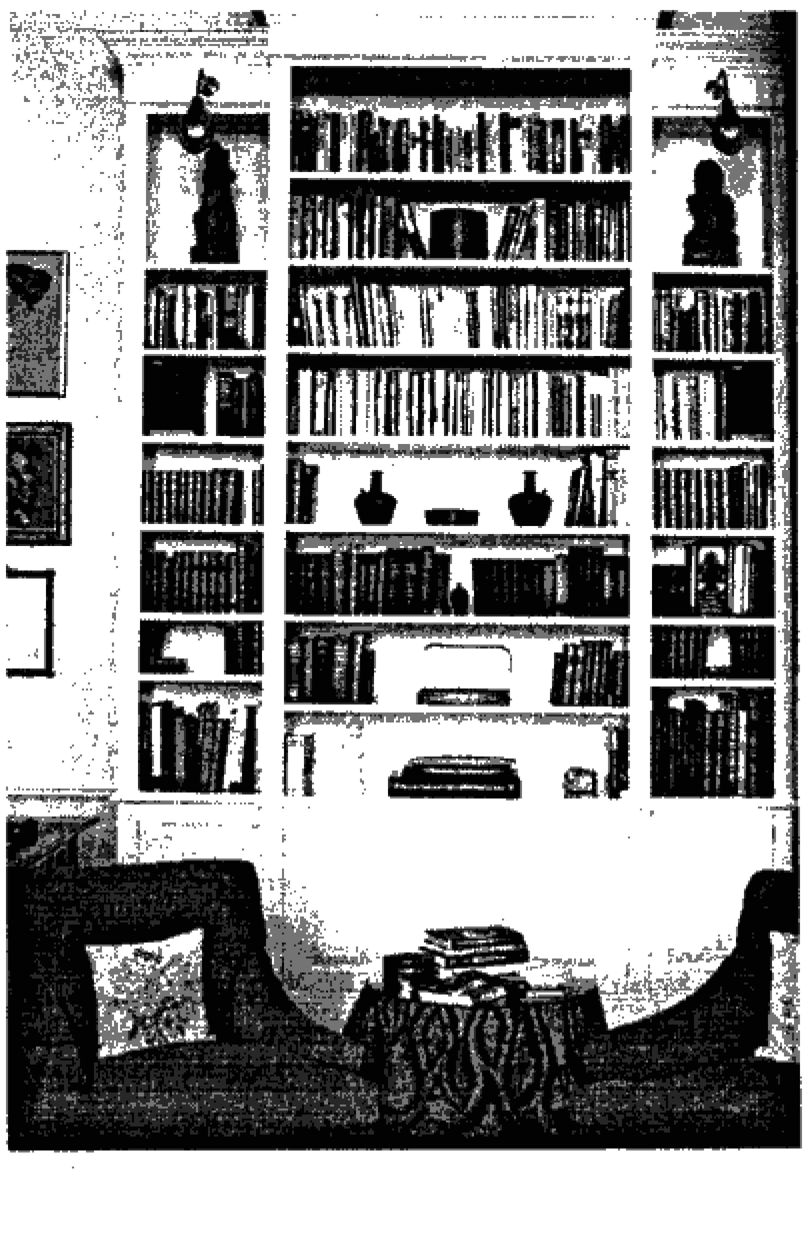
同理,可求得

$$DE:\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$$

因为直线 DE,DF 的斜率均存在且互为相反数,所以 AO 平分 $\angle EOF$.

笔者猜测上述高考题就是来源于上述平面(解析)几何题.

立体(平面)几何



四种 Fermat 点及其作法

1　0型 Fermat 点

定义 1　在空间里，若点 P_0 到已知的三点 A,B,C 的距离之和最小(此时必有 P_0,A,B,C 共面)，则点 P_0 叫做 A,B,C 的 0 型 Fermat 点.

点 P_0 就是我们熟知的 Fermat 点. 读者可从文献[1]得出点 P_0 的作法.

2　1型 Fermat 点及其作法

定义 2　在空间里，若点 P_1 到已知的两点 A,B 及直线 c(A,B,c 共面)的距离之和最小(此时必有 P_1,A,B,c 共面)，则点 P_1 叫做 A,B,c 的 1 型 Fermat 点.

关于点 P_1 的作法，这里只给出 A,B 在 c 的同侧的情形(读者不难得到其余情形的结论，下同)，参见文献[2]的定理 1，可得

定理 1　如图 1，点 A,B 及直线 c 共面，A,B 在 c 的同侧，$A\notin c,B\notin c$，$AD\perp c,BE\perp c$，D,E 是垂足，设 $AD=p,BE=q,DE=s,s\geqslant 0$. 若 P_1 是 A，B,c 的 1 型 Fermat 点，则点 P_1 满足：

(1) 当 $\sqrt{3}\,|p-q|<s<\sqrt{3}(p+q)$ 时，点 P_1 在四边形 $ADEB$ 内，$\angle DAP_1=\angle EBP_1=60°$(图 1).

(2) 当 $s\leqslant\sqrt{3}(q-p)$ 时，$P_1=A$(图 2)；当 $s\leqslant\sqrt{3}(p-q)$ 时，$P_1=B$(图 3).

(3) 当 $s\geqslant\sqrt{3}(p+q)$ 时，作 A'，A 关于 c 对称，$P_1=A'B\cap c$(图 4).

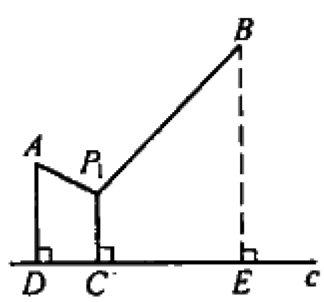


图 1

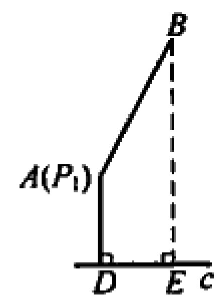


图 2

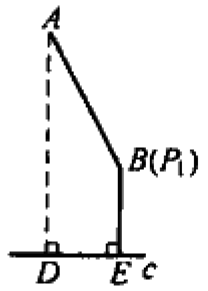


图3

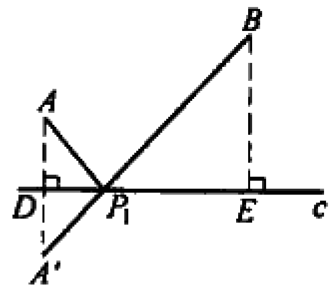


图4

3 2型 Fermat 点

定义3 在空间里,若点 P_2 到已知的点 A 及两条直线 b,c(A,b,c 共面)的距离之和最小(此时必有 P_2,A,b,c 共面),则点 P_2 叫做 A,b,c 的2型 Fermat 点.

本文末将给出点 P_2 的作法.

4 3型 Fermat 点及其作法

定义4 在空间里,若点 P_3 到已知的三条共面直线 a,b,c 的距离之和最小(此时必有 P_3,a,b,c 共面),则点 P_3 叫做 a,b,c 的3型 Fermat 点.

定理2 当三条直线 a,b,c 可围成 $\triangle ABC$ 时,若 P_3 是 a,b,c 的3型 Fermat 点,则

(1) 当 $\triangle ABC$ 是正三角形时,P_3 为 $\triangle ABC$ 内(包括边界上)的任意点.

(2) 当 $\triangle ABC$ 是腰大于底的等腰三角形时,P_3 为底上的任意点.

(3) 其他情形时,P_3 为 $\triangle ABC$ 的最大内角顶点.

证明 先证点 P_3 不可能在 $\triangle ABC$ 的外部.

当 $\triangle ABC$ 中的 $\angle A,\angle B$ 均不是钝角时,如图5,有 $PD \geqslant P'D'$(当且仅当 $\angle ABC = 90°$ 时取等号),$PE \leqslant P'E'$,所以 $PD + PE < P'D' + P'E' + P'P$.

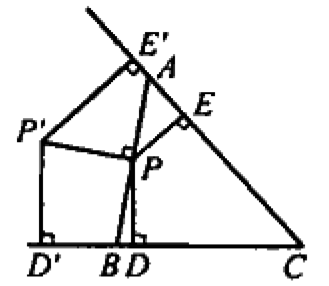


图5

当 $\triangle ABC$ 中的 $\angle A,\angle B$ 之一是钝角时,不妨设 $\angle ABC > 90°$,如图6,有 $PD < PP' + P'D'$,$PE < P'E'$,所以 $PD + PE < P'D' + P'E' + P'P$.

这就说明点 P_3 不可能在 $\triangle ABC$ 的外部.

在 $\triangle ABC$ 中,不妨设 $AB \leqslant AC \leqslant BC$,则 $\triangle ABC$ 的高 AO 在 $\triangle ABC$ 的内部.如图7建立平面直角坐标系,点 A,B,C 的坐标如图所示,这里 r,s 均为正数,可得直线 a,b,c 的方程分别为 $y = 0$, $-rx - ty + rt = 0$, $rx - sy + rs = 0$.

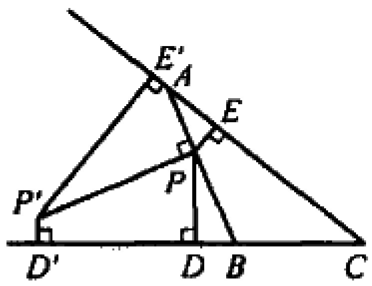


图 6

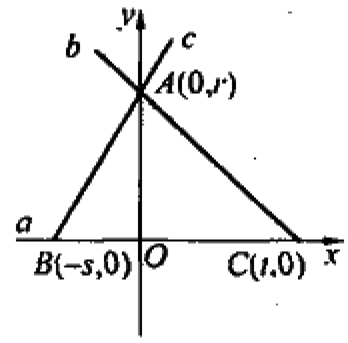


图 7

设 P_3 的坐标是 (x,y)，因为 P_3 不在 $\triangle ABC$ 的外部，所以 P_3 到 a,b,c 的距离之和为

$$l=\frac{|rx-sy+rs|}{\sqrt{r^2+s^2}}+\frac{|-rx-ty+rt|}{\sqrt{r^2+t^2}}+|y|=$$

$$\frac{rx-sy+rs}{\sqrt{r^2+s^2}}+\frac{-rx-ty+rt}{\sqrt{r^2+t^2}}+y$$

设 $rx-sy+rs=u,-rx-ty+rt=v$，得 $y=r-\frac{u+v}{s+t}$。有 P_3 不在 $\triangle ABC$ 的外部 $\Leftrightarrow u\geqslant 0$ 且 $v\geqslant 0$ 且 $u+v\leqslant r(s+t)$，还有 $l=(\frac{1}{\sqrt{r^2+s^2}}-\frac{1}{s+t})u+(\frac{1}{\sqrt{r^2+t^2}}-\frac{1}{s+t})v+r$.

(1) 当 $AB=AC=BC$，即 $\begin{cases}s=t,\\ r^2=s^2+2st\end{cases}$

即 $\frac{1}{\sqrt{r^2+s^2}}-\frac{1}{s+t}=\frac{1}{\sqrt{r^2+t^2}}-\frac{1}{s+t}=0$ 时，$l=r$，所以 P_3 为 $\triangle ABC$ 内(包括边界上)的任意点.

(2) 当 $AB<AC=BC$，即 $\begin{cases}s<t\\ r^2=s^2+2st\end{cases}$，即 $\frac{1}{\sqrt{r^2+s^2}}-\frac{1}{s+t}>\frac{1}{\sqrt{r^2+t^2}}-\frac{1}{s+t}=0$ 时，l 取最小值 $\Leftrightarrow u=0\Leftrightarrow P_3$ 为线段 AB 上的任意点.

(3) 当 $AB\leqslant AC<BC$，即 $\begin{cases}s\leqslant t\\ r^2<s^2+2st\end{cases}$，即 $\frac{1}{\sqrt{r^2+s^2}}-\frac{1}{s+t}\geqslant\frac{1}{\sqrt{r^2+t^2}}-\frac{1}{s+t}>0$ 时，l 取最小值 $\Leftrightarrow u=v=0\Leftrightarrow(x,y)=(0,r)\Leftrightarrow P_3=A$.

综上所述，定理 2 成立.

5 2 型 Fermat 点 P_2 的作法

这里只给出 b 不平行于 c，$A\notin b$，$A\notin c$ 时点 P_2 的作法(下面用定理 2 来研

究).

如图 8,假设点 P_2 已经作出,连结 P_2A,过点 A 作 $BC \perp P_2A$,$B \in b$,$C \in c$,则 P_2 是 BC,b,c 的 3 型 Fermat 点,有 P_2 在 $\triangle OBC$ 的内部(包括边界上),$P_2 \neq B$,$P_2 \neq C$.

(1) 当 $\angle O < 60°$ 时,$\triangle OBC$ 不会是正三角形.

若 $\triangle OBC$ 是腰大于底的等腰三角形时,如图9,$\angle O$ 必是顶角,由定理2(2)知 $P_2 \in BC$,又 $P_2A \perp BC$,所以 $P_2 = A$.

其他情形时,由定理 2(3) 得 $P_2 = B$ 或 C,这不可能!

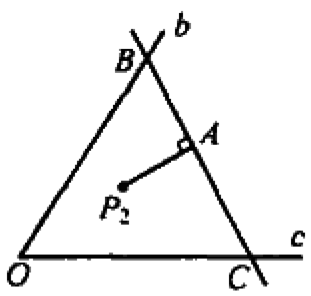


图 8

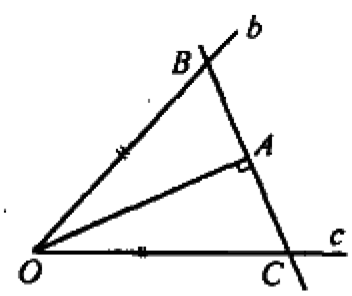


图 9

(2) 当 $\angle O = 60°$ 时,读者可由定理 2 得 P_2 为线段 AA' 上的任意点(如图 10,这里 $\triangle OBC$ 是正三角形,$A \in BC$,$AA' \perp BC$,$A' \in$ 线段 OB 或 OC).

(3) 当 $60° < \angle O < 90°$ 时,$\triangle OBC$ 不会是正三角形.

① 当 $\triangle OBC$ 是腰大于底的等腰三角形时,$\angle O$ 必是底角,再分两种情形:

又当 $OC = BC > OB$ 时,如图 11,作 $AA' \perp BC$,$A' \in b$ 或 c,则当且仅当 $A' \in$ 线段 OB 时,P_2 存在且 $P_2 = A'$,连结 OA,过点 A 作 $B'C' \perp OA$,有 $B' \in$ 线段 OB,$C' \in$ 射线 CD.因为 $\angle B'C'O \leqslant \angle ACO < \angle BOC$,所以 $OB' < B'C'$.因为 $\angle OB'C' \geqslant \angle OBC = \angle B'OC'$.所以 $OC' \geqslant B'C'$.

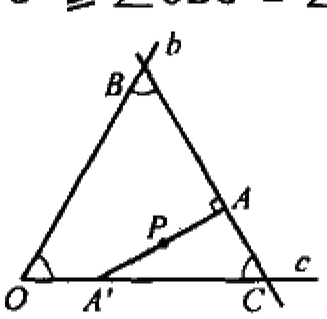


图 10

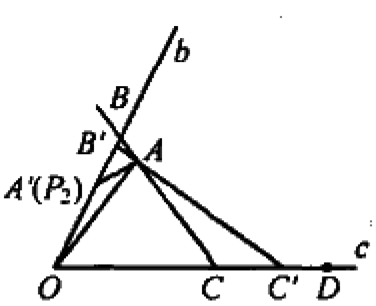


图 11

又当 $OB = BC > OC$ 时,如图 12,作 $AA' \perp BC$,$A' \in b$ 或 c,则当且仅当 $A' \in$ 线段 OC 时,P_2 存在且 $P_2 = A'$.连结 OA,过点 A 作 $B'C' \perp OA$,有 $B' \in$ 射线 BD,$C' \in$ 线段 OC.因为 $\angle B'C'O \geqslant \angle BCO = \angle BOC$,所以 $OB' \geqslant B'C'$.因为 $\angle OB'C' \leqslant \angle OBC < \angle B'OC'$,所以 $OC' < B'C'$.

② 其他情形时,如图 13,因为 $\begin{cases} OB' \geqslant B'C' \\ OC' \geqslant B'C' \end{cases}$ 不可能(因为 $\angle O > 60°$),所以

$\begin{cases} OB' < B'C' \\ OC' < B'C' \end{cases}$.由定理2(3)得 $P_2 = O$.

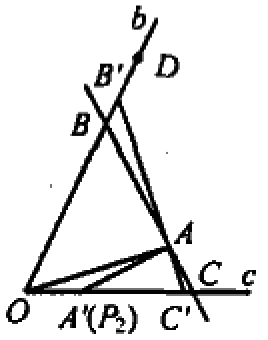


图 12

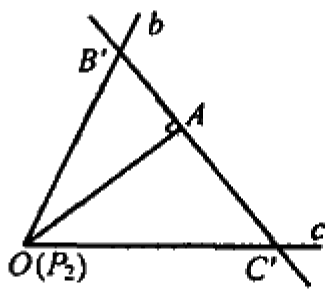


图 13

(4) 当 $\angle O \geqslant 90°$ 时,如图14,得 $P_2 = O$.

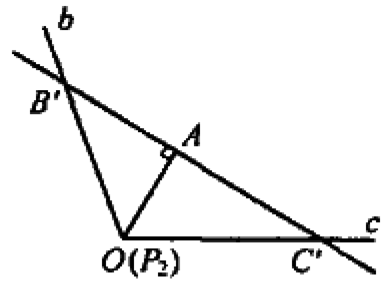


图 14

综上所述,有

定理3 如图8,$b \cap c = O$,点 A 在 $\angle O$ 的内部($A \notin b, A \notin c$).若 P_2 是 A, b, c 的2型 Fermat 点,则

(1) 当 $\angle O < 60°$ 时,$P_2 = A$(图9).

(2) 当 $\angle O = 60°$ 时,如图10,作正 $\triangle OBC$,使 $A \in BC, B \in b, C \in c$,过点 A 作 $AA' \perp BC$,$A' \in$ 线段 OB 或 OC,P_2 为线段 AA' 上的任意点.

(3) 当 $60° < \angle O < 90°$ 时,连结 OA,过点 A 作 $B'C' \perp OA$,$B' \in b$,$C' \in c$.

① 又当 $\begin{cases} OB' < B'C' \\ OC' \geqslant B'C' \end{cases}$ 时,如图11,作 $\triangle OBC$,使 $B \in b, C \in c, A \in BC$,$OC = BC$,再作 $AA' \perp BC$,$A' \in OB$,$P_2 = A'$.

② 又当 $\begin{cases} OB' \geqslant B'C' \\ OC' < B'C' \end{cases}$ 时,如图12,作 $\triangle OBC$,使 $B \in b, C \in c, A \in BC$,$BO = BC$,再作 $AA' \perp BC$,$A' \in OC$,$P_2 = A'$.

③ 又当 $\begin{cases} OB' < B'C' \\ OC' < B'C' \end{cases}$ 时,如图13,$P_2 = O$.

(4) 当 $\angle O \geqslant 90°$ 时,如图14,$P_2 = O$.

参考文献

[1] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992:133-134.

[2] 张延卫.对一道几何极值问题的探讨[J].数学通讯,2000(1):29-30.

几种成比例线段题的证明方法

本文运用例题阐述三种成比例线段题的证明方法.

1　$a^n : b^n = c : d$ 型

如果欲证的等式是 $a^n : b^n = c : d$ 的形式,一般要考虑证明分别会有 a,b 为对应边的两个三角形相似,然后利用面积关系或射影定理进行证明.

例1　如图1,从圆外一点 P 引圆的切线 PA,割线 PCB,求证:$AB^2 : AC^2 = PB : PC$.

分析　作 $AH \perp PB$ 于 H,含 AB,AC,PB,PC 的三角形是 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PCA$,而易证 $\triangle PAB \backsim \triangle PCA$,所以

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCA}} = \frac{\frac{1}{2}PB \cdot AH}{\frac{1}{2}PC \cdot AH} = \frac{PB}{PC}$$

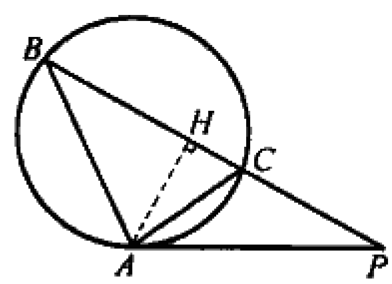


图1

例2　如图2,已知矩形 $CEDF$ 内接于圆 O,过 D 作圆的切线与 CE,CF 的延长线分别交于点 A,B,求证:$\frac{BC^3}{AC^3} = \frac{BF}{AE}$.

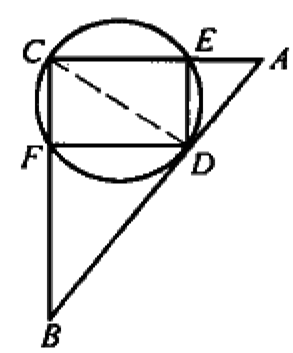


图2

分析　含 BC,AC 的 $\triangle BDC$ 和 $\triangle CDA$ 相似,所以

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle CDA}} = \frac{BD}{AD}$$

而
$$\frac{BD^2}{AD^2} = \frac{BF \cdot BC}{AE \cdot AC}$$

则
$$\frac{BC^4}{AC^4} = \frac{BD^2}{AD^2} = \frac{BF \cdot BC}{AE \cdot AC}$$

所以
$$\frac{BC^3}{AC^3} = \frac{BF}{AE}$$

2　$ab = cd \pm ef$ 型

由于 $ab = cd + ef$ 与 $ab = cd - ef$ 在形式上可以互化,所以下面分析 $ab = cd + ef$ 的形式.

(1) 并项分析:即先令 $cd = ex$(构造一对三角形相似),再证 $ab = e(x +$

f)(即另一对三角形相似).

(2) 拆项分析:即令 $b = m + n$,则有 $a(m + n) = cd + ef$,即 $am + an = cd + ef$,则可证$\begin{cases} am = cd \\ an = ef \end{cases}$,也即证明两对三角形相似.

例3 已知四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,E 是 BD 上一点,且 $\angle BAE = \angle DAC$,求证:$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

分析 利用拆项法,由图3知 $BD = EB + DE$,即须证 $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot EB + AC \cdot DE$.由 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$,$\triangle ADE \backsim \triangle ACB$,易知 $AB \cdot DC = AC \cdot EB$,$AD \cdot BC = AC \cdot DE$.从而可得要证结论成立.

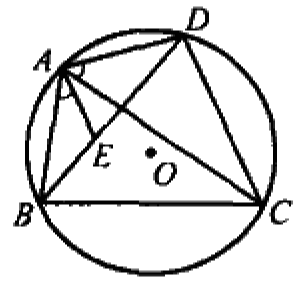


图3

3 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 型

方法1 通常把$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$化成$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1$,再找出有关线段的比表示$\frac{c}{a}$,$\frac{c}{b}$,然后再证$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1$.

例4 如图4,AC 与 BD 交于 O,且 $AB \parallel OE \parallel CD$,设 $AB = a$,$CD = b$,$OE = c$,求证:$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

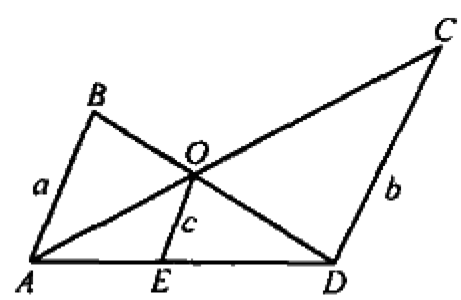


图4

分析 将$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$变形为$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1$.

由 $AB \parallel OE \parallel CD$,易知$\frac{c}{a} = \frac{OE}{AB} = \frac{DE}{AD}$,$\frac{c}{b} = \frac{OE}{CD} = \frac{AE}{AD}$,从而可得要证结论成立.

方法2 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$可变形为$\frac{c}{a} = \frac{b - c}{b}$或$\frac{b}{c} = \frac{a + b}{a}$,可按 $ab = cd \pm ef$ 类型处理.

何谓点到射线的距离?

在平面几何中是这样定义“点到直线的距离”的:过一点到这条直线作垂线,这点到垂足的距离就是点到直线的距离(显然,点在直线上时点到直线的距离为 0).但未曾明确给出“点到射线的距离”的定义,一般理解为:

观点 1 点到射线的距离就是点到射线所在直线的距离.

但也有别的理解.

结论 1 在平面上到一个角两边距离相等的点在这个角的平分线上.

如图 1,直线 AC,BD 交于点 O,射线 OE,OF,OG,OH 分别平分 $\angle AOB$,$\angle COD$,$\angle AOD$,$\angle BOC$,由结论 1 知,到射线 OA,OB 距离相等的点一定在射线 OE 上.而射线 OF,OG,OH 上的点到直线 OA,OB 的距离都相等,说明此结论中“点到射线的距离”不是按观点 1 理解的,而是理解为(可参见后文的定理):

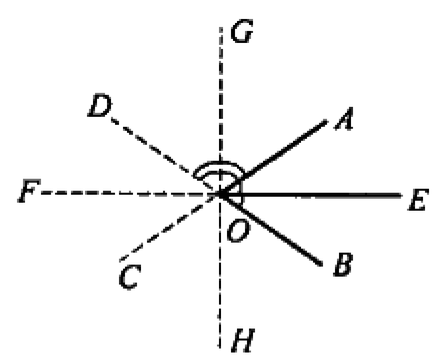


图 1

观点 2 过一点作射线所在直线的垂线,若垂足在射线上,则点到射线所在直线的距离就是点到射线的距离;若垂足没在射线上,则点到射线的距离不存在.

立体几何中也有类似情形.

结论 2 如果一个角所在平面外一点到角的两边距离相等,那么这一点在平面内的射影在这个角的平分线所在的直线上(见全日制普通高级中学教科书(以下教科书全同此)《数学・第二册(下 A)》(人教版,2004 年)第 26 页的例 3).

结论 3 如果一个角所在平面外一点到角的两边的距离相等,那么这点在这平面内的射影在这个角的平分线上(见教科书《数学,第二册(下 B)》(人教版,2001 年第 2 版)第 23 页的例 4).

结论 2,3 是结论 1 在空间的推广,但结论 2,3 有不同之处.

结论 2 中“点到角的两边(射线)的距离”编者的本意可能是按观点 1 理解的,但结论也不完整.结论 2 中的“射影在这个角的平分线所在的直线上”应改为“射影在这个角的平分线所在的直线及其过角的顶点的垂线上”.

结论 3 中“点到角的两边的距离”编者的本意可能是按观点 2 理解的,若这样理解,则结论 3 无误.

以上教科书(下 A)第 70 页中说:"两条异面直线的距离,直线和平面的距离以及两个平行平面的距离,都是通过点与点的距离来定义的.它们实际上反映的都是两个点的集合中最近的两点(这两点各属于一个点集)间的距离."若把此观点拓展到任意两个点集(即图形)间的距离,则有:

观点 3 过一点作射线所在直线的垂线,若垂足在射线上,则点到射线所在直线的距离就是点到射线的距离;若垂足没在射线上,则点到射线的端点的距离就是点到射线的距离.

定理 按照观点 3 理解"点到射线的距离"有,在图 2 中,若直线 $COD\perp OA$,$EOF\perp OB$,OG 平分 $\angle AOB$,则平面内到 $\angle AOB$ 两边距离相等的点 P 在射线 OG,OD,OE 上或 $\angle DOE$ 内.

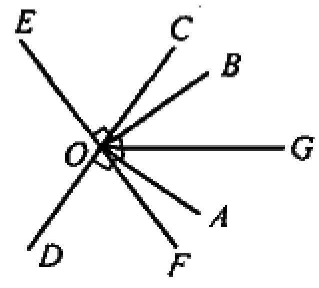


图 2

证明 若点 P 在 $\angle COF$ 内或射线 OC,OF 上,此时观点 3 与观点 1,2 相同,由结论 1 知,此时点 P 在射线 OG 上.

若点 P 在 $\angle COE$ 内,则 P 到 OA 的距离 PO 大于 P 到 OB 的距离(斜边大于直角边),所以满足定理题设的点 P 不在 $\angle COE$ 内;同理也不在 $\angle DOF$ 内.

当 P 在 $\angle DOE$ 内或射线 OD,OE 上时,P 到射线 OA,OB 的距离都是 PO. 定理获证.

读者容易把定理推广到空间的情形.

综上所述,应给出"点到射线的距离"的明确定义,在此定义下上述结论 1 及 2,3 才有准确表述,平面几何中也未明确给出"点到线段的距离"的定义.能否明确给出点、直线、平面及直线的部分、平面的部分之间距离的统一、简明、严格的定义(且对讨论其他问题带来方便)?

几何三文

1 两圆位置关系的数轴记忆法

记住图1的数轴图形后,容易给出两圆位置关系的判定条件:

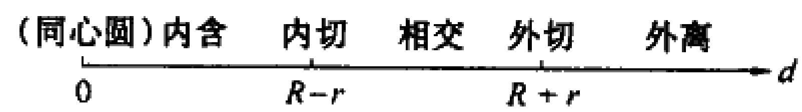


图1

(1) 两圆外离 $\Leftrightarrow d > R + r$;

(2) 两圆外切 $\Leftrightarrow d = R + r$;

(3) 两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$;

(4) 两圆内切 $\Leftrightarrow d = R - r \neq 0$;

(5) 两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r$(特例,两圆是同心圆 $\Leftrightarrow d = 0$ 且 $R \neq r$).

其中 d 表示圆心距,两圆半径分别是 $R, r(R \geqslant r)$.

注 这种数轴记忆法值得推广,比如还可用来记忆物理(初二)中的凸透镜成像规律.

2 求距离

如图2,已知 $\alpha // \beta, A, C \in \alpha, B, D \in \beta, AB + CD = 28$, AB, CD 在β内的射影长分别为5和9,求α与β的距离h.

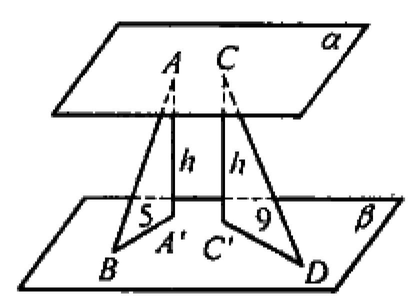


图2

解 记 A, C 在β内的射影分别是A', C',记α, β的距离为$h(AA' = CC' = h)$.设 $AB = x$,可得

$$h^2 = x^2 - 5^2 = (28 - x)^2 - 9^2$$

化简得关于x的一次方程$56x = 28^2 + 5^2 - 9^2$,易得$x = 13$,从而得 $h = 12$.(巧设是本题快解的关键)

3 解斜二测画法题的一般方法

根据斜二测画法的规则(如图3,这里 $\angle x'O'y' = 45°$)可知:已知图形中的点 $A(x, y)$ 在斜二测画法中对应的点 $A'(x', y')$ 的坐标满足

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{y}{2} \end{cases} \qquad ①$$

运用①即可解决有关斜二测画法题.

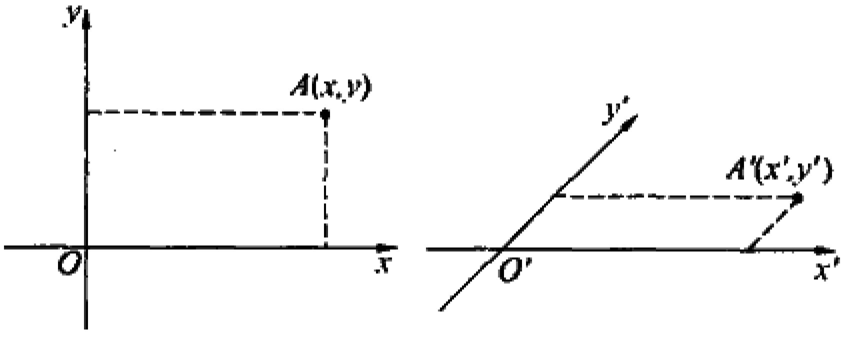


图 3

例 已知$\triangle OAB$的斜二测画法平面直观图$\triangle O'A'B'$是边长为1的正三角形(图4),求$\triangle OAB$的面积.

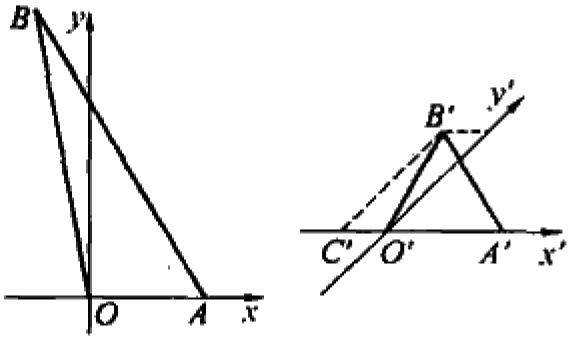


图 4

解 如图4,作$B'C' \parallel y'$轴交x'轴于C',在$\triangle O'B'C'$中,$\angle B'O'C' = 120°$,$\angle B'C'O' = 45°$,$O'B' = 1$,由正弦定理,得

$$\frac{1}{\sin 45°} = \frac{B'C'}{\sin 120°} = \frac{O'C'}{\sin 15°}$$

可得
$$B'C' = \frac{\sqrt{6}}{2}, O'C' = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

所以$B'\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

由①,得$B\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$,所以

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

立体几何中的两个“直线条数”问题及其解答

两条异面直线所成的角是锐角或直角，两条相交直线所成的角是指相交所成的四个角中的锐角或直角，两条直线平行或重合时所成的角是 $0°$. 按照这种约定，两直线所成角的范围是 $[0°,90°]$.

问题1 如图1，点 O 在平面 α 内，l 是空间内一条定直线，设 l 与 α 所成的角是 θ（θ 是定值，$0° \leqslant \theta \leqslant 90°$. 过点 O 作 $l' /\!/ l$，即 l' 与其在 α 内的射影所成的角是 θ），在 α 内过点 O 与 l 成 γ（$0° \leqslant \gamma \leqslant 90°$）角的直线有几条？

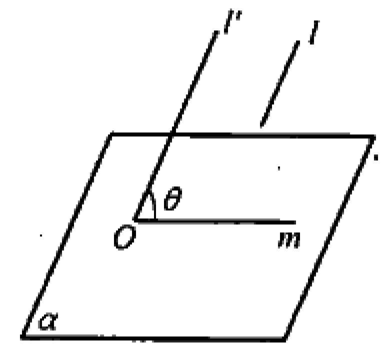


图1

问题1的答案是：

(1) 当 $\theta = 0°$ 即 $l' \subset \alpha$ 时：

① 又 $\gamma = 0°$ 或 $90°$ 时，所求的直线为1条，分别为 l' 或 l' 在 α 内过点 O 的垂线；

② 又 $0° < \gamma < 90°$ 时，所求的直线为2条，且这2条直线及 l' 组成底角为 γ 的等腰三角形；

(2) 当 $\theta = 90°$ 即 $l' \perp \alpha$ 时：

① 又 $0° \leqslant \gamma < 90°$ 时，所求的直线不存在；

② 又 $\gamma = 90°$ 时，所求的直线为无数条，即 α 内过点 O 的任意直线.

(3) 当 $0° < \theta < 90°$ 时：

① 又 $0° \leqslant \gamma < \theta$ 时，所求的直线不存在；

② 又 $\gamma = \theta$ 时，所求的直线为1条，即 l' 在 α 内的射影 m；

③ 又 $\theta < \gamma \leqslant 90°$ 时，所求的直线为2条，即与 l' 在 α 内的射影 m 所成的角为 $\arccos \dfrac{\cos \gamma}{\cos \theta}$ 的2条直线.

证明 (1)，(2) 显然成立.

(3) 由“斜线和平面所成的角，是这条斜线和这个平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角”知 ①，② 成立！下证 ③ 成立.

如图2，设 α 内过点 O 的直线 a 与 l' 成 γ 角，则由三角余弦定理，得

$$\cos \theta \cdot \cos \angle mOa = \cos \gamma$$

即所求直线 a 与 l' 在 α 内的射影 m 所成的角 $\angle mOa = \arccos \dfrac{\cos \gamma}{\cos \theta}$，易知此角是锐角，所以所求的直线有且仅有2条（图2中的 a, b），且 m 是 a, b 所形成一对对顶角的平分线.

问题2 如图3，$a \cap b = O$，a, b 所成的角为 θ（$0° \leqslant \theta \leqslant 90°$），过空间一

定点 P 与 a,b 所成的角均为 $\gamma(0^\circ \leqslant \gamma \leqslant 90^\circ)$ 的直线有几条?

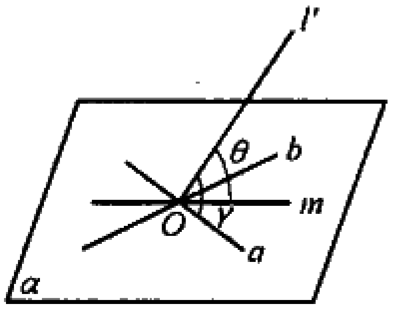


图 2

设过点 O 的直线 l' 与 a,b 所成的角均为 γ,又过点 P 作直线 $l \parallel l'$(则 l 存在且唯一),则 l 与 a,b 所成的角也均为 γ,所以由以下结论可得问题2的答案(当 $\theta = 0^\circ$ 时,a,b 重合,过点 P 的任意直线均满足题意):

(1) 当 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 时:

① 又 $0^\circ \leqslant \gamma < \frac{\theta}{2}$ 时,所求的直线不存在;

② 又 $\gamma = \frac{\theta}{2}$ 时,所求的直线为 1 条,即 a,b 所成锐角的角平分线所在的直线;

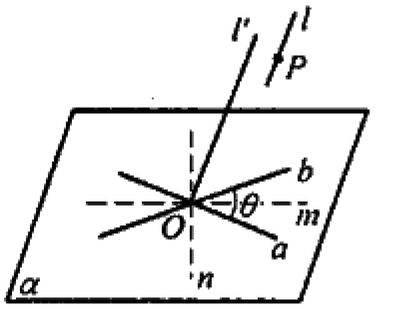


图 3

③ 又 $\frac{\theta}{2} < \gamma < 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ 时,所求的直线为 2 条,且它们在 a,b 确定的平面 α 内的射影均为 m;

④ 又 $\gamma = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ 时,所求的直线为 3 条,且其中 2 条在 α 内的射影均为 m,另一条即 m 在 α 内过点 O 的垂线 n;

⑤ 又 $90^\circ - \frac{\theta}{2} < r < 90^\circ$ 时,所求的直线为 4 条,且其中 2 条在 α 内的射影均为 m,另 2 条在 α 内的射影均为 n;

⑥ 当 $\gamma = 90^\circ$ 时,所求的直线为 1 条,即 α 的过点 O 的垂线.

(2) 当 $\theta = 90^\circ$ 时:

① 又 $0^\circ \leqslant \gamma < 45^\circ$ 时,所求的直线不存在;

② 又 $\gamma = 45^\circ$ 时,所求的直线为 2 条,即图 3 中的 m,n;

③ 又 $45^\circ < \gamma < 90^\circ$ 时,所求的直线为 4 条,其中 2 条在 α 内的射影为 m,另 2 条在 α 内的射影为 n;

④ 又 $\gamma = 90^\circ$ 时,所求的直线为 1 条,即 α 的过点 O 的垂线.

证明 由现行高中《数学》课本中的结论“从一个角的顶点引这个角所在平面的斜射线,使斜射线和这个角两边的夹角相等,则斜线在这个平面内的射影是这个角的平分线所在的直线”可知,l' 在 α 内的射影为 m 或 n(包括 $l' \subset \alpha$ 的情形).

若过点 O 的直线 l_1 在 α 内的射影为 m,则由三角余弦定理,得 $\cos\angle l_1Om \cdot \cos\angle mOa = \cos\angle l_1Oa$($Ol_1$ 与 Om 重合时也成立).

又 $\angle mOa = \frac{\theta}{2}$(定值),所以 $\angle l_1Oa$ 随 $\angle l_1Om$ 的增大而增大,且 $\angle l_1Oa \geqslant \frac{\theta}{2}$(当且仅当 Ol_1 与 Om 重合时取等号).

并注意 $\frac{\theta}{2} < 90^\circ - \frac{\theta}{2}$,可得要证结论成立.

从三角余弦定理到三垂线定理

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(下 B)》(2006 年人民教育出版社)第 48 页讲述了三角余弦定理:

如图 1,若 $OB\perp$ 面 BAC,则

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 \quad ①$$

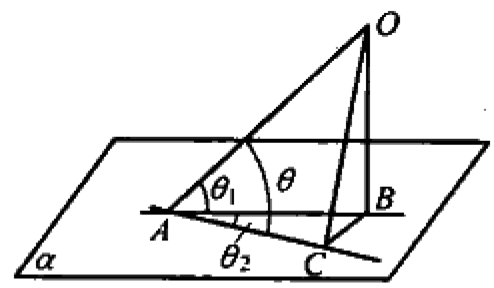


图 1

由教科书的叙述及证明知,公式①中的 θ,θ_1,θ_2 均是锐角.

事实上,当 $\theta_2=90°$ 时,由三垂线定理知,$\theta=90°$;当 $\theta=90°$ 时,由三垂线定理的逆定理知,$\theta_2=90$.说明 θ 或 θ_2 为直角时,式①也成立.

当 θ_2 是钝角时,下证式①也成立.

如图 2,作射线 AC 的反向延长线 AC',由式①,得

$$\cos\angle OAC'=\cos\angle OAB\cdot\cos\angle BAC'$$

$$\cos(\pi-\angle OAC')=\cos\angle OAB\cdot\cos(\pi-\angle BAC')$$

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$$

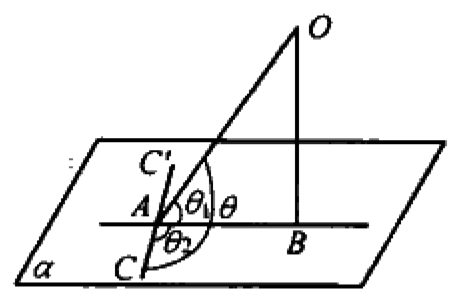


图 2

得式①成立.同理,可证 θ 是钝角时式①也成立.

从而可得:

广义的三角余弦定理 如图 1,设 $AB,AC\subset\alpha$,OA 与平面 α 所成的角是 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$,$OB\perp\alpha$ 于 B,则

$$\cos\angle OAC=\cos\angle OAB\cdot\cos\angle BAC$$

三垂线定理及其逆定理均是该定理的推论.

例 点 A 在直二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上,两条长等于 a 的线段 AB,AC 分别在平面 α,β 内,且与 l 都成 45° 角,则 BC 的长为( ).

A. a B. a 或 $\sqrt{2}a$ C. a 或 $\sqrt{3}a$ D. a 或 $\sqrt{5}a$

解 选 C.

对课本公式 $\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$ 的加强及其应用

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·(第二册(下A、下B))》(2006年人民教育出版社第2版)(下简称教科书)均有这样的一道习题:

题1 经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜射线,设它和已知角两边的夹角为锐角且相等,求证:这条射线在平面内的射影是这个角的平分线.

《教师教学用书》及通常的方法都是作辅助线后用两次证明三角形全等证出的,不是很难,但书写量却很大,而以后在做题时多次要用到这个结论,不得不按上述方法书写冗长的证明过程.本文运用教科书(下B)第48页的公式(本文就叫三角余弦公式)

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$$

它的含义是:如图1,从点 O 出发的三条射线 OA,OB,OC 若满足面 $AOB\perp$ 面 BOC(比方说,直线 OA 在面 BOC 上的射影就是直线 OB),则两个垂面上的角余弦之积是斜面上角的余弦,即

$$\cos\angle AOB\cdot\cos\angle BOC=\cos\angle AOC \quad ①$$

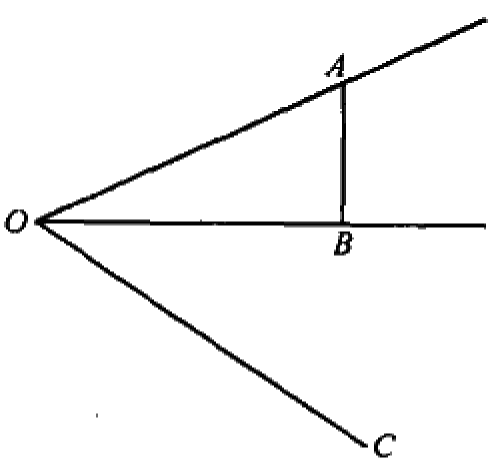


图1

请注意,该公式里的三个角可以是任意角(当然不会存在零角和平角,但并不需要教科书(下B)中限制的都是锐角),下面给出详细证明.

(1) 当 $\angle AOB$ 是锐角时,① 成立:

由教科书(下B)知,又当 $\angle BOC$ 是锐角时,① 成立;

又当 $\angle BOC$ 是直角时,① 成立:先得 $CO\perp$ 面 AOB;

又当 $\angle BOC$ 是钝角时,① 成立:作 CO 的反向延长线 OC',得 $\angle C'OB$ 是锐角,所以

$$\cos\angle AOB\cdot\cos\angle BOC'=\cos\angle AOC'$$

$$\cos\angle AOB\cdot\cos(\pi-\angle BOC')=\cos(\pi-\angle AOC')$$

$$\cos\angle AOB\cdot\cos\angle BOC=\cos\angle AOC$$

(2) 当 $\angle AOB$ 是直角时,① 成立:因为 $AO\perp$ 面 BOC.

(3) 当 $\angle AOB$ 是钝角时,① 成立:作 AO 的反向延长线 OA',得 $\angle A'OB$ 是锐

角,同上可证.

总之,① 成立.

下面用 ① 给出题 1 的巧证.

已知:如图 2,$OC \not\subset$ 面 AOB,$\angle COB = \angle COA$,$CH \perp$ 面 AOB 于 H.

求证:$\angle AOH = \angle BOH$.

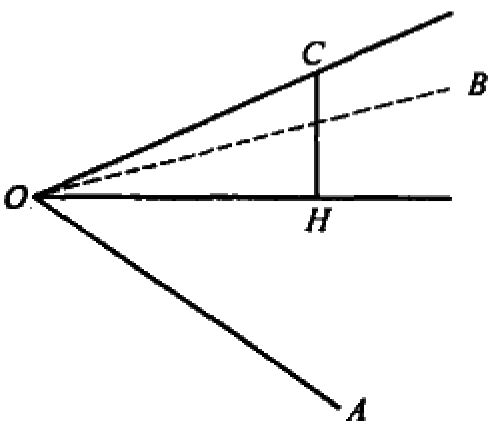


图 2

证明 如图 2,因为 $CH \perp$ 面 AOB 于 H,所以面 $COH \perp$ 面 AOH,面 $COH \perp$ 面 BOH,由 ① 得

$$\cos\angle AOH \cdot \cos\angle HOC = \cos\angle AOC = \cos\angle BOC = \cos\angle BOH \cdot \cos\angle HOC$$

$$\angle \cos\angle AOH = \cos\angle BOH$$

$$\angle AOH = \angle BOH$$

由以上证明知,题 1 中"锐角"的条件可以去掉.

顺便指出,教科书(下 A、下 B) 中均有这样的例题:"求证:如果一个角所在平面外一点到角的两边的距离相等,那么这点在平面内的射影在这个角的平分线上." 教科书是用两次证明三角形全等证出的,实际上可以只证一次,即证 $\triangle POE \cong \triangle POF$(HL),得 $OE = OF$(见教科书上的图形),再得欲证.

求二面角大小的适用向量方法

用向量法求二面角的大小 θ 常用的有两种:

(1) 先求出二面角 $\alpha-l-\beta$ 的面 α,β 的法向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$,则

$$\cos\theta=\pm\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$$

再由 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的方向或先确定二面角 $\alpha-l-\beta$ 是锐角或钝角确定出“±”,从而可求出 θ.

(2) 欲求二面角 $C-AB-D$ 的大小(点 A,B,C,D 的坐标均已知),设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$,由定比分点坐标公式可以求出点 M 的坐标(仅用 λ 表示),若 $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{AB}$,得 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,可求出 λ,进而得点 M 的坐标;同理,当 $\overrightarrow{DN}\perp\overrightarrow{AB}$ 时,可求出点 N 的坐标,所以可求出 $\overrightarrow{MC},\overrightarrow{ND}$ 的坐标,得

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ND}}{|\overrightarrow{MC}|\cdot|\overrightarrow{ND}|}$$

从而可求出 θ.

方法(1)中求两个法向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的运算量已经很大(只有极少数情形的法向量可以直接观察得到),更难的是确定“±”.方法(2)没有确定“±”的麻烦,但运算量更大.

本文对方法(2)做点微调,便得到了适用的方法——以例题阐述之.

引理 点 M 在直线 AB 上的充要条件是存在实数 λ,使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.

例 如图1,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,$AD\parallel BC$,$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,$AB=BC=PA=1$,$AD=3$,求二面角 $B-PC-D$ 的大小.

解 如图1,以 A 为坐标原点,射线 AB,AD,AP 分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正向,建立空间直角坐标系,则 $B(1,0,0)$,$P(0,0,1)$,$C(1,1,0)$,$D(0,3,0)$,得

$$\overrightarrow{BP}=(-1,0,1),\overrightarrow{BC}=(0,1,0),\overrightarrow{DP}=(0,-3,1)$$
$$\overrightarrow{DC}=(1,-2,0),\overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$$

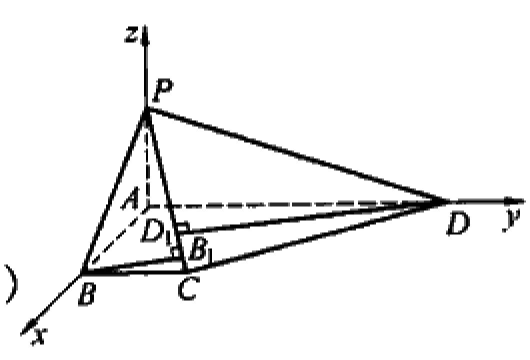


图1

设 $BB_1\perp PC$,垂足为点 B_1,则

$$\overrightarrow{BB_1} = \lambda \overrightarrow{BP} + (1-\lambda)\overrightarrow{BC}$$

由$\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$,可算得

$$\lambda = \frac{1}{3}, \overrightarrow{BB_1} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

再设 $DD_1 \perp PC$,垂足为点 D_1,则

$$\overrightarrow{DD_1} = \mu \overrightarrow{DP} + (1-\mu)\overrightarrow{DC}$$

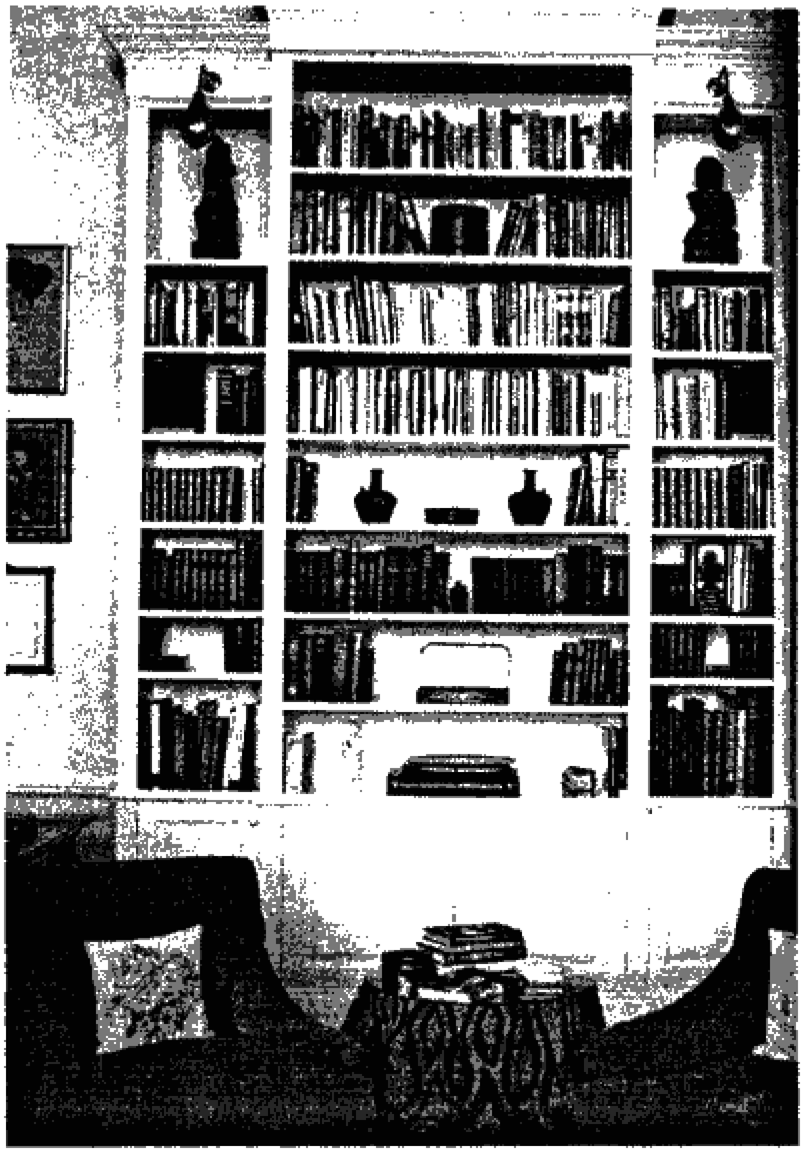
由$\overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$,可算得

$$\mu = -\frac{1}{3}, \overrightarrow{DD_1} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

所以
$$\cos < \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{DD_1} > = \frac{\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{DD_1}}{|\overrightarrow{BB_1}||\overrightarrow{DD_1}|} = -\frac{5}{14}\sqrt{7}$$

所求二面角 $B-PC-D$ 的大小为 $< \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{DD_1} > = \pi - \arccos\frac{5}{14}\sqrt{7}$.

排列、组合与二项式定理



$(ax+by)^n$ 的展开式系数绝对值的单峰性

我们知道,二项展开式 $(x+y)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^ix^{n-i}y^i$ 的各项系数 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 的大小规律具有单峰性,即

当 n 为偶数时,$C_n^0<C_n^1<\cdots<C_n^{\frac{n}{2}},C_n^{\frac{n}{2}}>C_n^{\frac{n}{2}+1}>\cdots>C_n^n$;

当 n 为奇数时,$C_n^0<C_n^1<\cdots<C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}},C_n^{\frac{n+1}{2}}>C_n^{\frac{n+1}{2}+1}>\cdots>C_n^n$.

实际上

$$(ax+by)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^{n-i}b^ix^{n-i}y^i(a,b\in\mathbf{R},ab\neq0,n\in\mathbf{N}^*) \quad ①$$

的各项系数的绝对值

$$g_{i+1}=C_n^i|a|^{n-i}|b|^i(i=0,1,\cdots,n) \quad ②$$

的大小规律也具有单峰性,本文给出这方面的结论.

定理 ② 中的 g_{i+1} 具有单峰性,即 $i<(=,>)p$(本文中令 $p=\dfrac{n+1}{\left|\frac{a}{b}\right|+1}$)时,$g_i<(=,>)g_{i+1}$.

证明 $\dfrac{g_{i+1}}{g_i}=\dfrac{C_n^i|a|^{n-i}|b|^i}{C_n^{i-1}|a|^{n-i+1}|b|^{i-1}}=\left(\dfrac{n+1}{i}-1\right)\left|\dfrac{b}{a}\right|$

从而可证 $i<(=,>)p$ 时,$\dfrac{g_{i+1}}{g_i}>(=,<)1$,即 $g_i<(=,>)g_{i+1}$.

推论 1 (本文用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

(1) 若 $p\in\mathbf{N}^*$,则 $g_1<\cdots<g_{p-1}<g_p=g_{p+1},g_{p+1}>g_{p+2}>\cdots>g_{n+1}$,即 ① 中系数绝对值最大的项是第 p 项与第 $p+1$ 项 $g_p=g_{p+1}$;

(2) 若 $p\notin\mathbf{N}^*$,则 $g_1<\cdots<g_{[p]}<g_{[p]+1},g_{[p]+1}>g_{[p]+2}>\cdots>g_{n+1}$,即 ① 中系数绝对值最大的项是第 $[p]+1$ 项 $g_{[p]+1}$.

在推论 1 中,取 $a=b=1$,可得 $(x+y)^n$ 的展开式中系数 $C_n^i(i=0,1,\cdots,n)$ 大小的单峰性,即本文开头的叙述.

推论 2 $(ax-by)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^ia^{n-i}b^ix^{n-i}y^i(a,b\in\mathbf{R}^+,n\in\mathbf{N}^*)$ ③

的各项系数

$$h_{i+1}=(-1)^{i}C_{n}^{i}a^{n-i}b^{i}(i=0,1,\cdots,n) \quad ④$$

中$\left(记\ q=\dfrac{n+1}{\dfrac{a}{b}+1}\right)$,

(1) 当 $q\in\mathbf{N}^{*}$ 时:若 q 为偶数,则③中系数最大的项是第 $q+1$ 项,系数最小的项是第 q 项;若 q 为奇数,则③中系数最大的项是第 q 项,系数最小的项是第 $q+1$ 项.

(2) 当 $q\notin\mathbf{N}^{*}$ 时:若$[q]$为偶数,则③中系数最大的项是第$[q]+1$项;若$[q]$为奇数,则③中系数最小的项是第$[q]+1$项.

证明 由条件可得,在④中,

h_{i+1} 最大 $\Leftrightarrow |h_{i+1}|=g_{i+1}$ 最大,且 $i+1$ 为奇数;

h_{i+1} 最小 $\Leftrightarrow |h_{i+1}|=g_{i+1}$ 最大,且 $i+1$ 为偶数.

再由推论1,可证得推论2成立.

用本文的结论或方法,可方便地解决有关问题.

例1 $(x-1)^{11}$ 按降幂排列的展开式中,系数最大的项是第几项?

解 用推论2,$a=b=1,q=6$,所以展开式中系数最大的项是第7项.

例2 在$(x-y)^{n}(n\in\mathbf{N}^{*})$按 x 降幂排列的展开式中,系数最大的项与系数最小的项的系数互为相反数,求出所有这样的 n.

解 用推论1.因为$(x-y)^{n}$展开式中系数绝对值最大的项有两项,所以 $p=\dfrac{n+1}{2}\in\mathbf{N}^{*}$,得 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^{*})$(为全体奇数).

又由推论2(1)得,$(x-y)^{2k-1}$的第 $k,k+1$ 两项系数一最大,另一最小,且互为相反数,所以所求的 n 是全体奇数.

例3 $(2x-3y)^{5}$ 的展开式中系数绝对值最大的项是第几项?

解 用推论1,得 $p=3.6\notin\mathbf{N}^{*}$.

所以由推论1(2)得,所求的是第4项.

例4 已知$\left(\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{7}\right)^{n}(n\in\mathbf{N}^{*})$的展开式中系数最大的项是第10项,求 n.

解 用推论1,得 $p=\dfrac{n+1}{3.8}$.

因为展开式中系数绝对值最大的项只有一项(是第10项),所以由推论1(2),得$\dfrac{n+1}{3.8}\notin\mathbf{N}^{*}$,且$\left[\dfrac{n+1}{3.8}\right]+1=10$,所以

$$9<\frac{n+1}{3.8}<10$$

$$33.2<n<37$$

因为 $n\in\mathbf{N}^{*}$,所以 $n=34,35$ 或 36.

例 5 已知$\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{7}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中第 10 项系数最大,求 n.

解 用推论 1,得 $p=\frac{n+1}{3.8}$.

因为展开式中第 10 项(不一定仅仅这一项)系数绝对值最大,所以当 $p\in\mathbf{N}^*$ 时,$p=10$,或 $p+1=10$,可得 $n=37$;

当 $p\notin\mathbf{N}^*$ 时,例 4 已求得 $n=34,35$ 或 36,所以

$$n=34,35,36\text{ 或 }37$$

例 6 求$\left(2x-\frac{1}{2}\right)^9$的展开式中系数最大的项,系数最小的项,系数的绝对值最小的项.

解 先用推论 2,$q=2$,由推论 2(1),得$\left(2x-\frac{1}{2}\right)^9$的展开式中系数最大的项是第 3 项,为 $C_9^2(2x)^{9-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1\ 152x^7$,系数最小的项是第 2 项,为 $C_9^1(2x)^{9-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^1=-1\ 152x^7$.

再由推论 1 知,展开式中系数绝对值最小的项是首项或末项,易得为最后一项,即$\left(-\frac{1}{2}\right)^9=-\frac{1}{512}$.

错位数公式的化简

错位排列数 把编号为 1,2,…,n 的 n 个球装入编号为 1,2,…,n 的 n 个盒子中,每个盒子装一个球,但 1 号盒子里不能装 1 号球,2 号盒子里不能装 2 号球,…,n 号盒子里不能装 n 号球,这种装球的方法就叫做 1,2,…,n 的错位排列,这种装球的方法数就叫做 1,2,…,n 的错位排列数,记作 D_n.

显然,$D_1=0, D_2=1, D_3=2, D_4=9$.

同时,还得到了关于 D_n 的递推公式及直接计算公式

$$D_{n+2}=(n+1)(D_n+D_{n+1})(n\in \mathbf{N}^*) \qquad ①$$

$$D_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right] \qquad ②$$

本文化简公式②,得到了定理 1.

定理 1 D_n 就是与 $\frac{n!}{\mathrm{e}}$ 最接近的整数,其中 e 是自然对数的底,即 $\mathrm{e}=2.718\,28\cdots$.

证明 在 e^x 的幂级数展开式中,令 $x=1$,得

$$\frac{1}{\mathrm{e}}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}+\cdots \qquad ③$$

下面证明

$$\left|D_n-\frac{n!}{\mathrm{e}}\right|<\frac{1}{n+1} \qquad ④$$

只要证 $\left|\frac{D_n}{n!}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right|<\frac{1}{(n+1)!}$ 即可.由式②,式③,可得

$$\left|\frac{D_n}{n!}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right|<\left|\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\frac{1}{(n+4)!}+\cdots\right|=$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left|1-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)-\cdots\right|<$$

$$\frac{1}{(n+1)!}$$

又由式④,得 $\left|D_n-\frac{n!}{\mathrm{e}}\right|<\frac{1}{n+1}$,因此

$$\frac{n!}{\mathrm{e}}-\frac{1}{n+1}<D_n<\frac{n!}{\mathrm{e}}+\frac{1}{n+1} \qquad ⑤$$

由式⑤就可说明定理 1 成立.

注意到$\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$，$\frac{n!}{e}$的小数部分$\left\{\frac{n!}{e}\right\}\left(=\frac{n!}{e}-\left[\frac{n!}{e}\right]\right) \in\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup\left(\frac{1}{2}, 1\right)$从而

(1) 当$\left\{\frac{n!}{e}\right\} \in\left(0, \frac{1}{2}\right)$时，由式⑤，得$D_n=\left[\frac{n!}{e}\right]$（即$\frac{n!}{e}$的整数部分）；

(2) 当$\left\{\frac{n!}{e}\right\} \in\left(\frac{1}{2}, 1\right)$时，由式⑤，得$D_n=\left[\frac{n!}{e}\right]+1$.

综上所述，定理 1 成立.

例 求 D_8 的值.

解 $\frac{8!}{e}=\frac{40\,320}{e}=14\,832.9\cdots$，由定理 1，可得 $D_8=14\,833$.

一种有趣的排列

请看排列"312132",两个1之间恰有一个数字,两个2之间恰有两个数字,两个3之间恰有三个数字.把上述排列的数字顺序反过来,得到的排列"231213"也具有上述特征.

排列"41312432","23421314"也有以上类似性质.

而用两个1,两个2,……,两个5却不能排出以上类似性质的排列.

结论 若能用两个1,两个2,……,两个n排成两个1之间恰有一个数,两个2之间恰有两个数,……,两个n之间恰有n个数的一个排列,则n是4的倍数或$n+1$是4的倍数.

证明 在这种排列中,设1第一次出现在第a_1个位置上,2第一次出现在第a_2个位置上,…,n第一次出现在第a_n个位置上,则1第二次出现在第a_1+2个位置上,2第二次出现在第a_2+3个位置上,……,n第二次出现在第a_n+n+1个位置上,从而下式显然成立

$$1+2+3+\cdots+2n=(a_1+a_1+2)+(a_2+a_2+3)+\cdots+(a_n+a_n+n+1)$$

所以
$$\frac{2n(2n+1)}{2}=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\frac{n(n+3)}{2}$$

所以
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{3n^2-n}{4}$$

所以
$$n^2-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{n(n+1)}{4}$$

故可得$n(n+1)$是4的倍数.

又$n,n+1$互质,所以n是4的倍数或$n+1$是4的倍数.

由结论知,当$n=1,2,5,6,9,10$时,不能得到类似本文开头的排列;当$n=3,4,7,8,11,12$时,可得到类似本文开头的排列.

排列"71416354732652","15146735423627","8131743568427526"及其反序也有类似特征.若作一般性研究,是有困难的.

若在排列"312132"中用1,2,3分别代表红、黄、蓝三色,则可把六张纸条(红、黄、蓝各两张)排成两张红色之间恰有一张别的颜色,两张黄色之间恰有两张别的颜色,两张蓝色之间恰有三张别的颜色的一种排法.这种排法仅有两种.

一道简单的计数原理趣题

题 从山下走到山顶,只有南坡 3 条不同的路径和北坡 2 条不同的路径(图 1).

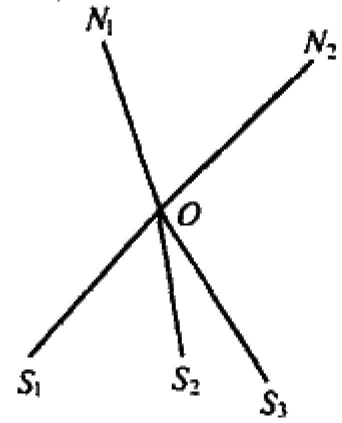


图 1

(1) 从山下上山,有几种不同的走法?

(2) 从南坡上山再从北坡下山,有几种不同的走法?

(3) 先上山再下山,有几种不同的走法?

解 (1) 共有 $S_1O,S_2O,S_3O;N_1O,N_2O$ 即 $3+2=5$ 种不同的走法.

(2) 共有 $S_1ON_1,S_1ON_2;S_2ON_1,S_2ON_2;S_3ON_1,S_3ON_2$ 即 $2\times3=6$ 种不同的走法.

(3) 共有南上北下 2×3 + 北上南下 3×2 + 南上南下 3×3 + 北上北下 $2\times2=25$ 种不同的走法.

(3) 的另解因为上山有 $2+3=5$ 种不同的走法,下山也有 $2+3=5$ 种不同的走法,所以先上山再下山,有 $5\times5=25$ 种不同的走法.

注 本题题意简洁,情景熟悉,是分类计数原理与分步计数原理的一道好题,此应用题可总结出这两个计数原理.

用四面体解决异面直线的计数问题

用结论“四面体的六条棱中恰有三对棱异面”可以方便地解决异面直线的计数问题.

例1 过三棱柱任意两个顶点的直线共有 15 条,其中的异面直线有( ).

A.18 对 B.24 对 C.30 对 D.36 对

解 以三棱柱的顶点为顶点的四面体的个数为 $C_6^4-3=12$,又每个四面体对应三对异面直线,所以异面直线共有 36 对.选 D.

例2 过长方体的任意两个顶点的直线共有 28 条,其中异面直线共有____对.

解 以长方体的顶点为顶点的四面体的个数为 $C_8^4-12=58$,又每个四面体对应三对异面直线,所以异面直线共有 $58\times3=174$ 对.填“174”.

例3 过正五棱柱的任意两个顶点的直线共有 $C_{10}^2=45$ 条,其中异面直线共有________对.

解 以正五棱柱的顶点为顶点的四面体的个数为 $2C_5^3C_5^1+C_5^2(C_5^2-2)=180$,又每个四面体对应三对异面直线,所以异面直线共有 $180\times3=540$ 对.填“540”.

用“五环旗”解一道数学题

中国北京赢得公元2008年(第29届)的奥林匹克运动会举办权,这是全中国人民为之高兴的盛事.笔者作为一个中国人,一位体育爱好者,一名数学教育工作者,谨编拟一道数学题,让读者做一做,以表达心中的喜悦之情.

题目 从含甲、乙、丙的8人中选5人报名参加运动会,每人限报一项,每项限报一人,且甲、乙、丙均不能报跳高,甲、丙均不能报跳远,问有多少种不同的报名办法?

解 在图1中,用矩形I表示8人中选5人参加运动会的报名办法的集合(本文用$|I|$表示集合I的元素个数(其余类似),有$|I|=A_8^5$).用圆A表示从8人中选5人参加运动会并且甲必须报跳高的报名办法的集合(有$|A|=A_7^4$),用圆B表示从8人中选5人参加运动会并且乙必须报跳高的报名办法的集合(有$|B|=A_7^4$),用圆C表示从8人中选5人参加运动会并且丙必须报跳高的报名办法的集合(有$|C|=A_7^4$),因为每项限报一人,所以

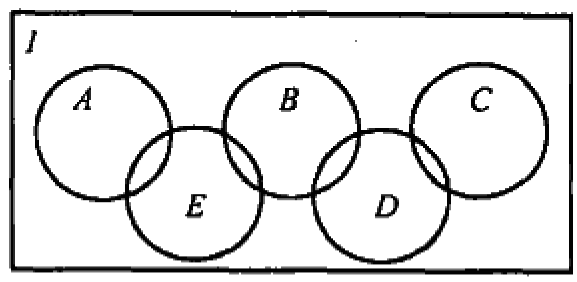


图1

$$A\cap B=B\cap C=C\cap A=\varnothing$$

用圆D表示从8人中选5人报名参加运动会并且甲必须报跳远的报名办法的集合(有$|D|=A_7^4$),用圆E表示从8人中选5人报名参加运动会并且丙必须报跳远的报名办法的集合(有$|E|=A_7^4$).显然$D\cap E=\varnothing$.

又由每人限报一项知

$$A\cap D=C\cap E=\varnothing$$

所以集合I,A,B,C,D,E之间的关系如图1所示,形成“奥运会会旗”的图案.并且$|A\cap E|=|\{$从8人中选5人参加运动会并且甲必须报跳高、丙必须报跳远的报名办法$\}|=A_7^3$,同理

$$|B\cap E|=|B\cap D|=|D\cap C|=A_7^3$$

结合图1,可得本题的答案为

$$A_8^5-5A_7^4+4A_7^3=3\ 000$$

注 该题的一般情形是:

从含甲、乙、丙的$n(n\geqslant m\geqslant 3)$个人中选$m$个人报名参加运动会,每人限报一项,每项限报一人,且甲、乙、丙均不能报跳高,甲、丙均不能报跳远,问有多少种不同的报名办法?

解 $A_n^m-5A_{n-1}^{m-1}+4A_{n-2}^{m-2}=(n-3)^2A_{n-2}^{m-2}$.

组合数的性质 $iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1}$ 在方差中的运用

读者可能熟悉组合数的以下性质及其运用

$$iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1} \quad ①$$

由 ① 还可得

$$i(i-1)C_n^i = n(n-1)C_{n-2}^{i-2} \quad ②$$

全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》(2004年人民教育出版社)第13～14页写到:"如果 $\xi \sim B(n,p)$,那么 $D\xi = npq$,这里 $q = 1-p$."但没有给出证明.实际上,用 ② 可以证出(还要用到 $E\xi = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i q^{n-i} = np$).

证明

$$\begin{aligned} D\xi &= \sum_{i=0}^{n}(i-np)^2 \cdot C_n^i p^i q^{n-i} = \\ &\sum_{i=0}^{n} i^2 C_n^i p^i q^{n-i} - 2np\sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i q^{n-i} + n^2p^2\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = \\ &\sum_{i=0}^{n} i(i-1)C_n^i p^i q^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i q^{n-i} - 2np\sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i q^{n-i} + \\ &n^2p^2\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = \\ &p^2\sum_{i=2}^{n} n(n-1)C_{n-2}^{i-2}p^{i-2}q^{(n-2)-(i-2)} + \\ &np - 2np \cdot np + n^2p^2(p+q)^n = \\ &n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^j p^j q^{n-2-j} + np - n^2p^2 = \\ &n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np - n^2p^2 = npq \end{aligned}$$

还可把 ①② 推广为

$$A_i^k C_n^i = A_n^k C_{n-k}^{i-k} \quad ③$$

由 ③ 还可证

$$\sum_{i=k}^{n} A_i^k C_n^i p^i q^{n-i} = A_n^k p^k (p+q)^{n-k} \quad ④$$

证明 $\sum_{i=k}^{n} A_i^k C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=k}^{n} A_n^k C_{n-k}^{i-k} p^i q^{n-i} =$

$$A_n^k p^k \sum_{i-k=0}^{n-k} C_{n-k}^{i-k} p^{i-k} q^{(n-k)-(i-k)} =$$

$$A_n^k p^k \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^{j} p^j q^{n-k-j} = A_n^k p^k (p+q)^{n-k}$$

有众多文献[1-5]研究了 $\sum_{i=1}^{n} i^k C_n^i$ 的求法，还未见文章研究 $\sum_{i=1}^{n} i^k C_n^i p^i q^{n-i}$ 的求法.

用待定系数法总可把 i^k（k 是已知的正整数）表示成 $A_i^k, A_i^{k-1}, \cdots, A_i^1, A_i^0$ 的线性组合：$i^k = a_k A_i^k + a_{k-1} A_i^{k-1} + \cdots + a_1 A_i^1 + a_0$（$a_k, a_{k-1}, \cdots, a_1, a_0$ 是仅与 k 有关的常数）.

从而由 ④ 还可求出 $\sum_{i=1}^{n} i^k C_n^i p^i q^{n-i}$.

参考文献

[1] 中一，赵建林. 关于 $\sum_{j=0}^{n} j^k C_n^j = ?$ 的猜想[J]. 中等数学，1987(6)：17-18.

[2] 叶军. 关于 $\sum_{r=0}^{n} r^k C_n^r$ 的猜想的证明[J]. 中等数学，1989(12)：27-29.

[3] 王进麟，曾亮. 自然数方幂迭乘和 $\sum_{m=1}^{n} m^k C_n^m$[J]. 数学教学研究，1989(3)：25-26.

[4] 王尊全. $\sum_{k=1}^{n} k^m C_n^k$ 的计算[J]. 湖南数学通讯，1994(4)：38-39.

[5] 王云葵. 等幂迭乘和 $\sum_{k=1}^{n} k^m C_n^k$ 的简捷算法[J]. 湖南数学通讯，1995(1)：40-41.

传球问题的一般解法

题 (1)甲、乙、丙三人练习传球,从甲开始,则第5次仍传给甲的传法有几种?

(2)将上述问题推广:包含甲在内的 $m(m\geqslant 2)$ 个人练习传球,设传球 n 次,球首先从甲手中传出,第 n 次仍传给甲,共有多少种传法?

为解决此问题,设第 n 次传给甲的传法有 a_n 种,第 n 次不传给甲的传法有 b_n 种.

① 求 a_1,b_1,a_2,并从排列、组合的角度给出 $a_{n+1}=b_n$ 的合理解释;

② 给出 $a_n+b_n=(m-1)^n$ 的合理解释;

③ 设 $c_n=\dfrac{a_n}{(m-1)^n}$,求证:$\{c_n-\dfrac{1}{m}\}$ 是等比数列;

④ 求 a_n,并用(1)的结果加以验证;

⑤ 给出 c_n 的概率意义.

(3)包含甲在内的 $m(m\geqslant 2)$ 个人练习传球,设传球 n 次,球首先从甲手中传出,第 n 次不传给甲而传给甲之外的某个人,设共有 a'_n 种传法,求 a'_n,并求第 n 次传给甲之外的某个人的概率 c'_n.

解 (1)由图1知,有10种传法.

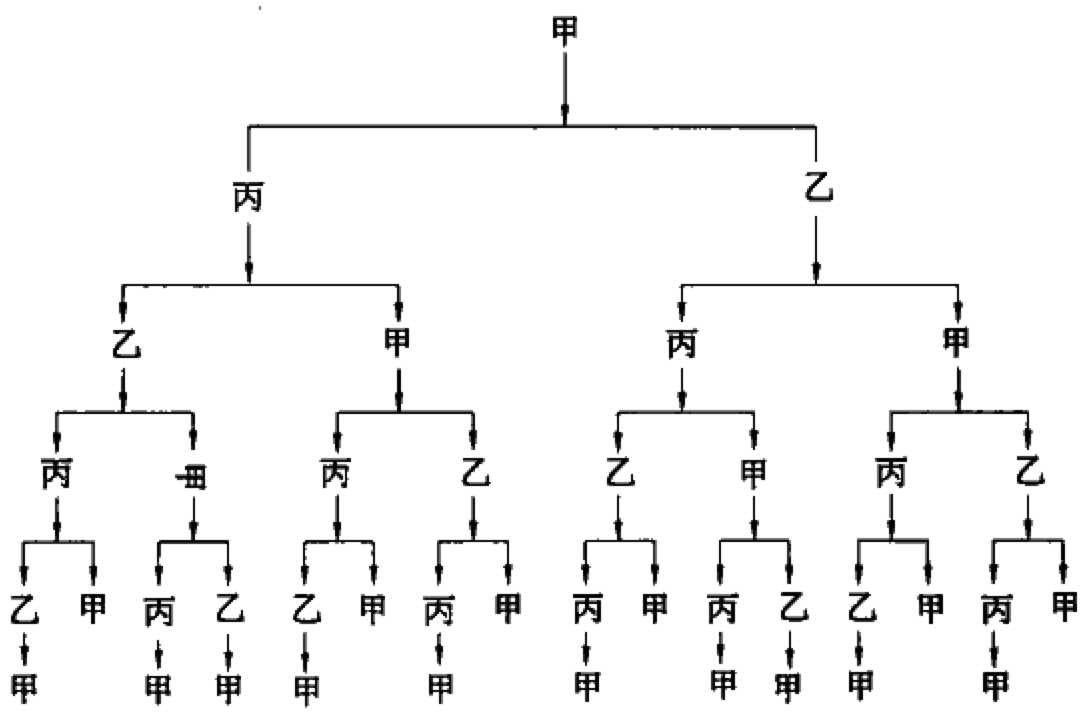


图1

(2)①$a_1=0,b_1=m-1,a_2=m-1$.

a_{n+1}表示传球$n+1$次,第$n+1$次传给甲的传法种数.可分两步:第一步传前n次,第n次不传给甲,共b_n种传法;第二步传第$n+1$次,传给甲,只有1种传法,所以

$$a_{n+1}=b_n\cdot 1=b_n.$$

② a_n+b_n表示传球n次所有的传法种数,而每次都有$m-1$种传法,所以

$$a_n+b_n=(m-1)^n$$

③由②,得

$$a_n+a_{n+1}=(m-1)^n$$

又 $$c_n=\frac{a_n}{(m-1)^n}$$

即 $$a_n=c_n(m-1)^n$$

得

$$c_n(m-1)^n+c_{n+1}(m-1)^{n+1}=(m-1)^n$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{1-m}c_n+\frac{1}{m-1}$$

下面用待定系数法求$\{c_n\}$的通项公式.得

$$c_{n+1}+x=\frac{1}{1-m}c_n+\frac{1}{m-1}+x=\frac{1}{1-m}[c_n-1+(1-m)x]$$

令$x=-1+(1-m)x$,解得

$$x=-\frac{1}{m}$$

所以 $$c_{n+1}-\frac{1}{m}=\frac{1}{1-m}(c_n-\frac{1}{m})$$

又$c_1=\frac{a_1}{m-1}=0$,所以$\{c_n-\frac{1}{m}\}$是以$-\frac{1}{m}$为首项,$\frac{1}{1-m}$为公比的等比数列.

④得 $c_n-\frac{1}{m}=-\frac{1}{m}(\frac{1}{1-m})^{n-1}$,$c_n=\frac{1}{m}-\frac{1}{m}(\frac{1}{1-m})^{n-1}$

$$a_n=c_n(m-1)^n=\frac{(m-1)^n}{m}+\frac{m-1}{m}(-1)^n$$

⑤因为$c_n=\frac{a_n}{(m-1)^n}=\frac{1}{m}[1-(\frac{1}{1-m})^{n-1}]$,所以$c_n$表示包含甲在内的$m(m\geqslant 2)$个人练习传球,设传球$n$次,球首先从甲手中传出,第$n$次传给甲的概率.

由此可得与(1)同样的结果:当$m=3,n=5$时,$a_n=\frac{2^5}{3}+\frac{2}{3}(-1)^5=10$.

(3) 容易理解,第 n 次传给甲之外的 $m-1$ 个人中的每个人传法种数相等,都为 a'_n.所以

$$a_n+(m-1)a'_n=(m-1)^n$$

$$a'_n=\frac{(m-1)^n-a_n}{m-1}=(m-1)^{n-1}-\frac{(m-1)^{n-1}}{m}-\frac{(-1)^n}{m}=\frac{(m-1)^n-(-1)^n}{m}$$

$$c'_n=\frac{a'_n}{(m-1)^n}=\frac{1}{m}\left[1-\frac{1}{(1-m)^n}\right]$$

解罢此题,读者对抽象、复杂的传球问题的解法一定很清楚了吧!

一个组合恒等式的简证

高三学生欧阳昊在紧张的学习之余,发现了如下组合数恒等式[1]

$$C_r^0C_n^m + C_r^1C_n^{m+1} + C_r^2C_n^{m+2} + \cdots + C_r^rC_n^{m+r} = C_{n+r}^{m+r}(r \in \mathbf{N}^*, m + r \leqslant n)$$

并对 r 用数学归纳法给出了证明.

本文将给出此式的两个简证.

在上式中令 $m = n - t$,得上式即

$$C_r^0C_n^t + C_r^1C_n^{t-1} + C_r^2C_n^{t-2} + \cdots + C_r^rC_n^{t-r} = C_{r+n}^t(r \leqslant t) \quad ①$$

考察恒等式

$$(1 + x)^r(1 + x)^n = (1 + x)^{r+n}$$

两边展开式中 x^t 的系数,立知式 ① 成立.

在式 ① 可令 $r = t = n$,得

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

此式就是全日制普通高级中学教科书(必修)《数学・第二册(下 A)》(2004 年人民教育出版社)第 117 页第 8(1)题的结论.

用组合数容易解释式 ① 成立:

从 $r + n$ 个不同的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{r+n}$ 中取出 t 个元素的取法是 C_{r+n}^t 种.

也可先把这 $r + n$ 个元素分成两类:$a_1, \cdots, a_r$ 和 $a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_{r+n}$.先从第一类中取 0 个,第二类中取 t 个,取法是 $C_r^0C_n^t$ 种;再从第一类中取 1 个,第二类中取 $t - 1$ 个,取法是 $C_r^1C_n^{t-1}$ 种;又从第一类中取 2 个,第二类中取 $t - 2$ 个,取法是 $C_r^2C_n^{t-2}$ 种;…;最后从第一类中取 r 个,从第二类中取 $t - r$ 个,取法是 $C_r^rC_n^{t-r}$ 种.得取法的总数是式 ① 的左边.

所以式 ① 成立.

文献[2]对 n 用数学归纳法证得了另一个组合数恒等式

$$C_s^sC_{n-1}^r + C_{s+1}^sC_{n-2}^r + C_{s+2}^sC_{n-3}^r + \cdots + C_{n+s-r-1}^sC_r^r = C_{n+s}^{r+s+1} \quad ②$$

①② 貌似质不同,请问式 ② 有简洁的证法吗?也能用组合数给予解释吗?

参考文献

[1] 欧阳昊.发现数学[J].数学通讯,2006(10):48.

[2] 唐大健.一个新的组合数恒等式[J].中学数学月刊,2006(2):46-47.

几个排列恒等式及两类递推数列

定理1 设 $n,i\in\mathbf{N}^*$,则

(1)$A_n^{i+1}+(i+1)A_n^i=A_{n+1}^{i+1}$;

(2)$\dfrac{A_n^i}{(i-1)!!}+\dfrac{A_n^{i+1}}{(i+1)!!}=\dfrac{A_{n+1}^{i+1}}{(i+1)!!}$.

(这里约定 $0!!=A_n^0=A_0^0=1$,下面)

定理2 设 $n,i\in\mathbf{Z}$,则

(1)$\dfrac{A_{2n}^{2i+2}}{(2i+2)!!}+\dfrac{A_{2n}^{2i+1}}{(2i)!!}=\dfrac{A_{2n+1}^{2i+2}}{(2i+2)!!}(0\leqslant i\leqslant n-1)$;

(2)$\dfrac{A_{2n+1}^{2i}}{(2i)!!}+\dfrac{A_{2n+1}^{2i-1}}{(2i-2)!!}=\dfrac{A_{2n+2}^{2i}}{(2i)!!}(1\leqslant i\leqslant n)$;

(3)$\dfrac{A_{2n+2}^{2n+2}}{(2n+2)!!}=\dfrac{A_{2n+1}^{2n+1}}{(2n)!!}$

定理3 设 $a_{n+1}=a_1+\dfrac{n}{a_n}$,则 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,有

(1)$a_{2n-1}=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{A_{2n-1}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n-1-2i}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{A_{2n-2}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n-2-2i}}$;

(2)$a_{2n}=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{A_{2n}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n-2i}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{A_{2n-1}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n-1-2i}}$.

证明 下面对 n 用数学归纳法证明(1),(2)均成立.

易证 $n=1$ 时(1),(2)均成立.

假设 n 时以上两式均成立,下证 $n+1$ 时以上两式均成立.

$$a_{2n+1}=a_1+\frac{2n}{a_{2n}}=a_1+\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{2nA_{2n-1}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n-1-2i}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{A_{2n}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n-2i}}\text{(记此分母为 }A\text{)}=$$

$$\frac{1}{A}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{A_{2n}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n+1-2i}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_{2n}^{2i+1}}{(2i)!!}a_1^{2n-1-2i}\right]=$$

$$\frac{1}{A}\left[a_1^{2n+1}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{A_{2n}^{2j+2}}{(2j+2)!!}a_1^{2n-1-2j}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_{2n}^{2i+1}}{(2i)!!}a_1^{2n-1-2i}\right]=$$

$$\frac{1}{A}\left\{a_1^{2n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{A_{2n}^{2i+2}}{(2i+2)!!}+\frac{A_{2n}^{2i+1}}{(2i)!!}\right]a_1^{2n-1-2i}\right\}=$$

$$\frac{1}{A}\left[a_1^{2n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{A_{2n+1}^{2i+2}}{(2i+2)!!}a_1^{2n-1-2i}\right](\text{用定理 }2(1))=$$

$$\frac{1}{A}\left[a_1^{2n+1}+\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{2n+1}^{2j}}{(2j)!!}a_1^{2n+1-2j}\right]=\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{n}\frac{A_{2n+1}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n+1-2i}$$

得(1) 在 $n+1$ 时成立.

$$a_{2n+2}=a_1+\frac{2n+1}{a_{2n+1}}=a_1+\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{A_{2n+1}^{2i+1}}{(2i)!!}a_1^{2n-2i}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{A_{2n+1}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n+1-2i}}(\text{记此分母为 }B)=$$

$$\frac{1}{B}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{A_{2n+1}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n+2-2i}+\sum_{i=0}^{n}\frac{A_{2n+1}^{2i+1}}{(2i)!!}a_1^{2n-2i}\right]=$$

$$\frac{1}{B}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{A_{2n+1}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n+2-2i}+\sum_{j=1}^{n+1}\frac{A_{2n+1}^{2j-1}}{(2j-2)!!}a_1^{2n+2-2j}\right]=$$

$$\frac{1}{B}\left\{a_1^{2n+2}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A_{2n+1}^{2i}}{(2i)!!}+\frac{A_{2n+1}^{2i-1}}{(2i-2)!!}\right]a_1^{2n+2-2i}+\frac{A_{2n+1}^{2n+1}}{(2n)!!}\right\}=$$

$$\frac{1}{B}\left[a_1^{2n+2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_{2n+2}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n+2-2i}+\frac{A_{2n+1}^{2n+1}}{(2n)!!}\right](\text{用定理 }2(2))=$$

$$\frac{1}{B}\sum_{i=0}^{n+1}\frac{A_{2n+2}^{2i}}{(2i)!!}a_1^{2n+2-2i}$$

得(2) 在 $n+1$ 时也成立,所以定理 3 成立.

定理 4 若 $u_{n+2}=2u_{n+1}-pu_n, u_0=0, u_1=1$,则 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,有

(1) $u_{2n-1}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{2n-i-2}^{i}\cdot 2^{2n-2i-2}p^i$;

(2) $u_{2n}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{2n-i-1}^{i}2^{2n-2i-1}p^i$.

证明 $n=1$ 时以上两式均成立.

假设 n 时以上两式均成立,得

$$u_{2n+1}=2u_{2n}-pu_{2n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{2n-i-1}^{i}\cdot 2^{2n-2i}p^i+$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}C_{2n-i-2}^{i}\cdot 2^{2n-2i-2}p^{i+1}=$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^iC_{2n-i-1}^{i}\cdot 2^{2n-2i}p^i+\sum_{j=1}^{n}(-1)^jC_{2n-j-1}^{j-1}\cdot 2^{2n-2j}p^j=$$

$$2^{2n}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i}C_{2n-i}^{i}\cdot 2^{2n-2i}p^{i}+(-1)^{n}p^{n}=$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}C_{2n-i}^{i}\cdot 2^{2n-2i}p^{i}$$

得(1) 在 $n+1$ 时成立.

$$u_{2n+2}=2u_{2n+1}-pu_{2n}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}C_{2n-i}^{i}\cdot 2^{2n-2i+1}p^{i}+$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}C_{2n-i-1}^{i}\cdot 2^{2n-2i-1}p^{i+1}=$$

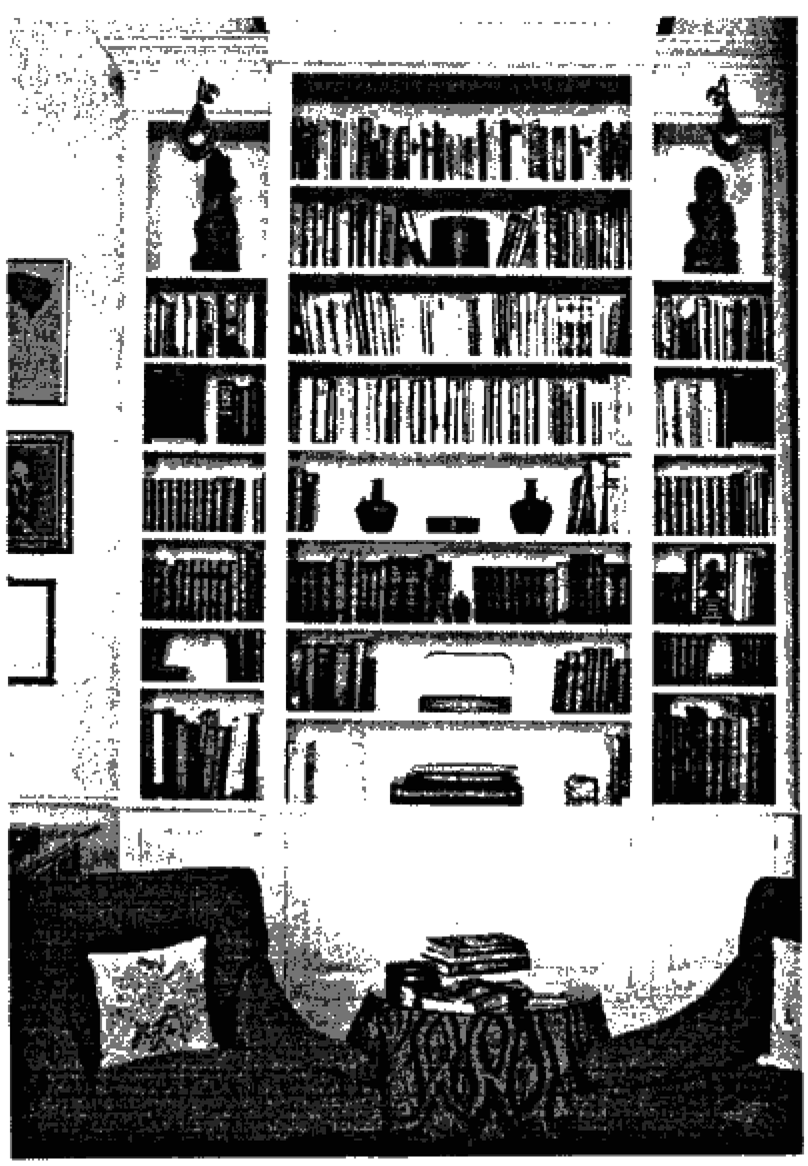
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}C_{2n-i}^{i}\cdot 2^{2n-2i+1}p^{i}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}C_{2n-j}^{j-1}\cdot 2^{2n-2j+1}p^{j}=$$

$$2^{2n+1}+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}C_{2n-i+1}^{i}2^{2n-2i+1}p^{i}=$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}C_{2n-i+1}^{i}\cdot 2^{2n-2i+1}p^{i}$$

得(2) 在 $n+1$ 时也成立,所以定理 4 成立.

概率与统计



已经试验过的事件不是随机事件

现行全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)《数学·第二册(下A)》第114页的例1及其解答是:

例1 指出下列事件是必然事件,不可能事件,还是随机事件:

(1) 某地1月1日刮西北风;

(2) 当x是实数时,$x^2\geqslant 0$;

(3) 手电筒的电池没电,灯泡发亮;

(4) 一个电影院某天的上座率超过50%.

解 由题意知,(2)是必然事件,(3)是不可能事件,(1)、(4)是随机事件.

笔者认为(1)、(4)小题的解答值得商榷.

在(1)中,"某地"表确定的地点,"1月1日"表确定的1天通常指当年1月1日,比如写信时最后注明日期就是这样.不是当年时必须要注明是哪一年.该教科书是2001年10月第2版,所以可认为"1月1日"是2001年1月1日,这是无可争议的.对于(1)是什么事件,可作如下全面分析:

① 若"1月1日"已经过去,则某地1月1日是否刮了西北风,是已知的(可到当地气象局查阅这一天的天气记录):若刮了西北风,则(1)是必然事件,若没刮西北风,则(1)是不可能事件.此时,(1)不会是随机事件.

② 若1月1日就是今天,且今天尚未过完(若已过完,①已讨论),则今天刮了西北风时(1)就是必然事件,否则(1)就是随机事件.

③ 若1月1日是将来的一天,则(1)是随机事件.

对(4)也应作同上分析.

教科书第112页"'某地5月1日,下雨'等也都是随机事件"也值得商榷.

建议教科书再版时,将以上的时间均改为"将来某一天".

可能有的学生对教科书第112页"(6)'掷一枚硬币,出现正面'是随机事件"也认为值得商榷:若这次试验已做毕,则是必然事件或不可能事件;否则就是随机事件,这就没有必要.若不能断定这次试验是否已经完成,一般应理解为试验没有完成,因为这才是概率论研究的目的:预测这件事在将来发生的可能性有多大?

已经试验过的事件不会是随机事件(一定是必然事件或不可能事件),随机

事件一定未试验过.尚未试验过的事件也不一定是随机事件:若能用科学的推理断定事件发生(或不发生),就是必然事件(或不可能事件);若能用科学的推理断定事件发生与不发生都有可能(即使发生的可能性很大,不发生的可能性很小),就是随机事件.

骰子的妙想

一些精神无所寄托的人常常沉醉于赌博场中，而思维敏捷的数学家却发现那里面也有很多深刻有趣的数学问题.在17世纪，当人们开始用数学的方法去窥视风云莫测的偶然世界的奥秘时，就曾研究过一些有关赌博的问题.著名的意大利科学家伽利略(1564—1642)在1620年所写的一篇关于掷骰子的数学论文，可算是这种研究最早的代表.

所谓骰子是指一个用均匀材料做成的正方体，它的6个面上分别刻有1,2,3,4,5,6个点(对面点数之和均为7).若将一颗骰子随意地抛掷在桌面上，很明显，难以预料出现在最上面的点数是多少.

一个赌徒曾请教这位大名鼎鼎的科学家：同时抛掷三颗骰子，出现在最上面的点数之和最可能是多少?一些有经验的赌徒相信是10点和11点，究竟对不对?

伽利略在这篇短短的论文之中，通过数学计算肯定了赌徒们凭经验得到的结果是正确的.伽利略的证法如下：

首先，他提出，由于骰子质地均匀，形状对称，那么投掷时6个面中任何一个面向上的可能性是相等的，即每掷一次都有6种等可能的效果.假如同时掷两颗骰子，每一颗骰子的每个面都有可能和另一颗骰子的某个面一起出现，因而有$6\times6=36$种可能的结果.图1就明显地表示出了两颗骰子各个面结合出现的情况，图中的数是相应的两个面点数之和.

⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

图1 两颗骰子的情形

虽然各颗骰子出现每一面的可能性相等，但两颗骰子出现的点数之和为2,3,4,…,12的可能性并不都相等.如果将两颗骰子一起抛掷36次，那么各种点数之和最可能出现的次数如表1所示.

表1 两颗骰子点数之和

点数的和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
最可能出现的次数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

表1清楚地说明，点数之和为7出现的可能性最大，它是出现点数和为2(或12)可能性的6倍.换句话说，如果多次抛掷两颗骰子的话，点数之和为7

出现的可能性为$\frac{6}{36}$,也称"点数和为 7"这个事件出现的概率为$\frac{6}{36}$.点数和为其余各数出现的概率都要比$\frac{6}{36}$小.

如果同时抛掷三颗骰子,由于每颗都有 6 种不同的结果,而各颗骰子出现哪一面又互不影响,因此总共有$6\times6\times6=216$种等可能的结果.再像上面那样分析,三颗骰子出现的点数之和最少是 3,最多是 18,可以类似地推出在 216 次抛掷中各种点数最可能出现的情况如表 2 所示.

表 2　三颗骰子的情形

点数的和	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
最可能出现的次数	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

果然,点数的和为 10 和 11 出现的可能性最大,其概率都为$\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$.

伽利略的这篇短文,不仅使赌徒们如获至宝,更重要的是在发展数学理论方面引起了科学界的很大兴趣.数学家们预见到对偶然事件规律性的研究具有深远的影响和广泛的应用,这正如荷兰著名数学家和物理学家惠更斯(1629—1695)于 1657 年所著的《关于赌博的计算》一书中说的那样:"所处理的不仅是赌博而已,其中实际上包含着很有趣、很深刻的理论基础."现在研究偶然事件规律的《概率论》已成为数学中应用越来越广泛的一个重要分支,充分证实了科学家们的卓越预见.

在这种小小的骰子上可以提出各种别出心裁的数学问题,一位数学家曾提出:能不能改变骰子上所标的点数来设计两颗新骰子,当抛掷这两颗新骰子时,所出现的点数之和的情况恰好与表 1 所列的次数相同?

这个看来不易解决的问题终于被一位数学爱好者解决了.答案是唯一的:这两颗新骰子各个面上的点数分别为 1,2,2,3,3,4;1,3,4,5,6,8.

作为练习,试想一想:把点数为 1,2,2,3,3,4 的新骰子连续掷两次,上面的点数之和最可能是多少?对于点数为 1,3,4,5,6,8 的新骰子呢?

参考文献

[1] 张文忠.中学数学中的趣题[M].西安:陕西科学技术出版社,1989.

最佳查血方案问题

由全日制普通高中教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》(2004年人民教育出版社)第54页第2题,可提出一种最佳查血方案问题.

问题1 假定一个单位的 n 个人中每人患某种病的概率都是0.1,为了查出这 n 个人中所有患这种病的人,需对这 n 个人的血液都进行化验(也叫查血),查血方案是:

先把这 n 个人分成若干个组(每组至少1人),再查出每组中所有患这种病的人,这种查法是:把每个人的血样分成两份,把这一组所有人(设为 k 个人)的血样各一份混在一起化验,若结果呈阴性,则不需再查(此时可认为每人查了 $\frac{1}{k}$ 次);若结果呈阳性,则再对这 k 个人的另一份血样逐个化验(此时可认为每人查了 $1+\frac{1}{k}$ 次).(分成 n 组(每组1人)时的查血方案是最常见的查血方案)

请设计一种查血方案,使查血次数最少.

在问题1中,$k(k\geqslant 2)$ 个人一组的混合血液呈阴性的概率为 0.9^k,呈阳性的概率为 $1-0.9^k$.呈阴性时每人需查 $\frac{1}{k}$ 次,呈阳性时每人需查 $1+\frac{1}{k}$ 次,所以

$$P(\xi=\frac{1}{k})=0.9^k, P(\xi=1+\frac{1}{k})=1-0.9^k$$

$$E\xi=\frac{1}{k}\times 0.9^k+(1+\frac{1}{k})(1-0.9^k)=1-0.9^k+\frac{1}{k}(k\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }k\geqslant 2)$$

即 k 个人一组查血时,平均每个人查血的次数是

$$a_k=\begin{cases}1 & (k=1)\\ 1-0.9^k+\frac{1}{k} & (k\in\mathbf{N},\text{且 }k\geqslant 2)\end{cases} \quad ①$$

定义1 设 $n_1,n_2,\cdots,n_t,t\in\mathbf{N}^*$,$n=n_1+n_2+\cdots+n_t$,则 $n_1,n_2,\cdots,n_t$ 叫做 n 的一个 t 元分拆,记作 $n_1+n_2+\cdots+n_t$,把 $n_1,n_2,\cdots,n_t$ 都叫做这种分拆的元素.显然,分拆与元素的顺序无关.

问题1等价如下问题:

问题1′ 寻求正整数 n 的一个分拆 $n_1+n_2+\cdots+n_t$,使 $n_1a_{n_1}+n_2a_{n_2}+\cdots+n_ta_{n_t}$ 取最小值,其中 $a_{n_i}(i=1,2,\cdots,t)$ 的意义见①.

定义 2 把问题1′的答案$n_1+n_2+\cdots+n_t$叫做正整数n关于0.1(即问题1中每人患某种病的概率)的一个最优分拆,记作$\langle n_1+n_2+\cdots+n_t\rangle_{0.1}$,不产生混淆时可记作$\langle n_1+n_2+\cdots+n_t\rangle$,"$\langle\rangle$"内有相同元素时可用乘法记,比如$\langle n_1+n_1\rangle$可记为$\langle n_1\cdot 2\rangle$,这里$n_1$与2不能交换位置.

最优分拆的性质 若$\langle n_1+n_2+\cdots+n_t\rangle_{0.1}$,在$n_1,n_2,\cdots,n_t$中取出若干个元素$n_{i_1},n_{i_2},\cdots,n_{i_j}$,则$\langle n_{i_1}+n_{i_2}+\cdots+n_{i_j}\rangle_{0.1}$.

引理 1 在$\langle n_1+n_2+\cdots+n_t\rangle_{0.1}$中,$n_i\leqslant 10(i=1,2,\cdots,t)$.

证明 若$m>10$,可证

$$ma_m>(m-1)\cdot a_{m-1}+1\cdot a_1$$

因此,若$\langle n_1+n_2+\cdots+n_t\rangle_{0.1}$中存在$n_i>10$,不妨设$n_t>10$,则

$$n_1a_{n_1}+n_2a_{n_2}+\cdots+n_ta_{n_t}>n_1a_{n_1}+\cdots+n_{t-1}a_{n_{t-1}}+(n_t-1)\cdot a_{n_{t-1}}+1\cdot a_1$$

这与$\langle n_1+n_2+\cdots+n_t\rangle_{0.1}$的规定相矛盾.

所以引理1成立.

引理 2 1,2,3,…,10关于0.1的最优分拆均唯一,分别是$\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 3\rangle,\langle 4\rangle,\langle 5\rangle,\langle 3+3\rangle,\langle 3+4\rangle,\langle 4+4\rangle,\langle 4+5\rangle,\langle 3+3+4\rangle$.

证明 易证得1,2的最优分拆分别是$\langle 1\rangle,\langle 2\rangle$,3的分拆只有$1+1+1,1+2,3$三种,由$\langle 2\rangle$知$1+1+1$不是最优分拆,又$3a_3<1\cdot a_1+2a_2$(即$1.813<2.38$),所以$\langle 3\rangle$.

由$\langle 2\rangle,\langle 3\rangle$知,4的最优分拆中没有若干个(至少2个)元素的和是2,3,所以4的最优分拆只可能是$1+3,2+2,4$,从而可证得$\langle 4\rangle$.

类似可证得其他结论.

引理 3 若$\langle n_1+n_2+\cdots+n_t\rangle_{0.1}$,则

(1)$n_i\leqslant 5(i=1,2,\cdots,t)$;

(2)$n_1,n_2,\cdots,n_t$中至多有1个1,1个2,2个3,1个5.

证明 (1)由引理1,2得.

(2)若有2个1,2个2,3个3,2个5,则与$\langle 2\rangle,\langle 4\rangle,\langle 4+5\rangle,\langle 3+3+4\rangle$矛盾.

定理 1 正整数n关于0.1的最优化分拆分别是:

(1)当$n=1,2,3$时,分别为$\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 3\rangle$;

(2)当$n=4m(m\in\mathbf{N}^*)$时,$\langle 4\cdot m\rangle$;

(3)当$n=4m+1(m\in\mathbf{N}^*)$时,$\langle 4\cdot(m-1)+5\rangle$;

(4)当$n=4m+2(m\in\mathbf{N}^*)$时,$\langle 4\cdot(m-1)+3\cdot 2\rangle$;

(5)当$n=4m+3(m\in\mathbf{N}^*)$时,$\langle 4\cdot m+3\rangle$.

证明 (1)显然成立.

(2)设$4m$的一个最优分拆是$\langle n_1+n_2+\cdots+n_t\rangle$,由引理3(1)及$a_1,a_2,a_3,$

a_4, a_5 中的最小值是 $a_4 = 0.5939$ 可得 $n_1 a_{n_1} + n_2 a_{n_2} + \cdots + n_t a_{n_t} \geqslant n_1 a_4 + n_2 a_4 + \cdots + n_t a_4$(当且仅当 $n_1 = n_2 = \cdots = n_t = 4$时取等号) $= (n_1 + n_2 + \cdots + n_t) a_4 = 4ma_4$，即结论(2) 成立.

(3) 若 $4m + 1$ 的最优分拆中有元素 1，又由(2) 及最优分拆的性质得 $\langle 4 \cdot m + 1 \rangle$，这将与$\langle 5 \rangle$ 矛盾.

若 $4m + 1$ 的最优分拆中有元素 2，则不会再含有元素 1,2,3,4,5(由$\langle 3 \rangle$，$\langle 4 \rangle$，$\langle 5 \rangle$，$\langle 3 + 3 \rangle$，$\langle 3 + 3 + 4 \rangle$ 知)，由引理3(1) 知，此时 $4m + 1 = 2$. 这不可能.

若 $4m + 1$ 的最优分拆中有元素 3，则不会有元素 1,2,5. 再由引理 3 的 2) 知，$4m + 1$ 的最优分拆中若有元素 3，就有 1个或2个3，若干个4，但这样的数是 $4l + 3$ 或 $4l + 2(l \in \mathbf{N})$ 形.

所以 $4m + 1$ 的最优分拆中只有元素 4,5，又至多一个 5，从而可得结论(3) 成立.

(4) 若 $4m + 2$ 的最优分拆中有元素 1，又由(3) 得$\langle 4 \cdot (m - 1) + 5 + 1 \rangle$，之中的$\langle 5 + 1 \rangle$ 与$\langle 3 + 3 \rangle$ 矛盾.

若 $4m + 2$ 的最优分拆中有元素 2，又由(2) 得$\langle 4 \cdot m + 2 \rangle$，之中的$\langle 4 + 2 \rangle$ 与$\langle 3 + 3 \rangle$ 矛盾.

若 $4m + 2$ 的最优分拆中有元素 5，则只有一个 5 且不含有 1,2,3，只能再含有 4，而这样的数是 $4l + 5(l \in \mathbf{N})$ 形.

所以 $4m + 2$ 的最优分拆中只能含 1个或2个3，若干个4，从而可得结论(4) 成立.

(5) 若 $4m + 3$ 的最优分拆中有元素 1,2,5，再分别由结论(4)，(3)，(4) 可得矛盾.

所以 $4m + 3$ 的最优分拆中只能含 1个或2个3，若干个4，从而可得结论(5) 成立.

读者还可研究问题 1 的一般情形(即把问题 1 中的"$1 - 0.1$" 改为"$p(0 < p < 1)$") 的情形，也即

问题 2 设

$$p_k = \begin{cases} 1 & (k = 1) \\ 1 - p^k + \dfrac{1}{k} & (k \in \mathbf{N}, \text{且 } k \geqslant 2) \end{cases}$$

寻求正整数 n 的一个分拆 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$，使 $n_1 p_{n_1} + n_2 p_{n_2} + \cdots + n_t p_{n_t}$ 取最小值.

问题 1,2 中都是"把每人的血样分成两份"，更一般的最佳查血方案应该是

问题 3 假定一个单位的 n 个人中每人患某种病的概率都是 $p(0 < p <$

1),为了查出这 n 个人中所有患这种病的人,需对这 n 个人都进行查血,查血方案是:

先把这 n 个人分成若干个组(每组至少 1 人),再查出每组中所有患这种病的人,这种查法是:把每个人的血样分成足够的份数,把这一组所有人(设为 k 个)的血样各一份混在一起进行化验,若结果呈阴性就不需再查了;若结果呈阳性,则还需再查,这时又可把这一组的 k 个人分成若干个小组,……请设计一种查血方案,使查血次数最少.

你是否决定打开另一只信封

在你面前有 2 只信封，你被告知里面都放有钱，且一只是另一只中钱的 2 倍，请你随意挑一只信封，把它打开，你看到了其中的钱数，比如是 100 元，现在请你决定是否打开另一只信封：如果不打开，那么 100 元钱就归你了；如果打开，那么不管那只信封中有多少钱，你就只能拿那些钱，而不能拿原先的 100 元钱．请问：你是否打开另一只信封？

很明显，另一只信封中可能有200元钱，也可能只有50元钱，平均是125元，比 100 元多（也可理解为：若拿另一只信封，则相对于已有 100 元钱来说，可能是赚 100 元，也可能是亏 50 元），所以你应该"跳槽"—— 去打开另一只信封．

这正是"人挪活、树挪死"，"不能在一棵树上吊死"的数学模型．

设想一个人在 A 单位已干了三年五载或八年、十年，工作环境熟悉，技术娴熟，人缘关系也好，并且每个月还有一份比较可观的收入（月薪 a 元）．他又想到可能更适合自己发展的 B 单位工作，但有风险，干得好的话可得月薪 $na(n>1)$ 元，干得糟的话月薪是 $\frac{a}{n}$ 元．且可以估计出他到 B 单位干好、干糟的可能一样．请问他是否应当"跳槽"—— 去 B 单位工作？

可用数学期望来解决此问题．

用随机变量表示他去 B 单位工作的月薪，则 ξ 的分布列为：

ξ	干好（na 元）	干糟（$\frac{a}{n}$ 元）
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

所以 $E\xi=\frac{1}{2}\cdot na+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{n}=\frac{a}{2}(n+\frac{1}{n})>a$（因为 $n>1$），即到 B 单位去工作的平均收入比在 A 单位的收入要高，应当跳槽 —— 去 B 单位工作．又 $n+\frac{1}{n}(n>1)$ 是增函数，所以当 $n(n>1)$ 越大时，跳槽后的平均收入增加得越多．

为什么丢弃原工作不干，下海经商、捞鱼的人也有不少血本无归、干得很糟呢？那是他没有认真分析自己"跳槽"后的风险，很可能是干好的可能性小于干

糟的可能性;干好后可得月薪 na 元($n > 1$),干糟了得到的月薪很可能少于$\frac{a}{n}$元,甚至是0元或负数元.在这种情形下“跳槽”后的平均收入 $E\xi < a$ 就是正常的了.

“人挪活,树挪死”也是相对的,这世上根本就没有绝对的东西.

一道课本例题的广义形式

全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》(2004年人民教育出版社)(下简称课本)第11页的例3是一道关于期望的题,本文将研究其一般情形.

问题 有一批数量很大的产品,其正品率是 $p(0 \leqslant p < 1)$.对这批产品进行抽查,每次抽出一件,如果抽出次品,则抽查终止,否则继续抽查,查到抽出次品,但抽查次数最多不超过 $n(n \geqslant 2)$ 次.求抽查次数 ξ 的期望.

解 抽查次数 $\xi = 1,2,\cdots,n$,从这批数量很大的产品中每次抽取一件检查的试验可以认为是彼此独立的,取出次品的概率是 $1-p$,取出正品的概率是 p,前 $k-1$ 次取出正品而第 $k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 次取出次品的概率.

$$P(\xi = k) = p^{k-1}(1-p)(k = 1,2,\cdots,n-1)$$

需要抽查 n 次,前 $n-1$ 次取出的都是正品的概率 $P(\xi = n) = p^{n-1}$.

所以

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}(1-p) + np^{n-1} = (1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^{n-1}$$

设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kp^{k-1} = 1 + 2p + 3p^2 + \cdots + np^{n-1}$,得

$$pS_n = p + 2p^2 + \cdots + (n-1)p^{n-1} + np^n$$

$$(1-p)S_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} - np^n = \frac{1-p^n}{1-p} - np^n$$

所以 $$E\xi = \frac{1-p^{n-1}}{1-p} - (n-1)p^{n-1} + np^{n-1} = \frac{1-p^n}{1-p}$$

注 在以上答案中令 $p = 0.85, n = 10$,便可得课本第11页例3的答案,且上述解法比课本的解法更好一些.

还可解决以上问题的伴随问题:

设 $P(\xi = k) = p^{k-1}(1-p)(k = 1,2,\cdots,n,\cdots)$,则

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}(1-p) = \lim_{n\to\infty}(1-p)\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-p)S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-p^n}{1-p} - np^n\right)$$

下证 $\lim\limits_{n\to\infty} np^n = 0(0 \leqslant p < 1)$,只证 $0 < p < 1$ 的情形.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} xp^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(\frac{1}{p})^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(\frac{1}{p})^x \ln \frac{1}{p}} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p^x}{-\ln p} = 0(0 < p < 1)$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} np^n = 0(0 < p < 1)$$

所以
$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}(1-p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-p^n}{1-p} - \lim_{n\to\infty} np^n =$$
$$\frac{1}{1-p} - 0 = \frac{1}{1-p}(0 \leqslant p < 1)$$

还可求得问题中 ε 的方差
$$D\xi = \sum_{k=1}^{n-1}(k - \frac{1-p^n}{1-p})^2 p^{k-1}(1-p) + (n - \frac{1-p^n}{1-p})^2 p^{n-1}$$

当然应先算出
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p^{k-1} = \frac{2p-2p^n}{(1-p)^3} - \frac{(2n-2)p^n}{(1-p)^2} - \frac{n(n-1)p^n}{1-p}$$

快求一类期望

先看全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修Ⅱ)》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第17页的例6是：

甲、乙两名射手在同一条件下进行射击，分布列如下表所示.

射手甲

击中环数 ξ_1	8	9	10
概率 p	0.2	0.6	0.2

射手乙

击中环数 ξ_2	8	9	10
概率 p	0.4	0.2	0.4

用击中环数的期望与方差分析比较两名射手的射击水平.

先看教科书给出的期望的求法(定义法)

$$E\xi_1 = 8\times0.2+9\times0.6+10\times0.2=9$$

$$E\xi_2 = 8\times0.4+9\times0.2+10\times0.4=9$$

用定义法求期望有多步运算，而对于以上两个小题可以直接观察得到结果：因为期望反映的是离散型随机变量取值的平均水平，是平均数概念的推广，所以可以由平均数的概念迅速得到 $E\xi_1,E\xi_2$.

因为甲、乙击中8环、10环的概率均相等，可以认为在一次射击中击中8环．10环的次数相等，认为都是 n 次，显然这 $2n$ 个数的平均数就是8,10的平均数9；又设这次射击中击中9环 m 次，显然这 $2n+m$ 个数的平均数即此次射击的平均水平也即所求期望均为9环.

定理　若离散型随机变量 $\xi(\xi=x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率分布为 $P(\xi=x_i)=p_i$，且满足

(1) $x_j+x_{n+1-j}(j=1,2,\cdots,[\frac{n}{2}]$；$[\frac{n}{2}]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数）的值都为 $2a$；

(2) $p_j=p_{n+1-j}$.

则 $E\xi=a$.

证明　分 n 为奇数和偶数两种情形来证.

当 n 为偶数时，设 $n=2m$，由(1)，得

$$x_1+x_{2m}=x_2+x_{2m-1}=\cdots=x_m+x_{m+1}=2a$$

由(2)，得

$$p_1 = p_{2m}, p_2 = p_{2m-1}, \cdots, p_m = p_{m+1}$$

又 $p_1 + p_2 + \cdots + p_{2m} = 1$,所以

$$2(p_1 + p_2 + \cdots + p_m) = 1$$

$$\begin{aligned} E\xi = {} & x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_{2m}p_{2m} = \\ & (x_1 + x_{2m})p_1 + (x_2 + x_{2m-1})p_2 + \cdots + (x_m + x_{m+1})p_m = \\ & 2a(p_1 + p_2 + \cdots + p_m) = a \end{aligned}$$

当 n 为奇数时,设 $n = 2m + 1$,由(1),得

$$x_1 + x_{2m+1} = x_2 + x_{2m} = \cdots = x_m + x_{m+2} = x_{m+1} + x_{m+1} = 2a$$

由(2),得

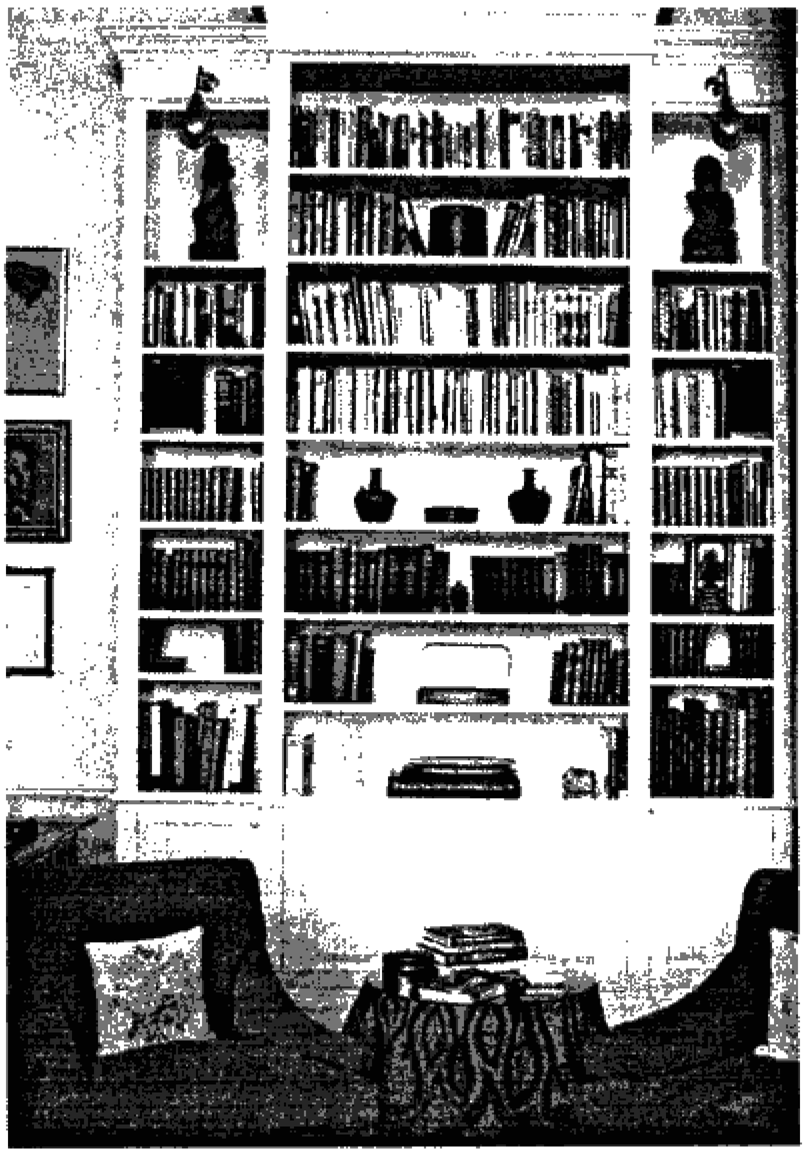
$$p_1 = p_{2m+1}, p_2 = p_{2m}, \cdots, p_m = p_{m+2}$$

所以
$$2(p_1 + p_2 + \cdots + p_m) + p_{m+1} = 1$$

$$\begin{aligned} E\xi = {} & x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_{2m+1}p_{2m+1} = \\ & (x_1 + x_{2m+1})p_1 + (x_2 + x_{2m})p_2 + \cdots + (x_m + x_{m+2})p_m + x_{m+1}p_{m+1} = \\ & 2a(p_1 + p_2 + \cdots + p_m) + ap_{m+1} = a[2(p_1 + p_2 + \cdots + p_m) + p_{m+1}] = a \end{aligned}$$

用平均数的概念或定理的结论再来解答教科书第 12 页例 2,第 14 页例 5,第 17 页练习 1,第 18 页习题 2,7,8 中的期望均将是口算.

极限与导数



蠕虫爬橡皮绳问题

笔者在1986年第6期《教学与研究(中学数学)》的第24页读到了下面一段《蠕虫爬橡皮绳》的译文:

"一个蠕虫从一千米长的橡皮绳一端以每秒一厘米的匀速向另一端爬行,而橡皮绳却每秒伸长一千米,如此下去,蠕虫会不会爬到橡皮绳的另一端点?多数人会直觉地认为蠕虫永远不能到达终点,而这种直觉是错误的.这是由橡皮绳均匀伸长,蠕虫也随之向前了;第一秒末爬了橡皮绳全长的$\frac{1}{100\ 000}$,在第二秒爬了$\frac{1}{200\ 000}$,类推得

$$\frac{1}{100\ 000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)$$

只要 n 充分大,发散的调和级数的部分和可以等于或超过 100 000,而这时蠕虫就爬到终点了,如果橡皮绳以等比增长,则永远达不到终点.(这个悖论选自《科学美国人》杂志社编发的'悖论箱'幻灯片.森犊)"

本文将研究该问题的一般情形,并指出上述译文中的一点错误.

问题 有一条长生不老的蠕虫从 $f(1)$ 米长的橡皮绳一端以 a 米/秒(正常数 $a<f(1)$)匀速爬向另一端,而橡皮绳不断伸长,在第 t 秒橡皮绳从 $f(t-1)$ 米均匀伸长到 $f(t)$ 米($f(t)\geqslant f(t-1)>0, t=2,3,4,\cdots$).如此下去,这条蠕虫会不会爬到橡皮绳的另一端?

解 设蠕虫爬了 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 秒,这时橡皮绳伸长到 $f(n)$ 米.

在第1秒,蠕虫爬过了 $f(1)$ 米橡皮绳的 a 米($a<f(1)$),因为这 $f(1)$ 米橡皮绳最终均匀伸长到 $f(n)$ 米,所以这 a 米橡皮绳最终伸长到$\frac{f(n)}{f(1)}\cdot a$ 米,即第1秒爬了 $f(n)$ 米橡皮绳全长的$\frac{a}{f(1)}$.

在第2秒,蠕虫爬过了 $f(2)$ 米橡皮绳的 a 米($a<f(2)$),因为这 $f(2)$ 米橡皮绳最终均匀伸长到 $f(n)$ 米,所以这 a 米橡皮绳最终伸长到$\frac{f(n)}{f(2)}\cdot a$ 米,即第2秒爬了 $f(n)$ 米橡皮绳全长的$\frac{a}{f(2)}$.

同理可得,蠕虫第 n 秒爬了 $f(n)$ 米橡皮绳全长的$\frac{a}{f(n)}$.

所以,蠕虫 n 秒共爬了 $f(n)$ 米橡皮绳全长的 $\frac{a}{f(1)}+\frac{a}{f(2)}+\cdots+\frac{a}{f(n)}$.

设 $A=\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{f(i)}$,又设 $A'=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a}{f(i)}$,从而,可得

(1) 当 $A=1$ 时,蠕虫 n 秒可爬到橡皮绳的另一端;当 $A>1$ 时,蠕虫不需 n 秒就可爬到橡皮绳的另一端;当 $A<1$ 时,蠕虫 n 秒不能爬到橡皮绳的另一端.

(2) 若级数 A' 发散(指 $A'\to\infty$)或级数 A' 收敛于大于1的数,则蠕虫在有限的时间内可爬到橡皮绳的另一端;若级数 A' 收敛于不大于1的数,则蠕虫在有限的时间内不能爬到橡皮绳的另一端.

(3) 因为调和级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ 发散,所以有以下结论成立:若 $i\in\mathbf{N}^*$ 时均有 $f(i)\leqslant i$,则蠕虫能在有限的时间内爬到橡皮绳的另一端.

(4) 设 $\{f(i)=a_1q^{i-1}\}(a_1>0,q>1)$ 是严格递增的等比数列,则

① 因为此时 $A=\frac{a}{a_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{q}\right)^{i-1}=\frac{a(q^n-1)}{a_1(q^n-q^{n-1})}$,所以当 $A\geqslant1$ 即 $a\geqslant\frac{a_1(q^n-q^{n-1})}{q^n-1}$ 时,蠕虫在不超过 n 秒的时间可爬到橡皮绳的另一端.

② 因为此时 $A'=\frac{a}{a_1}\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{q})^{i-1}=\frac{aq}{a_1(q-1)}$,所以当 $A'\leqslant1$ 即 $a\leqslant a_1\left(1-\frac{1}{q}\right)$ 时,蠕虫在有限的时间内不能爬到橡皮绳的另一端;当 $A'>1$ 即 $a>a_1\left(1-\frac{1}{q}\right)$ 时,蠕虫在有限的时间内能爬到橡皮绳的另一端.

由结论(4)知,原译文中"如果橡皮绳以等比增长,则永远达不到终点"这句话是错误的.

请不要轻信你的猜想

我们来研究一个简单有趣的极限问题：

有一个半径为 1 的圆 c(图 1)，在圆 c 内作一个内接正三角形及这个三角形的内切圆 c_3，再在 c_3 内作一个内接正四边形及这个内接正四边形的内接圆 c_4，又在圆 c_4 内作一个内接正五边形及这个内接正五边形的内接圆 c_5，…… 一直进行下去，所有内接圆的半径是否趋向于 0?

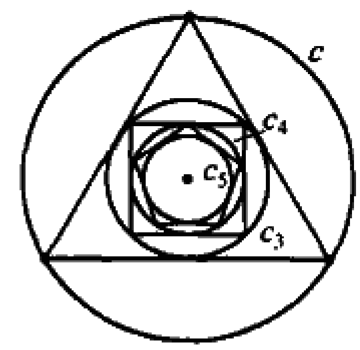


图 1

如果只凭直觉及简单的推理，会认为“半径趋向于 0”，因为圆的半径在不断减小，下面我们将证明，半径不会趋向于 0!

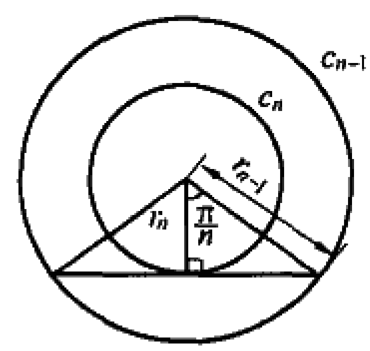


图 2

由图 2 可以看出，圆 c_n 的半径 r_n 是圆心到圆 c_{n-1} 的内接正 n 边形的边心距，所以 $r_n = r_{n-1}\cos\frac{\pi}{n}$. 用此式逐次迭代，得

$$r_n = \cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{5}\times\cdots\times\cos\frac{\pi}{n}\quad (n\geqslant 3)$$

下面再证明：当 n 无限增大时，上式右端不趋向于 0.

由图 3，容易看出：

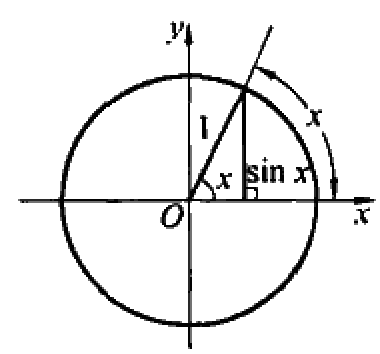


图 3

引理 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x < x$.

由引理可得，当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x > 1 - x^2$，所以

$$r_n^2 = \cos^2\frac{\pi}{3}\times\cos^2\frac{\pi}{4}\times\cos^2\frac{\pi}{5}\times\cdots\times\cos^2\frac{\pi}{n} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\times\cos^2\frac{\pi}{5}\times\cos^2\frac{\pi}{6}\times\cos^2\frac{\pi}{7}\times\cdots\times\cos^2\frac{\pi}{n} >$$

$$\frac{1}{8}\left(1-\frac{\pi^2}{5^2}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{6^2}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{7^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{\pi^2}{n^2}\right) >$$

$$\frac{1}{8}\left(1-\frac{4^2}{5^2}\right)\left(1-\frac{4^2}{6^2}\right)\left(1-\frac{4^2}{7^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{4^2}{n^2}\right) =$$

$$\frac{1}{8}\times\frac{(5^2-4^2)(6^2-4^2)(7^2-4^2)\cdot\cdots\cdot(n^2-4^2)}{5^2\times6^2\times7^2\times\cdots\times n^2}$$

上式的分子可变为

$$\begin{aligned}(1\times9)(2\times10)(3\times11)\times\cdots\times[(n-4)\times(n+4)] &= 1\times2\times3\times4\times5\times\\ &\quad 6\times7\times8\times9^2\times10^2\times11^2\times\cdots\times(n-4)^2\times[(n-3)(n-2)]\times\\ &\quad [(n-1)n]\times[(n+1)(n+2)]\times[(n+3)(n+4)]>\\ &\quad 1\times2\times3\times\cdots\times8\times9^2\times10^2\times11^2\times\cdots\times\\ &\quad (n-3)^2(n-2)^2(n-1)^2n^2\end{aligned}$$

从而可得

$$r_n^2>\frac{1}{8}\times\frac{1\times2\times3\times4}{5\times6\times7\times8}=\frac{1}{560}$$

即 $r_n>\frac{1}{\sqrt{560}}$,说明 r_n 不会趋向于0.

注　请读者求出 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n$ 的准确值.

介绍洛必达法则

求$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$等待定型极限时，洛必达(1661—1704，法国数学家)法则简洁适用，下面我们作一简介.

洛必达法则 若$f(x)$，$g(x)$同时满足：

(1) 在点 a 附近(可不包括 a)都可导，且 $g'(x) \neq 0$；

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$；

(3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$，则$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

注 若将法则的(2)中的"0"改为"∞"(指$+\infty$，$-\infty$或$\pm\infty$之一)后也成立.把上述洛必达法则中的"$x \to a$"改为"$x \to \infty$"后(且(1)也作类似改动)也成立.

例 计算：(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^5 - 1}{(1+x)^4 - 1}$；

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{mn} - 1}{x^n - 1} (m, n \in \mathbf{R}^+)$.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{5(1+x)^4}{4(1+x)^3} = \frac{5}{4}$.

(2) 原式 $= \lim\limits_{x \to 1} \frac{mnx^{mn-1}}{nx^{n-1}} = \frac{mn}{n} = m$.

用导数研究一个猜想

文献[1]末的猜想1是:若 $a^n+b^n=2, a,b\in\mathbf{R}, n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}$,则 $a+b\leqslant 2, ab\leqslant 1$.

此猜想正确,并且还可推广.

定理1 设 $x^n+y^n=2(x,y\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{N}, n>1)$.

(1) 若 n 是奇数,则 $x+y$ 的取值范围是$(0,2]$,xy 的取值范围是$(-\infty,1]$;

(2) 若 n 是偶数,则 $x+y$ 的取值范围是$[-2,2]$,xy 的取值范围是$[-1,1]$.

证明 (1) 由 n 是正奇数,$x^n+y^n=2$,得

$$y=(2-x^n)^{\frac{1}{n}}(x\in\mathbf{R})$$

$$x+y=x+(2-x^n)^{\frac{1}{n}}=f(x)$$

$$f'(x)=1-\frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(2-x^n)^{n-1}}}=1-\sqrt[n]{\left(\frac{x^n}{2-x^n}\right)^{n-1}}$$

注意到 n 是正奇数,$n-1$ 是正偶数,得

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^n}{2-x^n}=\pm 1\Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\left(\frac{x^n}{2-x^n}\right)^2<1\Leftrightarrow x<1$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x>1\text{ 且 }x\neq\sqrt[n]{2}$$

所以,$f(x)$ 在$(-\infty,1)$上是增函数,在$[1,+\infty)$上是减函数.

得 $f(x)_{\max}=\max\{f(1),f(\sqrt[n]{2})\}=f(1)=2$,即 $x+y\leqslant 2$(当且仅当 $x=y=1$ 时取等号).又

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

再结合函数 $f(x)$ 图象的连续性、增减性可得 $x+y$ 的取值范围是$(0,2]$.

由 $x^n+y^n=2$ 可设 $x^n=1+t, y^n=1-t(t\in\mathbf{R})$,得

$$(xy)^n=1-t^2\leqslant 1$$

所以 xy 的取值范围是$(-\infty,1]$.

(2) 由 n 是正偶数,$x^n+y^n=2$,得

$$y=\pm(2-x^n)^{\frac{1}{n}}(-\sqrt[n]{2}\leqslant x\leqslant\sqrt[n]{2})$$

①当 $y \geqslant 0$ 时，$x+y=x+(2-x^n)^{\frac{1}{n}}=f(x)$，$f'(x)=1-\dfrac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(2-x^n)^{n-1}}}$.

注意到 n 是正偶数，得

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\sqrt[n]{2}<x<1$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1<x<\sqrt[n]{2}$$

结合函数 $f(x)$ 的图象，可得 $x+y\leqslant 2$(当且仅当 $x=y=1$ 时取等号)，$x+y\geqslant -\sqrt[n]{2}$(当且仅当 $x=-\sqrt[n]{2}$，$y=0$ 时取等号)，所以此时 $x+y$ 的取值范围是$[-\sqrt[n]{2},2]$.

②当 $y\leqslant 0$ 时

$$x+y=x-(2-x^n)^{\frac{1}{n}}=f(x)$$

$$f'(x)=1+\frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(2-x^n)^{n-1}}}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow -\sqrt[n]{2}<x<-1$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<\sqrt[n]{2}$$

结合函数 $f(x)$ 的图象，可得 $x+y\leqslant \sqrt[n]{2}$(当且仅当 $x=\sqrt[n]{2}$，$y=0$ 时取等号)，$x+y\geqslant -2$(当且仅当 $x=y=-1$ 时取等号)，所以此时 $x+y$ 的取值范围是$[-2,\sqrt[n]{2}]$.

总之，$x+y$ 的取值范围是$[-2,2]$.

由 $x^n+y^n=2$ 可设 $x^n=1+t$，$y^n=1-t(-1\leqslant t\leqslant 1)$，得$(xy)^n=1-t^2\leqslant 1$，所以 xy 的取值范围是$[-1,1]$

在定理 1 中令 $x=\dfrac{x'}{k}$，$y=\dfrac{y'}{k}$，得

推论 1 设 $x^n+y^n=2k^n(x,y\in\mathbf{R},k\in\mathbf{R}^*,n\in\mathbf{N},n>1)$.

(1) 当 n 是奇数时：若 $k>0$，则 $x+y$ 的取值范围是$(0,2k]$，xy 的取值范围是$(-\infty,k^2]$；若 $k<0$，则 $x+y$ 的取值范围是$(2k,0)$，xy 的取值范围是$(-\infty,k^2]$.

(2) 当 n 是偶数时，$x+y$ 的取值范围是$[-2|k|,2|k|]$，xy 的取值范围是$[-k^2,k^2]$.

读者还可用以上方法研究

问题 设 $ax^n+by^n=1$，求 $kx+y$ 的范围(其中 a,b,k 是已知的非零实数，n 是已知的大于 1 的整数).

若要研究定理 1 中 $n\in\mathbf{R}$ 的情形，必须限定 $x,y\in\mathbf{R}^+$(因为负数的无理数

次幂及0的非正数次幂均无意义).此时,有

定理 2 若 $ax^n+by^n=1(a,b,x,y\in\mathbf{R}^+)$,则

(1) 当 $n<0$ 或 $0<n<1$ 时,$x+y\geqslant(a^{\frac{1}{1-n}}+b^{\frac{1}{1-n}})^{1-\frac{1}{n}}$(当且仅当 $x=\left[\dfrac{\frac{1}{a}(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n-1}}}{(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n-1}}+1}\right]^{\frac{1}{n}}$,$y=\left[\dfrac{\frac{1}{b}}{(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n-1}}+1}\right]^{\frac{1}{n}}$ 时取等号);

(2) 当 $n>1$ 时,$x+y\leqslant(a^{\frac{1}{1-n}}+b^{\frac{1}{1-n}})^{1-\frac{1}{n}}$(取等号的条件同(1)).

为证明定理 2,先给出

引理[2] 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+,0<t<\frac{\pi}{2},f(t)=a\sin^n t+b\cos^n t$.

(1) 若 $n<0$ 或 $n>2$,则 $f(t)\geqslant(a^{\frac{2}{2-n}}+b^{\frac{2}{2-n}})^{\frac{2-n}{2}}$(当且仅当 $\tan t=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n-2}}$ 时取等号);

(2) 若 $0<n<2$,则 $f(t)\leqslant(a^{\frac{2}{2-n}}+b^{\frac{2}{2-n}})^{\frac{2-n}{2}}$(取等号的条件同(1)).

(此引理可由权方和不等式(见文献[2]或[3]证得)

定理 2 的证明 可将 $ax^n+by^n=1$ 变形为

$$[(a^{\frac{1}{n}}x)^{\frac{n}{2}}]^2+[(b^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{n}{2}}]^2=1$$

从而可设 $x=a^{-\frac{1}{n}}\sin^{\frac{2}{n}}t,y=b^{-\frac{1}{n}}\cos^{\frac{2}{n}}t(0<t<\frac{\pi}{2})$.再由引理,可证得定理 2.

在定理 2 中,令 $a=b=\dfrac{1}{2k^n}$,得

推论 2 若 $x^n+y^n=2k^n(x,y,k\in\mathbf{R}^+)$,则

(1) 当 $n<0$ 或 $0<n<1$ 时,$x+y\geqslant 2k$;

(2) 当 $n>1$ 时,$x+y\leqslant 2k$.

参考文献

[1] 崔应宏.对一道不等式习题的再思考[J].数学通报,2004(3):23-24.

[2] 安振平.四类三角函数最值的统一[J].中学数学月刊,1997(7):17-18.

[3] 徐彦明.权方和不等式的应用[J].数学通讯,2003(3):37-38.

平均每个人查血次数的最小值

文献[1]从概率的角度给出“要查出 n 个人患某种病(假定每人患某种病的概率都是0.1)所需查血总次数最少的一种查血方案”,本文再给出“k 个人一组查血时,平均每人查血次数的最小值.”

文献[1]的式(1)已得:

k 个人一组查血时,平均每个人查血的次数是

$$a_k=\begin{cases}1 & (k=1)\\ 1-0.9^k+\dfrac{1}{k} & (k\in\mathbf{N},\text{且 } k\geqslant 2)\end{cases}$$

下面求 a_k 的最小值.

定义 下文中记 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\ln\dfrac{10}{9}(x>0)$, $g(x)=0.9^x x(x+1)(x>0)$.

引理1 (1)当 $0<x\leqslant 18$ 时, $f(x)>0$;

(2)当 $x\geqslant 19$ 时, $f(x)<0$.

证明 因为 $f(x)$ 是减函数,又 $f(18)=0.002\,8\cdots$, $f(19)=-0.002\,7\cdots$,所以引理1成立.

引理2 (1) $g(1)<g(2)<\cdots<g(18)=g(19)$;

(2) $g(k)>g(k+1)(k\in\mathbf{N},\text{且 } k\geqslant 19)$.

证明 可得 $g'(x)=f(x)\cdot g(x)$,又由引理1,可得 $g(x)$ 在 $(0,18]$ 上是增函数,在 $[19,+\infty)$ 上是减函数.

从而可得引理2成立.

引理3 (1)当 $k=4,5,6,\cdots,54$ 时, $g(k)>10$;

(2)当 $k\geqslant 55$,且 $k\in\mathbf{N}$ 时, $g(k)<10$.

证明 由引理2及 $g(4)=13.122$, $g(18)=51.332\,3\cdots$, $g(54)=10.041\,7\cdots$, $g(55)=9.373\,2\cdots$,可得引理3成立.

定理 (1) $a_1>a_2>a_3>a_4$;

(2) $a_4<a_5<\cdots<a_{55}$;

(3) $a_k>a_{k+1}(k\in\mathbf{N},\text{且 } k>55)$;

(4)当且仅当 $k=4$ 时, a_k 取最小值.

证明 易证(1)成立.

当 $k \geqslant 4$ 时,可证 $a_k - a_{k-1} = \dfrac{10-g(k)}{10k(k+1)}$,再由引理3,可得(2),(3)成立.

再由 $a_4 = 0.593\,9, a_{55} = 1.015\,1\cdots, \lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 1$,可得(4)成立.

由文献[1]的定理1知,将查血的 n 个人分组时,很多组均是4人,1,2,5人的至多1组,3人的至多2组,不知这与以上定理(4)有何联系?

读者还可探求文献[1]的问题2中

$$P_k = \begin{cases} 1 & (k=1) \\ 1-p^k+\dfrac{1}{k} & (k\in \mathbf{N}, 且\ k\geqslant 2) \end{cases}$$

的最小值,即假定每人患某种病的概率都是 $1-p$ 时,k 个人一组查血平均每人查血次数的最小值.

参考文献

[1] 甘志国.最佳查血方案问题[J].数学通讯,2005(5):29-31.

对两个结论的注记

文献[1]在推证正弦定理时,得到了三个"副产品",其中前两个是:

结论 1 在 $\triangle ABC$ 中

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2$$

结论 2 在 $\triangle ABC$ 中, $1<\cos A+\cos B+\cos C<\frac{\pi}{2}$.

可把结论 2 加强为

结论 2' 在 $\triangle ABC$ 中, $1<\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$,且两端的常数都是最佳的.

证明 容易证得

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad ①$$

由此知要证不等式的左边成立.

又 $\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1\leqslant$

$$2\cos\frac{A+B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1=$$

$$\frac{3}{2}-2(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{3}{2}$$

由此得要证不等式的右边成立.

结论 1 是正确的,但文献[1]中只证明了 $\triangle ABC$ 是锐角三角形的情形.

文献[1]是由

$$\cos A+\cos B>\sin C>0$$

$$\cos B+\cos C>\sin A>0$$

$$\cos C+\cos A>\sin B>0$$

导出结论 1 的.事实上,在锐角 $\triangle ABC$ 中以上三式均成立;在直角、钝角 $\triangle ABC$ 中,以上三式均可能不成立.比如, $A>\frac{\pi}{2}$ 时,可证 $\cos A+\cos B<\sin C$:

$\cos A+\cos B<\sin C\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}<2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow$

$$\cos\frac{A-B}{2}<\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{A-B}{2}>\frac{C}{2}\left(\text{因为}\frac{A-B}{2},\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)\Leftrightarrow$$
$$A>B+C\Leftrightarrow A>\pi-A\Leftrightarrow A>\frac{\pi}{2}$$

当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时(不妨设 $C=\frac{\pi}{2}$),也可证得结论 1 成立,此时

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{\sin A+\cos A+1}{\sin A+\cos A}=1+\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)}$$

由 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,得

$$A+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right),\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$$

所以
$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\in\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}},2\right)$$

当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时,笔者还不能用初等方法证得结论 1 成立.

下面用导数给出结论 1 的统一证明.

当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时,结论 1 成立,此时

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos A+\frac{1}{2}-\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)}=$$
$$\frac{\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}}=$$
$$\sqrt{3}<2$$

再证当 $B\neq\frac{\pi}{3}$ 时,结论 1 成立.

易证 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

由此式及 ①,得

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1}<2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{4}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+\frac{1}{4}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}>$$

$\frac{1}{2}$(因为 $C=\pi-A-B$) ②

记$f(A)=\dfrac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}+\frac{1}{4}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}$$(A\in(0,\pi-B),B\in(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{3},\pi))$.

先求连续函数$f(A)$在闭区间$[0,\pi-B]$上的最小值$g(B)$.

算得

$$f'(A)=\frac{\cos(A+\frac{B}{2})(\sin^2\frac{B}{2}-\frac{1}{4})}{2\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin^2\frac{A+B}{2}}$$

令$f'(A)=0$,得$\cos(A+\frac{B}{2})=0$(因为$B\neq\frac{\pi}{3}$,所以$\sin^2\frac{B}{2}\neq\frac{1}{4}$)

$$A+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2},A=\frac{\pi-B}{2}$$

所以$g(B)$是$f(0),f(\pi-B),f(\frac{\pi-B}{2})$中的较小者.

又$f(0)=f(\pi-B)=\frac{1}{2\sin B},\frac{1}{2\sin B}$的取值范围是$(\frac{1}{2},+\infty)$.

$$f(\frac{\pi-B}{2})=\frac{\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{\pi+B}{4}+\frac{1}{4}}{\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{\pi+B}{4}}=$$

$$\frac{\cos B+2\sin\frac{B}{2}}{\sin B+2\cos\frac{B}{2}}(B\in(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{3},\pi))$$

设$h(B)=\dfrac{\cos B+2\sin\frac{B}{2}}{\sin B+2\cos\frac{B}{2}}(B\in(0,\pi))$,因为

$$h'(B)=\frac{1-\sin\frac{3}{2}B}{(\sin B+2\cos\frac{B}{2})^2}\geqslant 0(当且仅当\ B=\frac{\pi}{3}\ 时取等号)$$

所以 $h(B)$ 是 $(0,\pi)$ 上的增函数,从而可得 $f(\frac{\pi-B}{2})$ 的取值范围是 $(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{3}})\cup(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$.

得 $g(B)\geqslant\frac{1}{2}$,当且仅当($A=0$ 或 $\pi-B$)且 $B=\frac{\pi}{2}$ 时 $g(B)=\frac{1}{2}$,所以式 ② 成立.即结论 1 成立.

以上证明也证得了如下结论.

结论 1′ 在 $\triangle ABC$ 中

$$0<\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2$$

且两端的常数都是最佳的.

以上思想方法也是解决多元函数最值的一种重要方法.

参考文献

[1] 李勤俭,正弦定理推证的三个“副产品”[J].数学通讯,2006(3):10.

$(1+x)^\alpha$ 的展开式的应用

引理[1] 若 $|x|<1,\alpha\in\mathbf{R}$,则

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\cdots$$

定理 1 若 $x,\alpha\in(0,1)$,则 $1+\alpha x-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}x^2<(1+x)^\alpha<1+\alpha x$.

证明 由引理,得

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}x^2+\left[\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{3!}x^3-\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}{4!}x^4\right]+\cdots+\left[\frac{\alpha(1-\alpha)\cdots(2i-\alpha)}{(2i+1)!}x^{2i+1}-\frac{\alpha(1-\alpha)\cdots(2i+1-\alpha)}{(2i+2)!}x^{2i+2}\right]+\cdots=1+\alpha x-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}x^2+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha(1-\alpha)\cdots(2i-\alpha)}{(2i+1)!}x^{2i+1}\left(1-\frac{2i+1-\alpha}{2i+2}x\right)$$

由 $x,\alpha\in(0,1)$,可证

$$\frac{\alpha(1-\alpha)\cdots(2i-\alpha)}{(2i+1)!}x^{2i+1}\left(1-\frac{2i+1-\alpha}{2i+2}x\right)>0$$

所以

$$(1+x)^\alpha>1+\alpha x-\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}x^2$$

还可得

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha(1-\alpha)\cdots(2i-1-\alpha)}{(2i)!}x^{2i}\left(1-\frac{2i-\alpha}{2i+1}x\right)$$

从而可证 $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$,所以定理 1 成立.

定理 2 若 $m,n\in\mathbf{N}^*,m\geqslant2$,则 $1+\frac{1}{(m+1)n}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{mn}$.

证明 在定理 1 中,令 $x=\frac{1}{m},\alpha=\frac{1}{n}$,得

$$1+\frac{1}{(m+1)n}<1+\frac{2mn-n+1}{2m^2n^2}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{mn}$$

即定理 2 成立.

在定理 2 中,令 $m=n+1$,得

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}>1+\frac{1}{n(n+2)}$$

所以

$$\frac{n+2}{n+1}>\frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n},\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}>\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}$$

$$\frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2-1}}>\frac{(n+1)^{(n+1)(n+2)}}{(n+2)^{(n+1)^2}} \tag{①}$$

定理 3 $\frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}<\frac{n+1}{[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明 $\frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}<\frac{n+1}{[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}}\Leftrightarrow\frac{n}{n+1}<\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n+1}}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}\Leftrightarrow$

$$(n!)^{\frac{1}{n(n+1)}}>\frac{n}{(n+1)^{\frac{n}{n+1}}}\Leftrightarrow n!>\frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2}}$$

下面用数学归纳法证明

$$n!>\frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2}} \tag{②}$$

(1)$n=1$ 时是成立的.

(2) 假设 n 时成立:$n!>\frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2}}$,得

$$(n+1)!>\frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2-1}}$$

再由式 ①,得

$$(n+1)!>\frac{n^{(n+1)(n+2)}}{(n+2)^{(n+1)^2}}$$

即 $n+1$ 时成立,所以式 ② 成立,得定理 3 成立.

定理 4 $\left[\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n<n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$.

证明 由式 ②,得 $n!>\left[\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n$.

可用数学归纳法证明 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$.

所以定理 4 成立.

因为数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$严格递增且趋向于 e,所以由定理 4 得

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n \quad ③$$

该式即文献[2]中第11页第74题的结论,所以定理4是式③的加强.

定理5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=1$.

证明 由式③,得

$$\frac{2}{\sqrt[n]{e}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < e \quad ④$$

所以

$$\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n^2]{e}} < \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n^2]{n!}} < \sqrt[n]{e}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n^2]{e}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}=1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n^2]{n!}}=1$.

又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=1$.

定理6 已知$n\geqslant n_0$.若$n=k$时,$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-n_0}$成立,则它在$n\geqslant k$时均成立.

证明 因为$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-n_0}\Leftrightarrow n!>\frac{n^{n(n-n_0+1)}}{(n+1)^{n(n-n_0)}}$,所以只需用数学归纳证明下式在$n\geqslant k$时均成立

$$n! > \frac{n^{n(n-n_0+1)}}{(n+1)^{n(n-n_0)}} \quad ⑤$$

(1)$n=k$时成立.

(2)由$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$,得

$$(n+1)^{2n+1} < n^n(n+2)^{n+1}$$

$$(n+1)^{(n+1)(n-n_0+2)+n(n-n_0)-1} < n^{n(n-n_0+1)}(n+2)^{(n+1)(n-n_0+1)}$$

$$\frac{(n+1)n^{n(n-n_0+1)}}{(n+1)^{n(n-n_0)}} > \frac{(n+1)^{(n+1)(n-n_0+2)}}{(n+2)^{(n+1)(n-n_0+1)}} \quad ⑥$$

假设式⑤在n时成立,由式⑥可得式⑤在$n+1$时成立.

所以定理6成立.

定理6是定理4左边不等式的加强.比如,可得

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2} (n\in \mathbf{N}^*, n\geqslant 13)$$

由定理3,得$\left\{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$是严格递增数列,又由式④知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$存在.由式④得$2\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant e$.

请问：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=$？笔者猜测：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

参考文献

[1] 华东师范大学数学系.数学分析(下册)[M].北京:高等教育出版社,1981:102-103.
[2] Б.П.吉米多维奇.数学分析习题集[M].李荣冻,译.北京:高等教育出版社,1958.

极限与导数三文

1 a^a 与 b^b,谁大?

设 $y = x^x(x > 0)$,得 $y' = (e^{x\ln x})' = x^x(\ln x + 1)$,由此可得函数 $y = x^x(x > 0)$ 的单调区间:当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时,函数 y 是减函数;当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时,函数 y 是增函数;当且仅当 $x = \frac{1}{e}$ 时,函数 y 取到最小值,且最小值是$\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$.

由此,得当 $0 < a < b \leqslant \frac{1}{e}$ 时,$a^a > b^b$;当$\frac{1}{e} \leqslant a < b < 1$ 时,$a^a < b^b$;当 $0 < a < \frac{1}{e}, \frac{1}{e} < b < 1$ 时,$a^a > b^b, a^a = b^b, a^a < b^b$ 均有可能.

2 一道高考题的简解

2005 年高考全国卷 Ⅲ 第 6 题是一道新颖的选择题:

若 $a = \frac{\ln 2}{2}, b = \frac{\ln 3}{3}, c = \frac{\ln 5}{5}$,则(　　).

A. $a < b < c$　　B. $c < b < a$　　C. $c < a < b$　　D. $b < a < c$

对于此题,无论是两个两个的比较,还是先用导数判断函数的单调性(分别见下面的解法 1、解法 2),都比较麻烦,而下面的解法 3 却很简洁.

解法 1　因为 $a = \ln\sqrt{2}, b = \ln\sqrt[3]{3}, c = \ln\sqrt[5]{5}$,所以要比较 a, b, c 的大小,即比较$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}$ 的大小,还需两个两个的比较

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}, \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt[10]{32}, \sqrt[5]{5} = \sqrt[10]{25}, \sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$$

$$\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

$$\ln\sqrt[5]{5} < \ln\sqrt{2} < \ln\sqrt[3]{3}$$

$$c < a < b$$

选 C.

解法 2　考察函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,得 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$, $(e, +\infty)$ 上分别是增、减函数,但由此只能得到 $b > c$,还需用解法 1 得出 $b >$

$a, a > c$,所以 $c < a < b$,选 C.

解法 3 同解法 2 先得到 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 上是减函数,所以 $f(3)>f(4)=f(2)>f(5)$, $c<a<b$,选 C.

3 一类函数极限的简便求法

定理 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足:① $f(x_0)=g(x_0)=0$;② 在 x_0 处均可导且 $g'(x_0)\neq 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

证明

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}}{\frac{g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}{\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}}(\text{由 ①})=$$

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}}(\text{由 ②})=$$

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

例 求:(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$;(4) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$.

解 由定理容易求出它们的答案分别为:(1) $\frac{2}{3}$;(2) $\sqrt{2}$;(3) $\frac{3}{2}$;(4) -2.

一道课本趣题的伴随问题

全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·(第一册(上))》(2006年人民教育出版社)(下简称教科书)第144页的第4题是:

一个球从100 m高处自由落下,每次着地后又跳回到原高度的一半再落下.当它第10次着地时,经过的路程共是多少(精确到1 m)?

我们来看这道趣题的两个伴随问题:

问题1 一个球从100 m高处自由落下,每次着地后又跳回到原高度的一半再落下.如此反复下去,球经过的路程共是多少?

问题2 一个球从100 m高处自由落下,每次着地后又跳回到原高度的一半再落下.如此反复下去,球运动共用的时间是多少?

这两个答案都是无限大($+\infty$)吗?(球永远运动下去,不会停止)

请注意,无限多个正数的和也可能是有限数,读者一定熟悉下面的等式

$$0.3+0.03+0.003+\cdots=0.333\cdots=\frac{1}{3}$$

问题1的解答 当球第n次着地时,共下降了n次,上升了$n-1$次,各段路程分别形成等比数列:

$$100,\frac{100}{2},\frac{100}{2^2},\cdots,\frac{100}{2^{n-1}}$$

$$\frac{100}{2},\frac{100}{2^2},\cdots,\frac{100}{2^{n-1}}$$

当球第n次着地时,球共经过的路程是以上两个等比数列各项(共$2n-1$项)的和

$$S_n=100+2\left(\frac{100}{2}+\frac{100}{2^2}+\cdots+\frac{100}{2^{n-1}}\right)=100+200\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=$$

$$100+200\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=300-\frac{25}{2^{n-4}}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=300$,所以球共经过的路程是300 m.

注 当且仅当$\frac{25}{2^{n-4}}\leqslant 0.5$即$n\geqslant 10$也即9以上的次数着地时,球共经过的路程(精确到1 m)都是300 m.

问题 2 的解答 参考问题 1 的解答,并由公式 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\text{因为 } h=\frac{1}{2}gt^2\right)$ 知,当球第 n 次着地时,共下降了 n 次,上升了 $n-1$ 次,各段时间分别形成等比数列

$$\sqrt{\frac{200}{g}},\sqrt{\frac{200}{2g}},\sqrt{\frac{200}{2^2g}},\cdots,\sqrt{\frac{200}{2^{n-1}g}}$$

$$\sqrt{\frac{200}{2g}},\sqrt{\frac{200}{2^2g}},\cdots,\sqrt{\frac{200}{2^{n-1}g}}$$

当球第 n 次着地时,球共经过的时间是以上两个等比数列各项(共 $2n-1$ 项)的和

$$T_n=\sqrt{\frac{200}{g}}+2\left(\sqrt{\frac{200}{2g}}+\sqrt{\frac{200}{2^2g}}+\cdots+\sqrt{\frac{200}{2^{n-1}g}}\right)=$$

$$\sqrt{\frac{200}{g}}+2\sqrt{\frac{200}{g}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2^2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}\right)=$$

$$\sqrt{\frac{200}{g}}+2\sqrt{\frac{200}{g}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2^n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\sqrt{\frac{200}{g}}+2\sqrt{\frac{200}{g}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{200}{g}}(3+2\sqrt{2})\approx 26.3$,所以球运动共用的时间是 26.3 s.

2008 年高考试题(辽宁理科卷)压轴题的简解

2008 年高考试题(辽宁理科卷)的压轴题是:

设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(Ⅱ)是否存在实数 a,使得关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$?若存在,求 a 的取值范围;若不存在,试说明理由.

第(Ⅰ)问的解法是常规的

$$f'(x)=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=-\frac{\ln x}{(1+x)^2}$$

故当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)>0$;$x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,在 $(1,+\infty)$ 单调递减.

由此知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的极大值为 $f(1)=\ln 2$,没有最小值.

下面再给出第(Ⅱ)问较原参考解答更简洁的解法.

解法 1 若能证明

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=0 \tag{①}$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=0 \tag{②}$$

再由(Ⅰ)的解答过程立知函数 $f(x)$(其定义域是 $(0,+\infty)$)的值域是 $(0,\ln 2]$.

由此立得:

当 $a\leqslant 0$ 时,关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$;当 $a>0$ 时,关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集不是 $(0,+\infty)$ ③

易得 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}+\ln\dfrac{x+1}{x}(x>0)$,熟悉洛必达法则的读者容易证得①② 均成立,下面再给出另外的证法.

因为当 $x\to 0^+$ 时 $x+1\to 1^+$,所以

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x+\ln\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}0=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x+1}+\ln 1\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x+1}=\lim_{e^t\to +\infty}\frac{\ln e^t}{e^t+1}=\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{\frac{e^t+1}{t}}$$

所以要证明 ② 成立，只需证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^t+1}{t}}=0$. 即证当 $t\to+\infty$ 时，$\dfrac{e^t+1}{t}\to+\infty$. 这只需证

$$e^t>t^2(t>\ln 2) \quad ④$$

设 $g(t)=e^t-2t(t>\ln 2)$,得

$$g'(t)=e^t-2>0(t>\ln 2)$$

所以 $g(t)$ 是增函数,得

$$g(t)>g(\ln 2)>0(t>\ln 2)$$

设 $h(t)=e^t-t^2(t>\ln 2)$,得

$$h'(t)=e^t-2t>0(t>\ln 2)$$

说明 $h(t)$ 也是增函数,得

$$h(t)>h(\ln 2)>0(t>\ln 2)$$

即 ④ 成立,所以 ② 成立,③ 也成立,所以所求 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

解法 2 因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,所以

$$f(x)=\frac{(1+x)\ln(1+x)-x\ln x}{1+x}=\frac{\ln(1+x)+x[\ln(1+x)-\ln x]}{1+x}>0$$

由此立得:当 $a\leqslant 0$ 时,关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$.

再同解法 1 可证得 ① 或 ② 成立,又由(Ⅰ)的解答过程立知:当 $a>0$ 时,关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集不是 $(0,+\infty)$,所以所求 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

一道例题的简解

笔者发现文献[1]的最后一道例题有简洁解法：

求证：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n<n+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2)$.

简证 下面用导数证明

$$\ln n<n+1(n\in\mathbf{N}^*) \qquad ①$$

设 $f(x)=x-\ln x(x\geqslant 1)$，得 $f'(x)=1-\frac{1}{x}\geqslant 0(x\geqslant 1)$，所以 $f(x)$ 是增函数，$f(x)\geqslant f(1)=1$，即 $\ln x\leqslant x+1(x\geqslant 1)$.

得①成立，所以要证结论的右边成立！

再用数学归纳法证明要证结论的左边成立.

$n=2$ 时显然成立.

假设 $n=k$ 时成立：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}<\ln k(k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant 2)$.

下证 $n=k+1$ 时成立：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)(k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant 2)$. 只需证明

$$\ln k+\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)(k\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }k\geqslant 2)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{k+1}(k\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }k\geqslant 2)$$

这只需用导数证明

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0(x>0) \qquad ②$$

设 $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}(x>0)$，得 $g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}<0$，说明 $g(x)$ 是减函数. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，所以 $g(x)>0$，得①成立，所以要证结论的左边也成立！

参考文献

[1] 袁如标. 在证明不等式中感受函数的魅力[J]. 中学数学月刊，2008，(9)：17-18.

由数学问题1749得到两类有极限的数列

本文将采用文献[1]中使用的一种简便记法：记 $a = a^{(1)}, a^a = a^{(2)}, \cdots, a^{a^{(n)}} = a^{(n+1)}(n \in \mathbf{N}^*$，下同).

《数学通报》2008年第9期刊登了数学问题1749及其解答(作者：柳青步、柳天闪)：

设 $0 < k < 1$，试比较 $k^{(2\,004)}$ 与 $k^{(2\,003)}$ 的大小.

解　由指数函数的单调性，可得

$$0 < k < 1 \Rightarrow k < k^k < 1 \Rightarrow k < k^{k^k} < k^k \Rightarrow k^{(3)} < k^{(4)} < k^{(2)} \Rightarrow k^{(3)} < k^{(5)} < k^{(4)} \Rightarrow \cdots$$

进而可得(也可对 n 用数学归纳法给予严格的证明)

$$k^{(2n+1)} < k^{(2n+2)} < k^{(2n)}, k^{(2n+1)} < k^{(2n+3)} < k^{(2n+2)}$$

所以
$$0 < k^{(2n+1)} < k^{(2n+3)} < k^{(2n+2)} < k^{(2n)} < 1 \qquad ①$$

立得 $k^{(2\,004)} > k^{(2\,003)}$.

当 $0 < k < 1$ 时，由①可得 $\{k^{(2n+1)}\}$，$\{k^{(2n)}\}$ 分别是递增、递减数列，再由“实数的连续性公理：单调有界数列必有极限”知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} k^{(2n+1)}$，$\lim\limits_{n\to\infty} k^{(2n)}$ 均存在. 本文将给出关于这种类型极限的一些结论.

下文中要使用文献[2]中使用的记号：$g(x) = x^{\frac{x^{\frac{x}{x-1}}}{1-x}}$.

引理1[②]　(1) 当 $0 < a < e^{-e} = 0.065\,988\,0\cdots$ 时，方程 $a^x = \log_a x$ 有且仅有三个解：一个是 $a^x = x$ 的唯一解 x_{12}，另两个是 $x_{11} = k^{\frac{1}{1-k}}, x_{13} = k^{\frac{k}{1-k}}$(其中 $a = g(k), 0 < k < 1$)，且 $x_{11}, x_{12} \in \left(0, \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e} = 0.367\,879\,4\cdots\right)$，$x_{13} \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

(2) 当 $e^{-e} \leqslant a < 1$ 时，方程 $a^x = \log_a x$ 有唯一解 x_2，x_2 也是 $a^x = x$ 的唯一解，且 $x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 1\right)$. 特别的，当 $a = e^{-e}$ 时，$x_2 = \frac{1}{e}$.

(3) 当 $1 < a < e^{\frac{1}{e}} = 1.444\,678\cdots$ 时，方程 $a^x = \log_a x$ 有且仅有两个解 x_{31}, x_{32}，且 x_{31}, x_{32} 也是 $a^x = x$ 仅有的两个解，$x_{31} \in (a, e)$，$x_{32} \in (e, +\infty)$.

(4) 当 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时,方程 $a^x = \log_a x$ 有唯一解 $x_4 = e$, $x_4 = e$ 也是 $a^x = x$ 的唯一解.

(5) 当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时,方程 $a^x = \log_a x$ 无解.

引理 2 当 $e^{-e} \leqslant a < 1$ 或 $a > 1$ 时,方程 $a^x = \log_a x$ 与 $a^x = x$ 同解.

引理 3 (1) 当 $0 < a < 1$ 时,$\{a^{(2n-1)}\}$,$\{a^{(2n)}\}$ 分别是递增、递减数列;

(2) 当 $a > 1$ 时,$\{a^{(n)}\}$ 是递增数列.

(参见 ① 可证引理 3)

引理 4[1] (1) 当 $0 < a < 1$ 时,方程 $a^x = \log_a x$ 的解在 $(a^{(2n-1)}, a^{(2n)})$ 范围内;

(2) 当 $a > 1$ 时,方程 $a^x = \log_a x$ 的解在 $(a^{(2n-1)}, +\infty)$ 范围内.

引理 5 (1) 当 $0 < a < 1$ 时,方程 $a^x = \log_a x$ 的解在 $[\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}, \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n)}]$ 范围内;

(2) 当 $a > 1$ 时,方程 $a^x = \log_a x$ 的解在 $[\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}, +\infty)$ 范围内.

(由引理 3,4 可得引理 5)

引理 6 (1) 当 $1 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)}$ 存在;

(2) 当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = +\infty$.

证明 (1) 由引理 3(2),只需证明 $\{a^{(n)}\}$ 是有上界的数列.下证:

当 $1 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$ 时,$a^{(n)} < e$(下面只证 $n \geqslant 2$ 时成立).

用数学归纳法可证:若 $1 \leqslant a < b$,则 $a^{(n)} < b^{(n)}$,所以

$$a^{(n)} \leqslant (e^{\frac{1}{e}})^{(n)} = (e^{\frac{1}{e}})^{(e^{\frac{1}{e}})^{\cdot^{\cdot^{(e^{\frac{1}{e}})(e^{\frac{1}{e}})}}}} \ (n \text{ 个 } e^{\frac{1}{e}}) <$$

$$(e^{\frac{1}{e}})^{(e^{\frac{1}{e}})^{\cdot^{\cdot^{(e^{\frac{1}{e}})(e^{1})}}}} \ (n-1 \text{ 个 } e^{\frac{1}{e}}) = e$$

(2) 由引理 3(2),只需证明 $\{a^{(n)}\}$ 是无界数列.

假设 $\{a^{(n)}\}$ 是有界数列,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = A < +\infty$.

由 $a^{a^{(n)}} = a^{(n+1)}$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{a^{(n)}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{(n+1)}$,即 $a^A = A$,这与引理 1(5) 及引理 2 矛盾!所以结论(2) 成立.

定理 以下 $x_{11}, x_{13}, x_2, x_{31}$ 的意义同引理 1.

(1) 当 $0 < a < e^{-e}$ 时,$0 < \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)} = x_{11} < \frac{1}{e} < x_{13} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n)} < 1$(由此知 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)}$ 不存在).

(2) 当 $e^{-e}\leqslant a<1$ 时，$\frac{1}{e}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}=x_2<1$. 特别的，$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-e})^{(n)}=\frac{1}{e}$.

(3) 当 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 时，$a<\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}=x_{31}<e$.

(4) 当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}=e$.

(5) 当 $a>e^{\frac{1}{e}}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}=+\infty$.

证明　用引理1,5,6来证.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)}=A$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{a^{a^{(2n-1)}}}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n+1)}$，得 $a^{a^A}=A$，$a^A=\log_a A$.

又设 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n)}=B$，得 $a^B=\log_a B$，所以 $A,B\in\{x_{11},x_{12},x_{13}\}$.

由引理1(1)及引理5(1)知 $x_{11},x_{12},x_{13}\in[A,B]$，又 $x_{11}<x_{12}<x_{13}$，所以 $A=x_{11}$，$B=x_{13}$.

(2) 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n)}=x_2$，同上可证.

(3) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)}$. 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)}=x_{31}$.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)}=A$，可得 $a^A=\log_a A$. 由引理1(3)得 $A=x_{31}$ 或 x_{32}($x_{31}<x_{32}$).

又由引理5(2)知，$x_{31}\in[A,+\infty)$，所以 $A=x_{31}$.

(4) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}=A$，可得 $a^A=A$，又由引理1(4)知 $A=e$.

(5) 即引理6(2).

参考文献

[1] 李建武.关于方程 $a^x=\log_a x$ 解的范围[J].中学数学教学参考,2002(12):59.

[2] 甘志国.方程 $a^x=\log_a x$ 的解的个数及一类新型极限[M]//初等数学研究(Ⅰ).哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.

对渐近线的定义及求法的质疑

先看流传广泛，比较权威的《数学分析讲义（上册）》[1] 第259～260页给出的渐近线定义及求法：

定义 当曲线 C 上动点 P 沿着曲线 C 无限远移时，若动点 P 到某直线 l 的距离无限趋近于0（图1），称直线 l 是曲线 C 的渐近线.

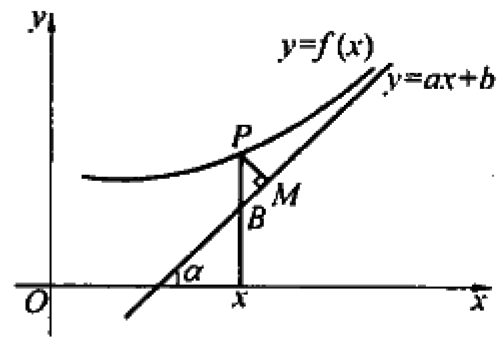


图 1

曲线的渐近线有两种，一种是垂直渐近线；另一种是斜渐近线（包括水平渐近线）.

(1) 垂直渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$，则直线 $x=a$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线（垂直于 x 轴）.

(2) 斜渐近线.

如图1，若直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线（$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$），问 a 与 b 应为何值？

设曲线 $y=f(x)$ 上动点 P 的横坐标为 x，则点 P 的平面坐标是 $(x,f(x))$. 已知 $PB=|f(x)-(ax+b)|$. 在直角 $\triangle PMB$ 中，$\angle BPM=\alpha$，于是动点 P 到直线 $y=ax+b$ 的距离 PM 是

$$PM=PB\cos\alpha=|f(x)-ax-b|\cos\alpha \quad ①$$

因为 α 是常数，所以当点 P 沿曲线 $y=f(x)$ 无限远移时，即当 $x\to\infty$ 时，有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0 \quad ②$$

则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0$，从而

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad ③$$

由式②，又有

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax] \quad ④$$

由上述讨论可知，若直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线，则 a 与 b 分别由式③与式④的极限确定.

对定义中的"当曲线上动点 P 沿着曲线 C 无限远移时，若动点 P 到直线 l 的

距离无限趋近于0(图1)"应怎样理解呢?

(1) 当曲线 C 在点 P 的两侧均无限延伸时,点 P 沿曲线 C 的两侧分别无限远移,动点 P 到某直线 l 的距离均无限趋近于0(例如,$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=a$ 就是指 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=a$,见文献[1]第69页).

按照这种理解:结合图2可知,直线 $y=x$ 是曲线

$$y=\begin{cases}-\sqrt{x^2-1} & (x<-1)\\ 0 & (-1\leqslant x\leqslant 1)\\ \sqrt{x^2-1} & (x>1)\end{cases} \qquad ⑤$$

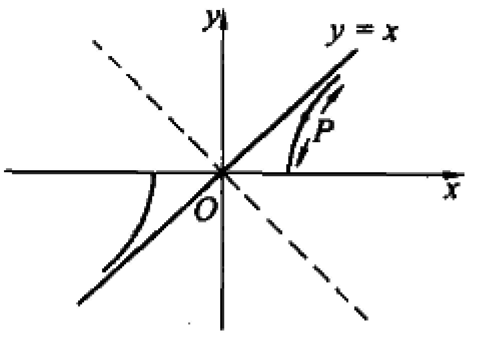


图2

的渐近线;结合图3可知,直线 $y=0$ 不是曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 的渐近线,因为图3中的点 P 沿曲线向左无限远移时点 P 到直线 $y=0$ 的距离不趋近于0而趋近于 $+\infty$,同理直线 $x=0$ 也不是曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 的渐近线.

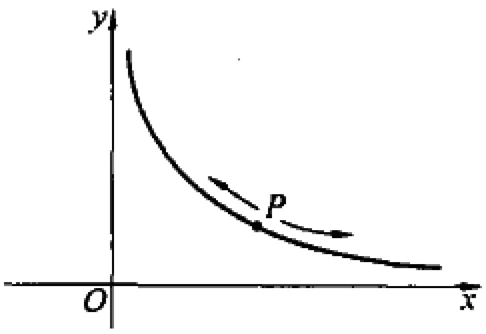


图3

(2) 当曲线 C 仅在点 P 的一侧无限延伸时,点 P 沿曲线 C 的这一侧无限远移,动点 P 到直线 l 的距离无限趋近于0.

(3) 当曲线 C 在点 P 的两侧均无限延伸时,点 P 沿曲线 C 上点 P 的某一侧无限远移,动点 P 到某直线 l 的距离无限趋近于0.

文献[1]"1.垂直渐近线"的求法是按(2),(3)来理解的.

由文献[1]的式(2)中的"$x\to\infty$"知,曲线 $f(x)$ 若存在斜渐近线,则 $f(x)$ 中的 x 无上界也无下界,即 $f(\pm\infty)$ 均有意义.由此知 x 轴并不是曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 的水平渐近线,x 轴也不是曲线 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 的渐近线.

若按(1)理解文献[1]的定义,则双曲线 $x^2-y^2=1$ 无渐近线.因为无论点 P 选在双曲线的哪一支上,点 P 沿曲线 C 的上下两侧分别无限远移,动点 P 到任一直线 l 的距离不能均无限趋近于0.事实上,右支上的 P 上移时,P 仅与直线 $y=x$ 的距离趋近于0;右支上的 P 无限下移时,P 仅与直线 $y=-x$ 的距离趋近于0.然而,高中《数学》课本[3]上就有结论"双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$".

因此,笔者建议渐近线的定义及求法应作以下改动:

定义 当曲线 C 上的动点 P 沿曲线 C 上点 P 的某一侧无限远移时,若动点 P 到某直线 l 的距离无限趋近于 0,则称直线 l 是曲线 C 的渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$;或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$,则直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

《数学》课本[3] 的论述"双曲线在第一象限的部分从射线 ON 的下方逐渐接近于射线 ON. 在其他象限内,也可以证明类似情况." 也体现了以上改动后的定义的思想.

这样定义之后,渐近线可以与曲线相交,比如,曲线 ⑤ 的渐近线就与曲线 ⑤ 相交于原点(图 2),这不足为怪. 由著名数学家谷超豪主编的《数学词典》[2] 第 182 页给出的渐近线定义"如果动点沿某一曲线无限远离原点时,动点到一定直线的距离趋于零,则称此定直线为此曲线的一条渐近线,也可看做曲线在无穷远点的切线" 知,渐近线即曲线在无穷远点处的切线,而直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 在 $x=c$ 处相切,在点 $(c,f(c))$ 的局部范围内相切(由导数的几何意义可知),l 与曲线 $y=f(x)$ 可以相交于点 $(c,f(c))$ 之外的点[4]. 由此可知:曲线 C 可以与其渐近线相交,但必须在无穷远点处相切.

参考文献

[1] 刘玉琏,傅沛仁. 数学分析讲义(上册)[M]. 2 版. 北京:人民教育出版社,1981.

[2] 谷超豪. 数学词典[M]. 上海:上海辞书出版社,1992.

[3] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)《数学·第二册(上)》[M]. 2 版. 北京:人民教育出版社,2000:109-110.

[3] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学(试验修订本)数学第三册(选修Ⅱ)(教师教学用书)[M]. 2 版. 北京:人民教育出版社,2001:60.

谈谈切线的定义

全日制普通高级中学教科书《数学·第三册》(2004年人民教育出版社)(选修Ⅰ)第59页及(选修Ⅱ)第110页都给出了切线的定义:切线是割线的极限位置(切线是割线与曲线的两个交点重合时的情形).

先看(选修Ⅰ)第64页的例2及(选修Ⅱ)第114页的例3及其解答:

已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P(2,\frac{8}{3})$,求:

(1) 点 P 处的切线的斜率;

(2) 点 P 处的切线方程.

答案是:(1)4;(2)$12x-3y-16=0$.

细心的读者可能会发现:曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 与其切线 $12x-3y-16=0$ 的交点除切点 $P(2,\frac{8}{3})$ 外,还有 $(-4,-\frac{64}{3})$. 这与二次曲线(圆,椭圆,双曲线,抛物线)的切线性质——二次曲线与其切线有唯一公共点不相符,以上所求切线有误吗?

(选修Ⅰ)第64页习题第3题及(选修Ⅱ)第115页例,第116页习题第9题也都有上述疑问.

(选修Ⅱ)第114页明确指出:"函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义,就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率的. 也就是说,曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率是 $f'(x_0)$. 相应地,切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$." 由此立得:若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处一定有切线,且切线方程就是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. 这就说明以上例题、习题的解答均不存在疑问.

再看看与(选修Ⅱ)配套使用的《教师教学用书》第60页的叙述就更清楚了:

在初中学习过圆的切线:直线和圆有唯一公共点时,叫做直线和圆相切. 这时直线叫做圆的切线,唯一的公共点叫做切点.

圆是一种特殊的曲线. 能不能将圆的切线推广为一般曲线的切线:直线和曲线有唯一公共点时,直线叫做曲线过该点的切线. 显然,这种定义是不妥当的.

观察图1中的曲线 C. 直线 l_1 虽然与曲线 C 有唯一公共点 M, 但我们不能说直线 l_1 与曲线 C 相切; 而直线 l_2 尽管与曲线 C 有不止一个公共点, 我们还是说直线 l_2 是曲线 C 在点 N 处的切线. 因此, 对于一般的曲线, 必须重新寻求曲线切线的定义.

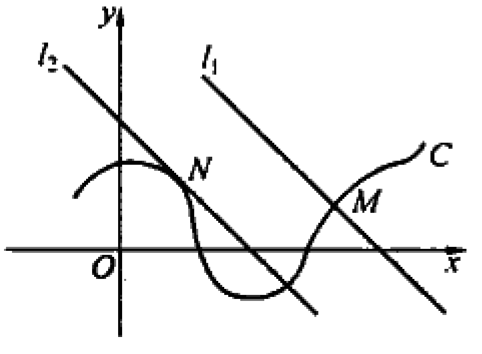


图 1

教科书是用割线的极限位置上的直线来定义切线的.

由以上叙述, 我们还应明确: 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线及函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数都只涉及 x_0 的局部范围.

类似于二次曲线的切线性质, 也有以下结论.

结论 若 $n(n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2)$ 次曲线 $y = f(x)$ ($f(x)$ 是 x 的 n 次多项式) 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处有切线 $y = kx + b$, 则 x_0 是方程 $f(x) = kx + b$ 的重根, 即 $f(x) - kx - b$ 能被 $(x - x_0)^2$ 整除.

问题1 已知曲线 $y = \frac{1}{3}x^3$ 在点 $P(2, \frac{8}{3})$ 处有切线(且此切线有斜率), 求此切线的方程.

解 用求导的方法是容易的, 下面用以上结论来解答.

可设所求切线方程为 $y = kx + \frac{8}{3} - 2k$.

由结论, 得 $x = 2$ 是方程

$$\frac{1}{3}x^3 = kx + \frac{8}{3} - 2k$$

即

$$(x - 2)(x^2 + 2x - 3k + 4) = 0$$

的重根, 也即 $x = 2$ 是方程

$$x^2 + 2x - 3k + 4 = 0$$

的根, 所求 $k = 4$, 所求切线方程为

$$12x - 3y - 16 = 0$$

问题2 是否存在一条直线与双曲线的一支相切且与另一支相切或相交呢?

答案是否定的. 理由如下:

可以验证, 直线与双曲线的两支最多有两个交点, 而切点是两个交点重合的情形, 所以可得要证结论成立.

几个含无限步运算的函数的定义域和值域

文献[1]介绍的下面三道题一定会吸引你的眼球和思维：

题1 若 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2(x>0)$，求 x 的值.

这是一道曾经出现在美国高中生数学考试——Putnam数学竞赛中的一道怪题——无穷阶梯.认真挖掘该题的隐含条件，可得 $x^2=2(x>0)$，所以 $x=\sqrt{2}$.

题2 若 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=4(x>0)$，求 x 的值.

同上可得 $x^4=4(x>0)$，所以 $x=\sqrt{2}$.

题3 计算 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

解法1 由题1的结论知答案为2.

解法2 由题2的结论知答案为4.

难道 $2=4$?这不是悖论嘛!下面来解决这个悖论问题.

涉及无穷的问题，高中生知道的并不多，很容易陷入错误的陷阱，再看一例：

题4 计算：$1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解法1 原式 $=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$.

解法2 原式 $=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots=1-0-0-0-\cdots=1$.

解法3 设原式 $=S$，得 $S=1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)=1-S$，$S=\frac{1}{2}$.

实际上，无穷项的和

$$S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

是否存在，应取决于数列 $\{S_n\}(S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)$：$u_1,u_1+u_2,u_1+u_2+u_3,u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n,\cdots$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是否存在?若存在，则 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$；否则，$S$ 也不存在.

因为以数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 的前 n 项和 S_n 为通项的数列 $\{S_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不

存在($\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1}=1,\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=0,1\neq 0$),所以 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 的值不存在.因而题4的三种解法都是错误的!

设 $u_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}$($n$ 个$\sqrt{2}$),则$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ 是否存在(即是否有意义),取决于 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 是否存在,且

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=\lim_{n\to\infty} u_n$$

下面运用实数的连续性公理"单调有界数列必有极限"(注意:本文中的单调不一定指严格单调)来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在:易用数学归纳法分别证得 $u_n<u_{n+1}$;$u_n<2$,所以 $u_n\geqslant u_1=\sqrt{2}$,得$\sqrt{2}\leqslant u_n<2$.

可设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}=a(\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2)$,在等式 $u_{n+1}=\sqrt{2}^{u_n}$ 两边取极限,得

$$a=\sqrt{2}^a,a^2=(\sqrt{2}^a)^2=(\sqrt{2}^2)^a=2^a$$

作出函数 $y=x^2$ 及 $y=2^x$ 的图象,可知它们有三个不同的交点,所以方程 $x^2=2^x$ 有三个实根:一个负根和两个正根(2和4).且还可得

$$x^2<2^x(\sqrt{2}\leqslant x<2) \quad ①$$

下面再用导数给予①的严格证明:设 $f(x)=2^x-x^2(\sqrt{2}\leqslant x<2)$,即证 $f(x)>0=f(2)$,只需证 $f'(x)=2(2^{x-1}\ln 2-x)<0,2^{2^{x-1}}<e^x$.这由$\sqrt{2}\leqslant x<2$ 可证:$2^{2^{x-1}}<4<4.113\,2\cdots=e^{\sqrt{2}}\leqslant e^x$.

由①立得题3的正确答案:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=\lim_{n\to\infty} u_n=a=2$$

题5 设 x 在正数范围内取值,求函数

$$G(x)=x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

的定义域和值域.

这是一个很困难的问题(文献[1]得到函数 $G(x)$ 的定义域是$(0,e^{\frac{1}{e}})$,这个答案及其解法均不对),本文末将解决这个问题.先看一些简单的问题.

专著[2]第537~538页的定理3,即

$$\lim_{k\to+\infty} 2^{k-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{n}}}}(k\text{ 个根号})=\frac{\pi}{n}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 3) \quad ②$$

(专著[2]对上式有印刷错误:专著[2]第538页第一行中的 $\cos\frac{\pi}{n}$ 应改为

$2\cos\frac{\pi}{n}$.)

在 ② 中令 $n=3,4$,得

$$\lim_{k\to+\infty}2^{k-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\text{(}k\text{ 个根号)}=\frac{\pi}{3} \quad ③$$

$$\lim_{k\to+\infty}2^{k}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\text{(}k\text{ 个根号)}=\pi \quad ④$$

由极限 ②③④ 知(以下三个含根号的式子中均含无限个根号):

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{n}}}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=2 \quad ⑤$$

这就启发笔者提出

题6 求函数 $g(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}$(含无限个根号)的定义域和值域.

解 设 $u_n(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}$(含 n 个根号,$x\geqslant-2$),对 n 用数学归纳法容易证得:

当 $-2\leqslant x\leqslant2$ 时,$\{u_n(x)\}$是单调递增数列且$0\leqslant u_n(x)\leqslant2$;当 $x>2$ 时,$\{u_n(x)\}$是严格单调递减数列且 $u_n(x)>2$.

从而可得 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=2$,所以函数 $g(x)$ 的定义域是$[-2,+\infty)$,值域是$\{2\}$.

由此也立得 ⑤ 成立.

题7 求函数 $g_a(x)=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a+x}}}$(含无限个根号)的定义域和值域.

解 (1) 当 $a=0$ 时,

$$g_a(x)=g_0(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{x}=\begin{cases}0 & (x=0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$$

所以函数 $g_0(x)$ 的定义域是$[0,+\infty)$,值域是$\{0,1\}$,且当且仅当 $x=0$ 时,$g_0(x)=0$.

(2) 当 $a>0$ 时,设 $v_n(x)=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a+x}}}$(含 n 个根号,$x\geqslant-a$),对 n 用数学归纳法容易证得:

① 当 $-a\leqslant x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 时,$\{v_n(x)\}$ 是严格单调递增数列且 $0\leqslant$

$v_n(x) < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$,所以可得此时 $g_a(x)$ 的定义域是$\left[-a,\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$,值域是$\left\{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right\}$.

② 当 $x \geqslant \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ 时(由 $a>0$ 知 $x>0$ 成立),可证$\{v_n(x)\}$是单调递减数列且 $v_n(x) \geqslant \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.从而可得,若 $g_a(x)$ 有意义,则 $g_a(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.此时 $g_a(x)$ 的定义域是$\left[\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},+\infty\right)$,值域是$\left\{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right\}$.

综上所述,得此时 $g_a(x)$ 的定义域是$[-a,+\infty)$,值域是$\left\{\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}\right\}$.

(3) 当 $a<0$ 时,先得:若 $g_a(x)$ 有意义,则 $x \geqslant -a>0$.设 $v_n(x) = \sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a+x}}}$(含 n 个根号,$x \geqslant -a>0$),若 $g_a(x)$ 有意义即 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)$ 存在,则 $g_a(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = \frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$,所以 $-\frac{1}{4} \leqslant a<0$.

$g_a(x)$ 有意义时,还得

$$v_1(x) = \sqrt{a+x}$$
$$v_2(x) = \sqrt{a+\sqrt{a+x}}$$
$$v_3(x) = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}}}$$
$$\cdots$$

均有意义,即

$$x \geqslant -a$$
$$x \geqslant a^2-a$$
$$x \geqslant (a^2-a)^2-a$$
$$\cdots$$

设 $-\frac{1}{4} \leqslant a<0, A_1=-a, A_{n+1}=A_n^2-a$,可对 n 用数学归纳法证得$A_n < \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ 且$\{A_n\}$是严格单调递增数列,所以可求得$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

所以 $g_a(x)$ 有意义时,必有 $x \geqslant \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, -\frac{1}{4} \leqslant a<0$.

① 当 $x = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ 时,可证 $v_n(x) = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$,所以此时 $g_a(x)$ 的

定义域和值域均是$\left\{\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\right\}$.

② 当$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$时,可证$\{v_n(x)\}$是严格单调递增数列且$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<v_n(x)<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.从而可得,若$g_a(x)$有意义,则$g_a(x)=\lim\limits_{n\to\infty}v_n(x)=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 可得此时$g_a(x)$的定义域是$\left(\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)$,值域是$\left\{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right\}$.

③ 当$x\geqslant\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$时,可证$\{v_n(x)\}$是单调递减数列且$v_n(x)\geqslant\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 从而可得,若$g_a(x)$有意义,则$g_a(x)=\lim\limits_{n\to\infty}v_n(x)=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. 可得此时$g_a(x)$的定义域是$\left[\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},+\infty\right)$,值域是$\left\{\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right\}$.

综上所述,得当$a<-\frac{1}{4}$时,$g_a(x)$无意义;当$-\frac{1}{4}\leqslant a<0$时,$g_a(x)$的定义域是$\left[\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},+\infty\right)$,值域是$\left\{\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right\}$,且当且仅当$x=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$时$g_a(x)=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

题8 求函数$h_a(x)=\sqrt{a\cdot\sqrt{a\cdot\cdots\cdot a\cdot\sqrt{ax}}}$(含无限个根号)的定义域和值域.

解 (1) 当$a=0$时,定义域为$\mathbf{R}$,值域为$\{0\}$.

(2) 当$a<0$时,定义域、值域均为$\{0\}$.

(3) 当$a>0$时,容易求得定义域为$[0,+\infty)$,值域为$\{0,a\}$,且当且仅当$x=0$时,$h_a(x)=0$. (当$a>0$且$x>0$时的另解:$h_a(x)=\lim\limits_{n\to\infty}a^{1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n}x^{1/2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{1-1/2^n}x^{1/2^n}=a$.)

下面用一些引理来解答题5.

引理1[2] (方程$a^x=\log_a x$解的个数) 设$g(x)=x^{\frac{x^{\frac{x}{x-1}}}{1-x}}$,则

(1) 当$0<a<e^{-e}=0.065\,988\,0\cdots$时,方程$a^x=\log_a x$有且仅有三个解:一个是$a^x=x$的唯一解$x_{12}$,另两个是$x_{11}=k^{\frac{1}{1-k}}$,$x_{13}=k^{\frac{k}{1-k}}$(其中$a=g(k)$,

$0 < k < 1$)，且 $x_{11}, x_{12} \in \left(0, \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e} = 0.3678794\cdots\right)$，$x_{13} \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

(2) 当 $e^{-e} \leqslant a < 1$ 时，$a^x = \log_a x$ 有唯一解 x_2，x_2 也是 $a^x = x$ 的唯一解，且 $x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 1\right)$. 特别的，当 $a = e^{-e}$ 时，$x_2 = \frac{1}{e}$.

(3) 当 $1 < a < e^{\frac{1}{e}} = 1.4446678\cdots$ 时，$a^x = \log_a x$ 有且仅有两个解 x_{31}, x_{32}，且 x_{31}, x_{32} 也是 $a^x = x$ 仅有的两个解，$x_{31} \in (a, e)$，$x_{32} \in (e, +\infty)$.

(4) 当 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时，$a^x = \log_a x$ 有唯一解 $x_4 = e$，$x_4 = e$ 也是 $a^x = x$ 的唯一解.

(5) 当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时，$a^x = \log_a x$ 无解.

引理 2[3] 记 $a = a^{(1)}, a^a = a^{(2)}, \cdots, a^{a^{(n)}} = a^{(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*)$（下同），则方程 $a^x = \log_a x$ 的解 x_0 满足：

(1) 当 $0 < a < 1$ 时，$x_0 \in (a^{(2n-1)}, a^{(2n)})$；

(2) 当 $a > 1$ 时，$x_0 \in (a^{(2n-1)}, +\infty)$.

引理 3 (1) 当 $0 < a < 1$ 时，$\{a^{(2n-1)}\}$ 是严格递增数列，$\{a^{(2n)}\}$ 是严格递减数列；

(2) 当 $a > 1$ 时，$\{a^{(n)}\}$ 是严格递增数列.

(均可用数学归纳法及指数函数的单调性证出.

文献[1]说"当 $0 < a < 1$ 时，$\{a^{(n)}\}$ 是严格递减数列"是不对的，比如，当 $a = \frac{1}{2}$ 时，$a^{(1)} < a^{(2)}, a^{(2)} > a^{(3)}$.)

引理 4 方程 $a^x = \log_a x$ 的解 x_0 满足(当以下极限存在时)：

(1) 当 $0 < a < 1$ 时，$x_0 \in [\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}, \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n)}]$；

(2) 当 $a > 1$ 时，$x_0 \in [\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}, +\infty)$.

(由引理 2,3 立得)

引理 5 (1) 当 $0 < a < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n-1)}, \lim\limits_{n\to\infty} a^{(2n)}$ 均存在；

(2) 当 $1 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)}$ 均存在；

(3) 当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = +\infty$.

证明 (1) 因为 $0 < a < 1$ 时，$a^{(2n-1)} < 1, a^{(2n)} > 0$，再由引理 3(1) 及"单调有界数列必有极限"知(1)成立.

(2) 由引理 3(2)，只需证明 $\{a^{(n)}\}$ 是有界数列. 下证：

当 $1 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$ 时，$a^{(n)} < e$（$n = 1$ 时成立，下证 $n \geqslant 2$ 时成立）.

$$a^{(n)} \leqslant (e^{\frac{1}{e}})^{(n)} = (e^{\frac{1}{e}})^{(e^{\frac{1}{e}})^{\cdot^{\cdot^{(e^{\frac{1}{e}})^{(e^{\frac{1}{e}})}}}}}(n\text{个 }e^{\frac{1}{e}}) <$$

$$(e^{\frac{1}{e}})^{(e^{\frac{1}{e}})^{\cdot^{\cdot^{(e^{\frac{1}{e}})^{(e^{1})}}}}}(n-1\text{个 }e^{\frac{1}{e}}) = e$$

(3) 由引理3(2),只需证明$\{a^{(n)}\}$是无界数列.

假设$\{a^{(n)}\}$是有界数列,则$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)} = A < +\infty$.

由$a^{a^{(n)}} = a^{(n+1)}$得$\lim\limits_{n\to\infty}a^{a^{(n)}} = \lim\limits_{n\to\infty}a^{(n+1)}$,$a^A = A$,这与引理1(5)矛盾(由增函数与其反函数图象的交点在直线$y = x$上,可得:当$a > 1$时,方程$a^x = \log_a x$与$a^x = x$同解)!所以(3)成立.

定理1 以下$x_{11}, x_{13}, x_2, x_{31}$的意义同引理1.

(1) 当$0 < a < e^{-e}$时,$0 < \lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)} = x_{11} < \dfrac{1}{e} < x_{13} = \lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n)} < 1$(由此知$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}$不存在).

(2) 当$e^{-e} \leqslant a < 1$时,$\dfrac{1}{e} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)} = x_2 < 1$.特别的,$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-e})^{(n)} = \dfrac{1}{e}$.

(3) 当$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$时,$a < \lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)} = x_{31} < e$.

(4) 当$a = e^{\frac{1}{e}}$时,$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)} = e$.

(5) 当$a > e^{\frac{1}{e}}$时,$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)} = +\infty$.

证明 用引理1,4,5来证.

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)} = A$,又$\lim\limits_{n\to\infty}a^{a^{a^{(2n-1)}}} = \lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n+1)}$,得$a^{a^A} = Aa^A = \log_a A$.

又设$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n)} = B$,得$a^B = \log_a B$,所以$A, B \in \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$.

由引理1(1),4(1)知$x_{11}, x_{12}, x_{13} \in [A, B]$,又$x_{11} < x_{12} < x_{13}$,所以$A = x_{11}$,$B = x_{13}$.

(2) 只需证明$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n)} = \lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)} = x_2$,同上可证.

(3) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}$存在,所以$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)}$.只需证$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)} = x_{31}$.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(2n-1)} = A$,可得$a^A = \log_a A$.

由引理1(3)得$A = x_{31}$或$x_{32}(x_{31} < x_{32})$,又由引理4(2)知,$x_{31} \in [A, +\infty)$,所以$A = x_{31}$.

(4) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)} = A$,可得$a^A = A$,又由引理1(4)知$A = e$.

(5) 即引理5(3).

定理 2 在题 5 中,函数 $G(x)$ 的定义域是$[e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$,值域是$\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

证明 用定理 1 来证.

有 $x^{(n)} = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$($n$ 个 x),则 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ 是否有意义,取决于 $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$ 是否存在,且

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$$

(1) 当 $0 < x < e^{-e}$ 时,由定理 1(1) 知,$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$ 不存在,所以此时 $G(x)$ 无意义.

(2) 当 $e^{-e} \leqslant x < 1$ 时,$\frac{1}{e} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x_2 < 1$. 特别的,$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-e})^{(n)} = \frac{1}{e}$.

所以此时 $G(x)$ 有意义,且此时 $G(x)$ 的值就是关于 u 的方程$x^u = u$ 的根,由引理 1(2) 知 $G(x) = x_2$,且 $x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 1\right)$. 再由 x 在$(e^{-e}, 1)$范围内变化时,关于 u 的方程$x^u = u$ 的根$G(x)$是连续变化的,且 $x = e^{-e}$ 时 $G(x) = \frac{1}{e}$,当$x \to 1$ 时,$G(x) = u = x^u \to 1^u = 1$,所以此时得 $G(x)$ 的值域是$\left[\frac{1}{e}, 1\right)$.

(3) 当 $= 1$ 时,$x^{(n)} = 1$,$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = 1$,即 $G(1) = 1$.

(4) 当 $1 < x < e^{\frac{1}{e}}$ 时,$x < \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x_{31} < e$.

所以此时 $G(x)$ 有意义,且此时 $G(x)$ 的值就是关于 u 的方程$x^u = u$ 在(x, e)上的根,由引理 1(3) 知 $G(x) = x_{31}$. 且 $x_{31} \in (x, e)$. 再由 x 在$(1, e^{\frac{1}{e}})$范围内变化时,关于 u 的方程$x^u = u$ 的根$G(x)$是连续变化的,同理可得此时得 $G(x)$ 的值域是$(1, e)$.

(5) 当 $x = e^{\frac{1}{e}}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = e$,即 $G(e^{\frac{1}{e}}) = e$.

(6) 当 $x > e^{\frac{1}{e}}$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = +\infty$,所以此时 $G(x)$ 无意义.

从而可得定理 2 成立.

由定理 2 立知题 2 中的方程无解.

题 9 解关于 x 的方程

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = t\left(x > 0, \frac{1}{e} \leqslant t \leqslant e\right) \qquad ⑥$$

由定理 2 知,方程 ⑥ 的解存在,且满足 $x \in [e^{-e}, e^{\frac{1}{e}}]$. 可证方程 ⑥ 与方程

$$x^t = t\left(e^{-e} \leqslant x \leqslant e^{\frac{1}{e}}, \frac{1}{e} \leqslant t \leqslant e\right) \qquad ⑦$$

同解——由 ⑥ 可得 ⑦,由 ⑦ 也可得 ⑥,均是等量代换. 从而,得方程 ⑥ 的

解为 $x = t^{\frac{1}{t}}$.

读者还可解决专著[2]第533页提出的几个猜想(也是含无限步运算的函数的值域问题):

猜想1 设 $\theta \in \mathbf{R}$,定义 $f_1(\theta) = \cos\theta, f_{n+1}(\theta) = \cos(f_n(\theta))(n \in \mathbf{N}^*)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\theta) = 0.739\,085\,133\cdots$.

猜想2 设 $\theta \in \mathbf{R}$,定义 $g_1(\theta) = \sin\theta, g_{n+1}(\theta) = \sin(g_n(\theta))(n \in \mathbf{N}^*)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\theta) = 0$.

参考文献

[1] 姚雪,庄白,苏画画.一个数学问题的精彩[J].数学教学,2008(11):27-28.
[2] 甘志国.初等数学研究(I)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008:248-256.
[3] 李建武.关于方程 $a^x = \log_a x$ 解的范围[J].中学数学教学参考,2002(12):59.

对 2008 年高考江苏卷压轴题的深入研究

2008 年高考江苏卷的压轴题是：

请先阅读：在等式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1(x \in \mathbf{R})$ 的两边对 x 求导，得 $(\cos 2x)' = (2\cos^2 x - 1)'$. 由求导法则，得 $(-\sin 2x)\cdot 2 = 4\cos x\cdot(-\sin x)$，化简后得等式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

（Ⅰ）利用上题的想法（或其他方法），试由等式 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$（$x \in \mathbf{R}$，整数 $n \geqslant 2$），证明：$n[(1+x)^{n-1} - 1] = \sum\limits_{k=2}^{n} kC_n^k x^{k-1}$.

（Ⅱ）对于整数 $n \geqslant 3$，求证：

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k = 0$;

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 C_n^k = 0$;

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{1+k}C_n^k = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

下面运用导数法和积分法来给出类似于(i)，(ii)，(iii) 的一些组合恒等式.

1 导数法的运用

把恒等式 $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ 两边对 x 求导，得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1} \quad ①$$

把式 ① 乘以 x 后，求导得

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^{k-1} \quad ②$$

把式 ② 乘以 x 后，求导得

$$n(1+x)^{n-1} + 3n(n-1)x(1+x)^{n-2} + n(n-1)(n-2)x^2(1+x)^{n-3} = \sum_{k=0}^{n} k^3 C_n^k x^{k-1} \quad ③$$

把式 ③ 乘以 x 后，求导得

$n(1+x)^{n-1} + 7n(n-1)x(1+x)^{n-2} + 6n(n-1)(n-2)x^2(1+x)^{n-3} +$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^3(1+x)^{n-4} = \sum_{k=0}^{n} k^4 C_n^k x^{k-1} \quad ④$$

把式 ④ 乘以 x 后,求导得

$$n(1+x)^{n-1} + 15n(n-1)x(1+x)^{n-2} + 25n(n-1)(n-2)x^2(1+x)^{n-3} + 10n(n-1)(n-2)\cdot(n-3)x^3(1+x)^{n-4} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^4(1+x)^{n-5} = \sum_{k=0}^{n} k^5 C_n^k x^{k-1} \quad ⑤$$

由 ① ~ ⑤,我们可以猜测

$$\sum_{i=1}^{t} a_{i,t} A_n^i x^{i-1}(1+x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n} k^t C_n^k x^{k-1} (t \in \mathbf{N}^*, a_{1,t} = a_{t,t} = 1) \quad ⑥$$

下面用数学归纳法证明式 ⑥ 成立,其中 $a_{i,t}$ 由以下递推式确定

$$ia_{i,t} + a_{i-1,t} = a_{i,t+1} (a_{0,t} = 0, a_{i,i} = 1)(t = i, i+1, i+2, \cdots) \quad ⑦$$

当 $t = 1$ 时式 ⑥ 成立:即式 ①.

假设 t 时成立,下证 $t+1$ 时成立.

把式 ⑥ 乘以 x 后,求导得

$$\sum_{i=1}^{t} a_{i,t} A_n^i x^i (1+x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n} k^t C_n^k x^k$$

$$\sum_{i=1}^{t+1} (ia_{i,t} + a_{i-1,t}) A_n^i x^{i-1}(1+x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n} k^{t+1} C_n^k x^{k-1}$$

(这里约定 $a_{0,t} = a_{t+1,t} = 0$)

又由 ⑦,可得

$$\sum_{i=1}^{t+1} a_{i,t+1} A_n^i x^{i-1}(1+x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n} k^{t+1} C_n^k x^{k-1}$$

即 $t+1$ 时成立.

在 ⑦ 中令 $i = 1$,得

$$a_{1,t} = a_{1,t+1}$$

所以 $$a_{1,t} = a_{1,1} = 1 (t = 1,2,3,\cdots)$$

令 $i = 2$,得

$$2a_{2,t} + 1 = a_{2,t+1}, 2(a_{2,t} + 1) = a_{2,t+1} + 1$$

所以 $$a_{2,t} + 1 = a_{2,2}\cdot 2^{t-1}, a_{2,t} = 2^{t-1} - 1 (t = 2,3,4,\cdots)$$

令 $i = 3$,得

$$3a_{3,t} + 2^{t-1} - 1 = a_{3,t+1}$$

可求得 $$a_{3,t} = \frac{1}{2}(3^{t-1} + 1) - 2^{t-1} (t = 3,4,5,\cdots)$$

令 $i = t$,得

$$t + a_{t-1,t} = a_{t,t+1} (t = 2,3,4,\cdots)$$

可求得 $$a_{t-1,t} = \frac{1}{2}t(t-1) (t = 2,3,4,\cdots)$$

令 $i = t - 1$,得

$$\frac{1}{2}t(t-1)^2 + a_{t-2,t} = a_{t-1,t+1}(t = 3,4,5,\cdots)$$

可求得 $$a_{t-2,t} = \frac{1}{24}t(t-1)(t-2)(3t-5)(t = 3,4,5,\cdots)$$

在⑥中令 $x = -1, 1$,得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^t C_n^k = 0, \sum_{i=1}^{t} a_{i,t}A_n^i \cdot 2^{n-i} = \sum_{k=0}^{n} k^t C_n^k(\text{其中 } a_{i,t} \text{ 由⑨确定}) \quad ⑧$$

2 积分法的运用

把恒等式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ 两边对 x 在0到 t 上求积分,再把 t 换为 x 后,得

$$\frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}x^{k+1} \quad ⑨$$

把式⑨两边对 x 在0到 t 上求积分,再把 t 换为 x 后,得

$$\frac{(x+1)^{n+2}-(n+2)x-1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}x^{k+2} \quad ⑩$$

把式⑩两边对 x 在0到 t 上求积分,再把 t 换为 x 后,得

$$\frac{2(x+1)^{n+3}-(n+2)(n+3)x^2-2(n+3)x-2}{2(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)(k+3)}x^{k+3} \quad ⑪$$

在⑨⑩⑪中令 $x = 1, -1$,得

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}, \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \quad ⑫$$

$$\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}, \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{n+2} \quad ⑬$$

$$\frac{2^{n+4}-n^2-7n-14}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2(n+3)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

用这种方法还可以得到更多的组合恒等式.

例 计算:$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2}$.

解 由⑫⑬,得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} =$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}-\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$

本文写作的动议及思想方法都出自于《上海中学数学》2008 年第 12 期的文章《一道高考压轴题的背景研究及拓广》(作者:张夏强,邱云),但该文的一些结论有误,应修改为本文中的结论.比如,该文中的结论 $\sum\limits_{k=0}^{n}k^{t}C_n^k=n^k2^{n-1}$ 显然不对,因为 $\sum\limits_{k=0}^{n}k^{t}C_n^k$ 的值应随 t 的变化而变化,不会是与 t 无关的值 n^k2^{n-1},正确结论可参看式⑩;同理,该文中的结论 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k}{(k+1)(k+2)}t^{k+2}=\frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$ 也不对.

对一道高考题和一道研究生试题的再研究

题 1 (2008 年高考湖南卷理科压轴题) 已知函数 $f(x)=\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant e$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立(其中 e 是自然对数的底数),求 α 的最大值.

文献[1]猜想此题来源于 1999 年中国科学院和北京师范大学的研究生试题[2]:

题 2 求出使得不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$ 对所有正整数 n 都成立的最大数 α 及最小数 β.

本文将对题 1,2 作些研究,得到一些简洁的结论.

定义 本文中记 e 是自然对数的底数;$f(x)=\ln^2(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$,$g(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$,$p_\alpha(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$.

引理 1 (1) 函数 $f(x)$ 在 $(-1,0]$,$[0,+\infty)$ 上分别递增、递减;

(2) 当 $x>-1$ 时,$f(x)\leqslant 0$(且当且仅当 $x=0$ 时 $f(x)=0$).

证明 (1) 由题 1(1) 的结论立得[1].

(2) 由(1)立得.

引理 2 函数 $g(x)$ 在 $(-1,0)$,$(0,+\infty)$ 上均递减.

证明 $g'(x)=\frac{f(x)}{x^2\ln^2(1+x)}$,再由引理 1(2) 得 $g'(x)<0$ 恒成立,所以引理 2 成立.

定理 1 设 $M\subset\mathbf{R}^+$,$M\neq\varnothing$,M 的下确界是 a,若 $x\in M$ 时 $p_\alpha(x)\leqslant e$ 恒成立,则 α 的取值范围是 $\left(-\infty,g\left(\frac{1}{a}\right)\right]$(当 $a=0$ 时,约定 $g\left(\frac{1}{a}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$,在定理 2 中也有此约定).

证明 $p_\alpha(x)\leqslant e\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}\leqslant e\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\geqslant\alpha\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant\alpha$

再令$\frac{1}{x}=t$,又得 $p_\alpha(x)\leqslant e\Leftrightarrow g(t)\geqslant\alpha$.

由 $x\in M$,M的下确界是a,得t的取值范围的上确界是$\frac{1}{a}$(当 $a=0$时,应把"$\frac{1}{a}$"理解为"当 $a\to0^+$ 时,$\frac{1}{a}\to+\infty$").再由引理2,得 $g(t)$ 在$(0,+\infty)$上是减函数,所以有定理1成立.

定理2 设 $M\subset\mathbf{R}^+$,$M\neq\varnothing$,M的下确界是a,若 $x\in M$时$p_\alpha(x)<e$恒成立,则

(1) 当 $a\in M$时,α 的取值范围是$\left(-\infty,g\left(\frac{1}{a}\right)\right)$;

(2) 当 $a\notin M$时,α 的取值范围是$\left(-\infty,g\left(\frac{1}{a}\right)\right]$.

定理3 设 $N\subset(-\infty,-1)$,$N\neq\varnothing$,N的上确界是B,若 $x\in N$时,$p_\alpha(x)\leqslant e$恒成立,则 α 的取值范围是$\left[g\left(\frac{1}{B}\right),+\infty\right)$(当时 $b=-1$,约定$g\left(\frac{1}{b}\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}g(x)=1$,在定理4中也有此约定).

证明 $p_\alpha(x)\leqslant e\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}\leqslant e\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\leqslant\alpha\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant\alpha$

再令$\frac{1}{x}=t$,又得 $p_\alpha(x)\leqslant e\Leftrightarrow g(t)\leqslant\alpha$.

由 $x\in N$,N的上确界是B,得t的取值范围的下确界是$\frac{1}{B}$(当 $b=-1$时,$g\left(\frac{1}{b}\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}g(x)=1$).再由引理2,得 $g(t)$ 在$(-1,0)$上是减函数,所以有定理3成立.

定理4 设 $N\subset(-\infty,-1)$,$N\neq\varnothing$,N的上确界是B,若 $x\in N$时,$p_\alpha(x)<e$恒成立,则

(1) 当 $B\in N$时,α 的取值范围是$\left[g\left(\frac{1}{B}\right),+\infty\right)$;

(2) 当 $B\notin N$时,α 的取值范围是$\left[g\left(\frac{1}{B}\right),+\infty\right)$.

定理5 设 $M\subset\mathbf{R}^+$,$M\neq\varnothing$,M的上确界是A,若 $x\in M$时$p_\alpha(x)\geqslant e$恒成立,则 α 的取值范围是$\left[g\left(\frac{1}{A}\right),+\infty\right)$(当 $A\to+\infty$ 时,约定 $g\left(\frac{1}{A}\right)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=\frac{1}{2}$,在定理6中也有此约定).

证明 $p_\alpha(x)\geqslant e\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}\geqslant e\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\leqslant\alpha\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant\alpha$

再令$\frac{1}{x}=t$,又得 $p_\alpha(x)\geqslant e\Leftrightarrow g(t)\leqslant\alpha$.

由 $x\in M$,M的上确界是A,得t的取值范围的下确界是$\frac{1}{A}$(当$A\to+\infty$时,应把"$\frac{1}{A}$"理解为"当$A\to+\infty$时,$\frac{1}{A}\to 0$").再由引理2,得$g(t)$在$(0,+\infty)$上是减函数,所以有定理5成立.

(这里再用洛必达法则证明$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}+1}=\frac{1}{2}.)$$

定理6 设$M\subset\mathbf{R}^+$,$M\neq\varnothing$,M的上确界是A,若$x\in M$时$p_\alpha(x)>e$恒成立,则

(1) 当$A\in M$时,α的取值范围是$\left(g\left(\frac{1}{A}\right),+\infty\right)$;

(2) 当$A\notin M$时,α的取值范围是$\left[g\left(\frac{1}{A}\right),+\infty\right)$.

定理7 设$N\subset(-\infty,-1)$,$N\neq\varnothing$,N的下确界是b,若$x\in N$时,$p_\alpha(x)\geqslant e$恒成立,则α的取值范围是$\left(-\infty,g\left(\frac{1}{b}\right)\right]$(当$b\to-\infty$时,约定$g\left(\frac{1}{b}\right)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=\frac{1}{2}$,在定理8中也有此约定).

证明 $p_\alpha(x)\geqslant e\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}\geqslant e\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\geqslant\alpha\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant\alpha$

再令$\frac{1}{x}=t$,又得 $p_\alpha(x)\geqslant e\Leftrightarrow g(t)\geqslant\alpha$.

由 $x\in N$,N的下确界是b,得t的取值范围的上确界是$\frac{1}{b}$(当$b\to-\infty$时,约定$g\left(\frac{1}{b}\right)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=\frac{1}{2}$).再由引理2,得$g(t)$在$(-1,0)$上是减函数,所以有定理7成立.

定理8 设$N\subset(-\infty,-1)$,$N\neq\varnothing$,N的下确界是b,若$x\in N$时$p_\alpha(x)>e$恒成立,则

(1) 当 $b \in N$ 时,α 的取值范围是$\left(-\infty, g\left(\frac{1}{b}\right)\right)$;

(2) 当 $b \notin N$ 时,α 的取值范围是$\left(-\infty, g\left(\frac{1}{b}\right)\right]$.

由定理 1 立得题 1(2)、题 2 中 α 的答案均为$\frac{1}{\ln 2}-1$;由定理 5 立得题 2 中 β 的答案为$\frac{1}{2}$.

题 3 求出使得不等式$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} \leqslant e < \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+\beta}$对所有正数$x, y$都成立的最大数 α 及最小数β.

解 由定理 1,6 可分别求得满足题意的最大数 $\alpha=0$ 及最小数 $\beta=\frac{1}{2}$.

题 4 求出使得不等式$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+\alpha} \leqslant e^2 < \left(1+\frac{2}{y}\right)^{y+\beta}$对所有的 $x \in [-2,-1) \cup (1,2]$, $y \in (1,2]$ 都成立的最大数 α 及最小数β.

解 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+\alpha} \leqslant e^2$ 即$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{\alpha}{2}} \leqslant e$.

当 $x \in [-2,-1)$ 时$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{\alpha}{2}} \leqslant e$恒成立,由定理 3 可求得 $\alpha \geqslant 2$;当 $x \in (1,2]$ 时$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{\alpha}{2}} \leqslant e$恒成立,由定理 1 可求得 $\alpha \leqslant \frac{2}{\ln 2}-2$,所以 $2 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{\ln 2}-2$, $\alpha \in \varnothing$,得满足题意的最大数 α 不存在.

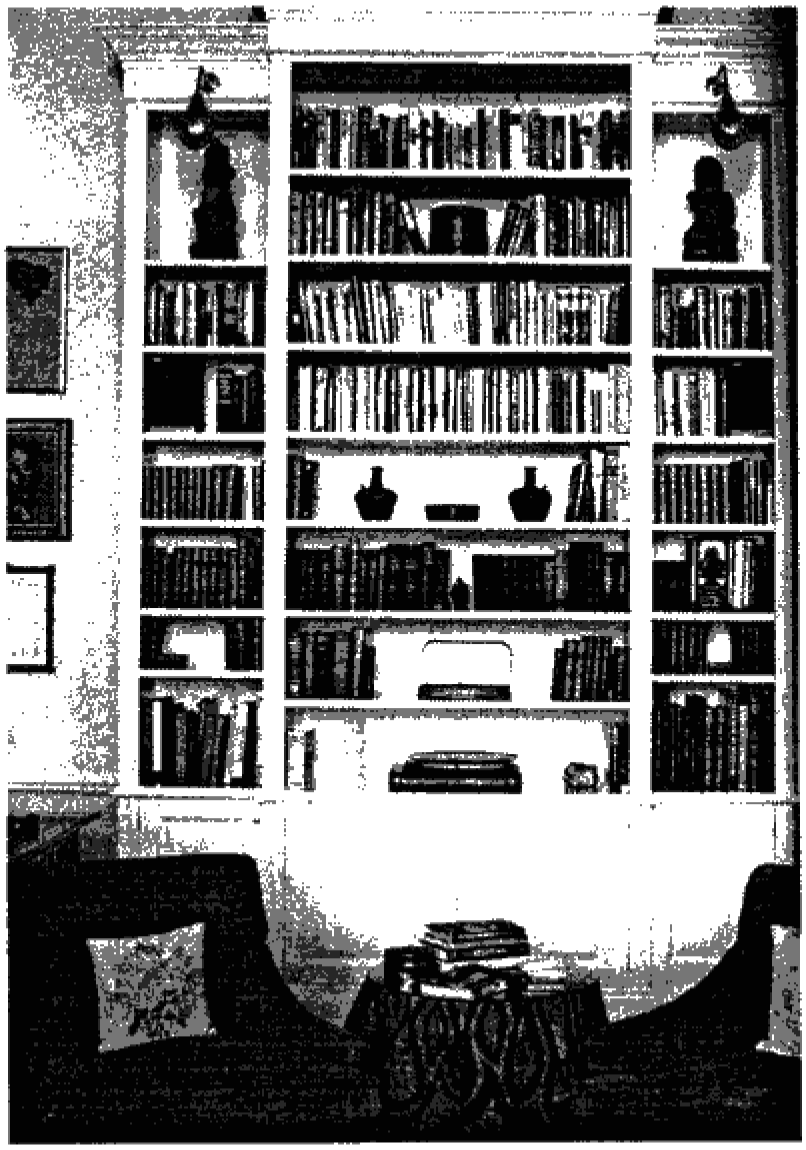
$e^2 < \left(1+\frac{2}{y}\right)^{y+\beta}$对所有的$y \in (1,2]$都成立,令 $y=2z$,得$\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+\frac{\beta}{2}} > e$对所有的 $z \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 都成立.

由定理 6(1) 得 $\beta > \frac{2}{\ln 2}-2$,所以满足题意的最小数 β 也不存在.

参考文献

[1] 厉倩.例谈引导高中学生寻找导数中新的鲜活点[J].中学数学(高中),2008(12):3-4.
[2] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].2 版.北京:高等教育出版社,2006.

数　　系



循环小数的一个猜想的证明

《中学生数学》2000 年第 8 期刊登了湖南肖乐农老师的文章《循环小数的一个猜想》,文末的猜想可用符号表述为(原猜想中的“q 是质数”可放宽):

猜想　若$(q,10)=1, q\geqslant 3, \frac{1}{q}=0.\overline{\dot{a}_1 a_2\cdots \dot{a}_n}$,则

(1)qa_n 的末位数字是 9;

(2) 设$\frac{qa_n+1}{10}=t(t\in \mathbf{N}^*), n\geqslant 2$,有(以下 $q_1,q_2,\cdots,q_{n-1}\in \mathbf{N}$):

$$\left.\begin{aligned} ta_n &= 10q_1+a_{n-1}\\ ta_{n-1}+q_1 &= 10q_2+a_{n-2}\\ ta_{n-2}+q_2 &= 10q_3+a_{n-3}\\ &\ \vdots\\ ta_2+q_{n-2} &= 10q_{n-1}+a_1\\ ta_1+q_{n-1} &= a_n \end{aligned}\right\} \qquad ①$$

读者还可对以下式子验证猜想:

$\frac{1}{9}=0.\dot{1}$(1 倍),$\frac{1}{21}=0.\dot{0}4761\dot{9}$(19 倍),$\frac{1}{27}=0.\dot{0}3\dot{7}$(19 倍),$\frac{1}{33}=0.\dot{0}\dot{3}$(10 倍),$\frac{1}{39}=0.\dot{0}2564\dot{1}$(4 倍).

由以下定理,立知猜想成立.

定理　设$(q,10)=1, q\geqslant 3$,则$\frac{1}{q}$ 可化为纯循环小数,设$\frac{1}{q}=0.\overline{\dot{a}_1 a_2\cdots \dot{a}_n}$,则

(1)qa_n 的末位数字是 9,即可设 $qa_n+1=10t(t\in \mathbf{N}^*)$;

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时,$\overline{a_1 a_2\cdots a_n}\cdot t=\overline{a_n a_1 a_2\cdots a_{n-1}}$($t$ 同(1)).

证明　(1) 由纯循环小数化成分数的方法知$\frac{1}{q}=0.\overline{\dot{a}_1 a_2\cdots \dot{a}_n}=\frac{\overline{a_1 a_2\cdots a_n}}{10^n-1}$,得 $q\cdot \overline{a_1 a_2\cdots a_n}=10^n-1$,所以结论(1) 成立.

(2) 由(1) 得 $10t-1=qa_n=\frac{a_n(10^n-1)}{\overline{a_1 a_2\cdots a_n}}$.

$$10t \cdot \overline{a_1 a_2 \cdots a_n} - (10 \cdot \overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} + a_n) = a_n \cdot 10^n - a_n$$

$$\overline{a_1 a_2 \cdots a_n} \cdot t = \overline{a_n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$$

设$(q,10)=1, q \geqslant 3$,则可证满足“qa_n 的末位数字是 9”的个位数 a_n 唯一存在(存在性:因为 $10b - qa_n = 1$ 总有正整数解(b, a_n),从而也有 $a_n \leqslant 9$ 的正整数解;唯一性:假设 $10 \mid qa_n + 1, 10 \mid qa'_n + 1, a_n, a'_n$ 均是个位数,则 $10 \mid q(a_n - a'_n)$,得 $10 \mid a_n - a'_n$,又有 $-8 \leqslant a_n - a'_n \leqslant 8$,所以 $a_n = a'_n$).

推论 设$(q,10)=1, q \geqslant 3, \frac{1}{q} = \overline{0.\dot{a}_1 a_2 \cdots \dot{a}_n}$,则

(1)$a_n \neq 0$;

(2)n 的最小值即$\frac{1}{q}$的循环节的最少位数也即满足 $q \mid 10^x - 1$ 的最小正整数 x(x 叫 10 关于 q 的方次数[1],有 $x \mid \varphi(q)$,$\varphi(q)$ 叫欧拉函数),就是满足等式组 ① 的最小 n 值.

推论(2) 给出了求 10 关于 q 的方次数的一种新方法.

化分数为小数的关键是化单位分数为纯循环小数.

例 化下列分数为小数:

(1) $\frac{8}{19}$;(2) $\frac{353}{350}$.

解 (1) $\frac{8}{19} = 8 \times \frac{1}{19} = 8 \times 0.\dot{0}52\,631\,578\,947\,368\,42\dot{1} =$

$$0.\dot{4}21\,052\,631\,578\,947\,36\dot{8}$$

(2) $\frac{353}{350} = \frac{706}{700} = 1 + 6 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{100} =$

$$1 + 6 \times 0.\dot{1}42\,85\dot{7} \times \frac{1}{100} = 1.00\dot{8}\,571\,4\dot{2}$$

参考文献

[1] 陈培德.费尔马小定理的一种推广及其应用[J].数学通报,2003(6).40-41.

纯循环小数的一个猜想的推广

文献[1]证明了文献[2]中关于纯循环小数的一个猜想是正确的,笔者最近又发现了该猜想还可推广.

定理1　若$(q,10)=1,q\geqslant 3$,则$\frac{1}{q}$可化为纯循环小数,且其循环节长度可为任意正整数 s 的倍数 $ms(m,s\in\mathbf{N}^*)$,即可设$\frac{1}{q}=\overline{0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_{ms}}$(又记$\overline{a_1a_2\cdots a_{ms}}=\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}$,其中$b_1=\overline{a_1a_2\cdots a_s},b_2=\overline{a_{s+1}a_{s+2}\cdots a_{2s}},\cdots,b_m=\overline{a_{(m-1)s+1}a_{(m-1)s+2}\cdots a_{ms}}$),还有以下结论成立:

(1)qb_m 的末 s 位数均是 9,即可设

$$qb_m+1=10^st\quad(t\in\mathbf{N}^*)$$

(2)$\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}\cdot t=\overline{b_m,b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}}$($t$ 同(1),$m=1$ 时 $t=1$),也可把此结论改述为(以下 $q_1,q_2,\cdots,q_{m-1}\in\mathbf{N}$)

$$t\cdot b_m=10^3q_1+b_{m-1}$$
$$t\cdot b_{m-1}+q_1=10^sq_2+b_{m-2}$$
$$t\cdot b_{m-2}+q_2=10^sq_3+b_{m-3}$$
$$\vdots$$
$$t\cdot b_2+q_{m-2}=10^sq_{m-1}+b_1$$
$$t\cdot b_1+q_{m-1}=b_m$$

证明　(1)由纯循环小数化成分数的方法,得

$$\frac{1}{q}=\frac{\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}}{10^{ms}-1},q\,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}=10^{ms}-1$$

所以结论(1)成立.

(2)由(1)得

$$10^st-1=qb_m=\frac{b_m(10^{ms}-1)}{\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}}$$
$$10^st\,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}-(10^s\,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}}+b_m)=b_m\cdot 10^{ms}-b_m$$
$$\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}\cdot t=\overline{b_m,b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}}$$

设$(q,10)=1,q\geqslant 3$,可证满足“$10^s\mid qb_m+1,b_m<10^s,b_m\in\mathbf{N}^*$”的 b_m

存在且唯一(存在性:因为 $10^s b - qb_m = 1$ 有正整数解(b, b_m),从而也有 $b_m < 10^s$ 的正整数解;唯一性:假设 $10^s \mid qb_m + 1, 10^s \mid qb'_m + 1, b_m, b'_m \in \mathbf{N}^*, b_m < 10^s, b'_m < 10^s$,得 $10^s \mid b_m - b'_m$,又有 $-10^s < b_m - b'_m < 10^s$,必有 $b_m = b'_m$),所以由定理 1 可得口算化单位分数为纯循环小数的方法(即猜想[2] 的方法,也可见后面的举例).

推论 1 若$(q,10) = 1, q \geqslant 3, \frac{1}{q} = 0.\overline{\dot{a}_1 a_2 \cdots \dot{a}_n}$,则

(1)qa_n 的末位数字是 9(所以 $a_n = 1,3,7$ 或 9),即可设 $qa_n + 1 = 10t(t \in \mathbf{N}^*)$

(2) $\overline{a_1 a_2 \cdots a_n} \cdot t = \overline{a_n a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$($t$ 同(1)),也可把此结论改述为(以下 $q_1, q_2, \cdots, q_{n-1} \in \mathbf{N}$)

$$\left.\begin{aligned} ta_n &= 10q_1 + a_{n-1} \\ ta_{n-1} + q_1 &= 10q_2 + a_{n-2} \\ ta_{n-2} + q_2 &= 10q_3 + a_{n-3} \\ &\vdots \\ ta_2 + q_{n-2} &= 10q_{n-1} + a_1 \\ ta_1 + q_{n-1} &= a_n \end{aligned}\right\} \quad ①$$

(3)n 的最小值即$\frac{1}{q}$ 的循环节的最少位数也即满足 $q \mid 10^x - 1$ 的最小正整数 x(x 叫 10 对模 q 的方次数[3]),就是满足 ① 的最小 n 值.

推论 1 的(1)(2) 即猜想[2],(3) 也给出了求 10 对模 q 的方次数的一种新方法.

例 1 用推论 1 的方法把$\frac{1}{57}$ 化成小数.

解 $\frac{1}{57} = 0.\dot{0}17\ 543\ 859\ 649\ 122\ 80\dot{7}$.(先确定循环节的末位数字是 7,按 40 倍从后向前算).

例 2 用定理 1 中 $s = 2$ 的情形把$\frac{1}{57}$ 化成小数.

解 先确定循环节的末两位数是 07,按 4 倍从后向前算可得例 1 的结果.

化分数为小数的关键就是化单位分数为纯循环小数,有了本文的口算方法,也可化任意分数为小数.

例 3 把$\frac{8}{57}$ 化为小数.

解 $\frac{8}{57} = 8 \times \frac{1}{57} = 0.\dot{1}40\ 350\ 877\ 192\ 982\ 45\dot{6}$.

可以验证$\frac{8}{19}$的循环节也适合推论 1(2)($t=2$),但不适合定理 1(2) 中 $s=2$ 的情形($t=4$),$\frac{6}{7}=0.\dot{8}5714\dot{2}$ 也不适合推论 1(2)($t=5$).但有

定理 2　在定理 1 的题设下,又设 $t=\frac{qb_m+1}{10^s}(t\in\mathbf{N}^*)$,$\frac{c}{q}=0.\dot{c}_1c_2\cdots\dot{c}_{ms}$(又记 $\overline{c_1c_2\cdots c_{ms}}=\overline{d_1,d_2,\cdots,d_m}$,其中 $d_1=\overline{c_1c_2\cdots c_s}$,$d_2=\overline{c_{s+1}c_{s+2}\cdots c_{2s}}$,$\cdots d_m=\overline{c_{(m-1)s+1}c_{(m-1)s+2}\cdots c_{ms}}$),则

$$\overline{d_1,d_2,\cdots,d_m}\cdot t+\frac{cb_m-d_m}{10^s}=\overline{cb_m,d_1,d_2,\cdots,d_{m-1}}$$

证明　由 $c\cdot\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}=\overline{d_1,d_2,\cdots,d_m}$(这并非显然,但易证出,例 3(2) 已用此结论),$\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}\cdot t=\overline{b_m,b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}}$,得

$$\begin{aligned}\overline{d_1,d_2,\cdots,d_m}\cdot t&=c\,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_m}\cdot t=c\,\overline{b_m,b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}}=\\&cb_m\cdot 10^{(m-1)s}+c\,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}}=\\&cb_m\cdot 10^{(m-1)s}+\frac{\overline{d_1,d_2,\cdots,d_m}-cb_m}{10^s}=\\&\overline{cb_m,d_1,d_2,\cdots,d_{m-1}}-\frac{cb_m-d_m}{10^s}\end{aligned}$$

推论 2　若$(q,10)=1$,$q\geqslant 3$,满足 $10\mid qa_n+1$ 的 a_n 是个位数(可证这样的 a_n 存在且唯一),又设$\frac{qa_n+1}{10}=t$,$\frac{c}{q}=0.\dot{c}_1c_2\cdots\dot{c}_n$,则$\overline{c_1c_2\cdots c_n}\cdot t+\frac{ca_n-c_n}{10}=\overline{ca_n,c_1c_2\cdots c_{n-1}}$.

在定理 2,推论 2 中令 $c=1$ 即得定理 1,推论 1 的相应结论,在定理 2 中当 $cb_m=d_m$(即 $cb_m<10^s$)时,在推论 2 中当 $ca_n=c_n$(即 $ca_n\leqslant 9$)时的结论均很简洁,由定理 2 推论 2 可得直接化$\frac{c}{q}$为纯循环小数的方法,仅以推论 2 叙之:

设$\frac{c}{q}=0.\dot{c}_1c_2\cdots\dot{c}_n$,则

(1) 先求出满足 $10\mid qa_n+1$ 的个位数 a_n,可设 $ca_n=10q_0+c_n$($q_0\in\mathbf{N}$)便求出了 c_n),$\frac{qa_n+1}{10}=t(t\in\mathbf{N}^*)$;

(2) 用以下式子可求 $c_{n-1},c_{n-2},\cdots,c_1$(以下 $q_1,q_2,\cdots,q_{n-1}\in\mathbf{N}$)

$$tc_n+q_0=10q_1+c_{n-1}$$

$$tc_{n-1}+q_1=10q_2+c_{n-2}$$

$$tc_{n-2}+q_2=10q_3+c_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$tc_2 + q_{n-2} = 10q_{n-1} + c_1$$

$$tc_1 + q_{n-1} = ca_n$$

还可把本文中的结论从 10 进制推广到 p 进制($p \in \mathbf{N}^*, p \geqslant 2$).

参考文献

[1] 甘志国.循环小数的一个猜想的证明[J].中学数学月刊,2004(1):26.

[2] 肖乐农.循环小数的一个猜想[J].中学生数学,2000(8):17-18.

[3] 现代工程数学手册编委会.现代工程数学手册(第 Ⅲ 卷)[M].武汉:华中师范学院出版社,1988.

关于循环小数的几个猜想的证明

大学生宋佳在文献[1]中发现了分数$\frac{b}{p}$(p是素数,$p \neq 2,5$)化成循环小数的三个规律(但未证明),实际上,这些规律对$p \in \mathbf{N}, p \geqslant 3, (p,10)=1$时均成立.

可将文献[2]18 ~ 21页的推论1,2综述为

定理1　若$a,b \in \mathbf{N}^*, a \geqslant 3, (a,10)=(a,b)=1$,则$\frac{b}{a}$可化为纯循环小数,且$\frac{b}{a}$的最小循环节位数$d$是满足$a \mid 10^{\alpha}-1$的最小正整数$\alpha$(所以$d$与$b$无关),且$d \mid \varphi(a)$($\varphi(a)$是Euler函数,表示$1,2,\cdots,a$中与$a$互素的数的个数,设$a$的标准分解式为$\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$($p_i$是两两不同的素数,$\alpha_i \in \mathbf{N}^*$),则$\varphi(a)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$,当$p$是素数时,$\varphi(p)=p-1$[3].

由定理1即知文献[1]的规律1,2成立.

定理2　设$a \in \mathbf{N}^*, a \geqslant 3, (a,10)=1, \frac{1}{a}=\overline{0.\dot{a}_1 a_2 \cdots \dot{a}_k}$(不一定只写出一个循环节),$\overline{0.\dot{a}_{i+1} a_{i+2} \cdots a_k a_1 a_2 \cdots \dot{a}_i}=\frac{b}{a}$ $(i=1,2,\cdots,k)$,则$b=10^i - a \cdot \overline{a_1 a_2 \cdots a_i}$, $b \in \mathbf{N}^*, b < a$.

证明

$$\frac{1}{a}=\frac{\overline{a_1 a_2 \cdots a_i} \cdot 10^{k-i}+\overline{a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_k}}{10^k-1}$$

$$a \cdot \overline{a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_k}=10^k-1-a \cdot \overline{a_1 a_2 \cdots a_i} \cdot 10^{k-i}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{a \cdot \overline{a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_k} \cdot 10^i + a \cdot \overline{a_1 a_2 \cdots a_i}}{10^k-1} = \\ &\quad \frac{(10^k-1)10^i+(1-10^k)a \cdot \overline{a_1 a_2 \cdots a_i}}{10^k-1} = \\ &\quad 10^i-\overline{a_1 a_2 \cdots a_i} \end{aligned}$$

由

$$\frac{1}{a}=\frac{\overline{a_1 a_2 \cdots a_k}}{10^k-1}>\frac{\overline{a_1 a_2 \cdots a_i} \cdot 10^{k-i}}{10^k}=\frac{\overline{a_1 a_2 \cdots a_i}}{10^i}$$

得 $10^i > a \cdot \overline{a_1a_2\cdots a_i}$,即 $b \in \mathbf{N}^*$.

又
$$0.\overline{\dot{a}_{i+1}a_{i+2}\cdots a_k a_1 a_2\cdots \dot{a}_i} = \frac{b}{a} \leqslant 1$$

即 $b \leqslant a$,当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 9$ 时 $b = a$,此时$\frac{1}{a} = 0.\overline{\dot{a}_1a_2\cdots \dot{a}_k} = 0.\dot{9} = 1$, $a = 1$,这与 $a \geqslant 3$ 矛盾!所以 $b < a$.

由定理 2 立知文献[1] 中的规律 3 成立.

推论 若素数 $p \geqslant 7$,满足 $p \mid 10^a - 1$ 的最小正整数 $a = p - 1$(此时说 10 是 p 的一个原根), 可设 $\frac{1}{p} = 0.\overline{\dot{a}_1a_2\cdots \dot{a}_{p-1}}$, 则 $\frac{j}{p} = 0.\overline{\dot{a}_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{p-1}a_1a_2\cdots \dot{a}_i}$($j = 1,2,\cdots,p-1$),且 i 由$j = 10^i - p \cdot \overline{a_1a_2\cdots a_i}$ 唯一确定,当 i 取遍 $1,2,\cdots,p-1$ 时,j 也取遍 $1,2,\cdots,p-1$.

证明 由定理 2 知,$j = 1,2,\cdots,p-1$ 时
$$\frac{j}{p} = 0.\overline{\dot{a}_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{p-1}a_1a_2\cdots \dot{a}_i}\quad(j = 10^i - p \cdot \overline{a_1a_2\cdots a_i})$$
又"$\overline{a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_{p-1}a_1a_2\cdots a_i}$"有且仅有 $i = 1,2,\cdots,p-1$ 的 $p-1$ 种形式,且 j 不同时,$\frac{j}{p}$ 化成循环小数的结果也不同,所以由定理 2 知推论成立.

推论也是通俗数学名著[4] 中叙述而未证明的结论. 读者还可参看笔者在文献[5] 中证明的循环小数的一条奇妙性质.

参考文献

[1] 宋佳.关于循环小数的几个猜想[J].中学数学教学参考,2004(12):57.
[2] 张远达.循环小数[M].武汉:湖北教育出版社,1984.
[3] 魏万迪.整数入门[M].成都:四川教育出版社,1988.
[4] 阿尔伯特·H·贝勒.数论妙趣——数学女王的盛情款待[M].谈祥柏,译.上海:上海教育出版社,1998.
[5] 甘志国.循环小数的一个猜想的证明[J].中学数学月刊,2004(1):26.

一个奇妙的分数

“数学园丁”马丁·加德纳在《不可思议的矩阵博士》(谈祥柏译,1990年上海科普出版社)一书中给出了这样一个例子

$$\frac{987\,654\,321}{123\,456\,789}=\overbrace{8}^{1}.\underbrace{0000000}_{7}\overbrace{729}^{3}\underbrace{00000}_{5}\overbrace{66339}^{5}\underbrace{000}_{3}\overbrace{6036849}^{7}\underbrace{0}_{1}5493\cdots$$

它的左边是 1 ~ 9 这九个数码倒序与正序组成的两个九位数之比,右边的结果令人惊讶不已:它的非零数字的连续位数分别为 1,3,5,7 个,而零的连续位数分别为 7,5,3,1 个.

我们运用无穷递缩等比数列各项和的公式 $S=\frac{a_1}{1-q}$(a_1,q 分别表示等比数列 $\{a_n\}$ 的首项及公比)可以证明以上的规律.

注意到 $729=9^3$,$66\,339=9^3\times91$,$6\,036\,849=9^3\times91^2$,所以即证

$$\frac{987\,654\,321}{123\,456\,789}=8+\frac{9^3}{10^{10}}+\frac{9^3\times91}{10^{20}}+\frac{9^3\times91^2}{10^{30}}+\cdots+\frac{9^3\times91^{n-1}}{10^{10n}}+\cdots=$$

$$8+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^3\times91^{n-1}}{10^{10n}}=8+\frac{9^3}{91}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{91}{10^{10}}\right)^n$$

又注意到

$$\frac{987\,654\,321}{123\,456\,789}=8+\frac{9}{123\,456\,789}=8+\frac{9^3}{10^{10}-91}$$

所以只需证 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{91}{10^{10}}\right)^n=\frac{91}{10^{10}-91}$,而这由公式“$S=\frac{a_1}{1-q}$”极易获证.

复数不能比大小

为什么不能给两个复数比大小呢?一位高中学生表示不服,他认为,要比较两个复数的大小,可以先把实数部分比较一下,谁的实部大谁就大;若实部部分相等,就比较虚数部分,虚部大的就大,如 $3+6i<5+4i$,$7+8i>7+5i$.

他所采取的办法,实际上是"辞典式排列法",听起来好像挺有道理,但到底对不对呢?

他的办法会出现一些问题,这些问题都涉及"比较大小"的本质意义.因为一列数若能比较大小必须满足以下四项基本要求:

(1) 对任意两个数 a,b 来说,$a<b$,$a=b$,$a>b$ 三者必居其一;

(2) 若 $a<b$,$b<c$,则 $a<c$;

(3) 若 $a<b$,则对于任意的 c 都有 $a+c<b+c$;

(4) 若 $a<b$,则对于任意的正数 c 都有 $ac<bc$.

因为全体实数满足上述四项基本要求,所以任意两个实数可以比较大小.

让我们来看看复数能否满足以上四条.

因为虚数单位 $i\neq 0$,所以 $0<i$ 或者 $0>i$,两者必居其一.

若 $0<i$,由 4) 得 $0\cdot i<i\cdot i$,得 $0<-1$,这不对.

若 $0>i$,由 3) 得 $0+(-i)>i+(-i)$,即 $-i>0$,所以可在"$0>i$"的两边都乘以正数 $-i$,得,$0(-i)>i\cdot(-i)$,即 $0>1$,这也不对!

说明无论怎样规定复数的比较大小法则,都不能实现比较复数的大小(指全体复数之间不能给出一个大小关系,当然实数之间可以比较大小).

国家公务员考试中的数字计算趣题

笔者近日翻阅了新编公务员录用考试全国统编教材《行政职业能力测验》(周盈主编,2007年6月中国铁道出版社)一书,其中第78～98页讲述的都是数字计算的题.国家对公务员在计算方面都有较高要求,我们学生更是要把数字计算的规律掌握好,绝不能依赖于计算器.下面列举的这些考题初看都很简单(很多题小学生都会),而这正是这些题的趣味性所在.

1 首尾数估算法

例1 425 + 683 + 544 + 828 的值是(　　).

A.2 488　　B.2 486　　C.2 484　　D.2 480

解 考查末位数字即知选 D.

例2 158.93 + 75.62 - 11.475 的值是(　　).

A.203.075　　B.213.075　　C.222.075　　D.223.075

解 考查整数部分即知选 D.

例3 $173^3 - 162^3 =$ (　　).

A.926 183　　B.936 185　　C.926 187　　D.926 189

解 考查末位数字即知选 D.

2 用周期性

例4 $1\,999^{1\,998}$ 的末位数字是(　　).

A.1　　B.3　　C.7　　D.9

解 $1\,999^{1\,998}$ 的末位数字就是 $9^{1\,998}$ 的末位数字,又可以试验出 9^n(n 是正整数)的末位数字以4为周期性的出现,所以 $9^{1\,998} = 9^{4\times 499+2}$ 的末位数字即 9^2 的末位数字 1,选 A.

3 用乘法公式

例5 $25^2 + 1 - 23^2$ 的值是(　　).

A.96　　B.97　　C.98　　D.99

解 $25^2 + 1 - 23^2 = 25^2 - 23^2 + 1 = (25 + 23)(25 - 23) + 1 = 97$,选 B.

例 6　999 999 × 777 778 + 333 333 × 666 666 的值是(　　).

A. 99 999 000 000　　B. 999 999 000 008

C. 999 999 000 007　　D. 9 999 990 000 000

解　原式 = 999 999 × 777 778 + 999 999 × 222 222 =

999 999 × (777 778 + 222 222) =

999 999 000 000

所以选 A.

4　用字母代数字法

例 7　2 002 × 20 032 003 - 2 003 × 20 022 002 的值是(　　).

A. -60　　B. 0　　C. 60　　D. 80

解　设 $a = 2002, b = 2003$，得

$$原式 = a(b \cdot 10^4 + b) - b(a \cdot 10^4 + a) = 0$$

所以选 B.

5　比较大小

例 6　在 $\frac{4}{9}, \frac{17}{35}, \frac{101}{203}, \frac{3}{7}, \frac{151}{301}$ 中最大的一个是(　　).

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{17}{35}$　　C. $\frac{101}{203}$　　D. $\frac{151}{301}$

解　让它们均与 $\frac{1}{2}$ 相比较，即知选 D.

例 7　已知甲的 12% 为 13，乙的 13% 为 14，丙的 14% 为 15，丁的 15% 为 16，则甲，乙，丙，丁四个数中最大的是(　　).

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

解　实际上是比较 $\frac{13}{12}, \frac{14}{13}, \frac{15}{14}, \frac{16}{15}$ 的大小，又让它们与 1 相比较，立知选 A.

6　求比值，倍数

例 8　一个三位数除以 9 余 7，除以 5 余 2，除以 4 余 3，这样的三位数共有(　　)个.

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解　由除以“5 余 2”知该数的尾数为 2 或 7，由“除以 4 余 3”知该数的尾数为 7. 由题意又知该数减去 7 后是 9，5，4 的公倍数，即 180，360，540，720，900. 所以该数为 187，367，547，727 或 907，共 5 个，选 A.

7　比例分配

例9　有一根1 m长的绳子,每次都剪掉绳子的$\frac{2}{3}$,那么剪掉3次之后还剩(　　)m.

A.$\frac{8}{27}$　　B.$\frac{1}{9}$　　C.$\frac{1}{27}$　　D.$\frac{8}{81}$

解　选C.

8　行程问题

例10　某市出租汽车的车费计算方式如下:路程在3 km以内(含3 km)为8.00元;达到3 km后,每增加1 km收1.40元;达到8 km后,每增加1 km收2.10元.增加不足1 km按四舍五入计算.某乘客乘坐该种出租车交了44.4元车费,则此乘客乘该出租车行驶的路程为(　　)km.(只需从以下答案中选择一个正确的即可 —— 笔者注)

A.22　　B.24　　C.26　　D.28

解　代入验证知选A.

例11　两列对开的列车相遇,第一列车的速度为10 m/s,第二列车的速度为12.5 m/s,第二列车上的旅客发现第二列车在旁边开过时共用了6 s,则第一列车的长度为(　　)m.

A.60　　B.75　　C.80　　D.135

解　第一列车相对于第二列车的速度为(10 + 12.5)m/s,所以第一列车的长度为(10 + 12.5) × 6 = 135 m,选D.

9　工程问题

例12　一个游泳池,开甲管放满水需6 h,同时开甲,乙两管放满水需4 h,如果只用乙管放水,则放满需(　　)h.

A.8　　B.10　　C.12　　D.14

解　$1 \div (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) = 12$,选C.

10　栽树问题

例13　为了把2008年北京奥运办成绿色奥运,全国各地都在加强环保,植树造林.某单位计划在通往两个比赛场馆的两条路(不相交)的两旁栽上树,现运回一批树苗,已知一条路的长度是另一条路长度的2倍还多6 000 m.若每隔4 m栽一棵,则少2 754棵;若每隔5 m栽一棵,则多396棵.则共有树苗(　　)

棵.

A.8 500　　B.12 500　　C.12 596　　D.13 000

解　设两条路共长 x m,共有树苗 y 棵.在两条路的两旁栽树,则有四条线要栽树,得

$$\begin{cases}2x \div 4 + 4 = y + 2\,754 \\ 2x \div 5 + 4 = y - 396\end{cases}$$

可解得 $y = 13\,000$,选 D.

11　跳井问题

例 14　有一只青蛙在井底,每天爬上 4 m,又滑下 3 m,这口井有 9 m深,那么它爬上这口井共需(　　)天.

A.2　　B.6　　C.4　　D.7

解　选 B.

12　日历计算

例 15　已知昨天是星期一,那么过 200 天是星期(　　).

A.一　　B.二　　C.六　　D.四

解　$201 = 7 \times 28 + 5$,所以选 C.

13　方阵问题

例 16　一些学生排成一个方阵,最外层的人数是 60 人,则这个方阵共有(　　)人.

A.256　　B.250　　C.225　　D.196

解　$(60 \div 4 + 1)^2 = 256$,选 A.

14　年龄问题

例 17　甲对乙说:“当我的岁数是你现在的岁数时,你才 4 岁.”乙对甲说:“当我的岁数是你现在的岁数时,你将有 67 岁.”则甲、乙现在的岁数分别是(　　).

A.45,26　　B.46,25　　C.47,24　　D.48,23

解　代入验证最简便,选 B.

15　利润问题

例 18　一件商品若以八折出售可获得进价 20% 的毛利,若以原价出售可

获得进价(　　)% 的毛利.

A.20　　B.30　　C.40　　D.50

解　选 D.

16　排列组合

例 19　林辉在自助餐店就餐,他准备挑选三种肉类中的一种肉类,四种蔬菜中的两种不同蔬菜,以及四种点心中的一种点心.若不考虑食物的挑选次序,则他可以有(　　)种不同的选择方法.

A.4　　B.24　　C.72　　D.144

解　$C_3^1 \times C_4^2 \times C_4^1 = 3 \times 6 \times 4 = 72$,选 C.

例 20　如果 4 个矿泉水空瓶可以换一瓶矿泉水(当然也包括这个矿泉水瓶),现有 15 个矿泉水空瓶,则不交钱最多可以喝矿泉水(　　)瓶.

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

解　实质上是 3 个空瓶喝一瓶水,所以选 C(可先借 1 个空瓶).

17　集合

例 21　现有 50 名学生都做物理,化学实验,如果物理实验做正确的有 40 人,化学实验做正确的有 31 人,两种试验都做错的有 4 人,则两种试验都做对的有(　　)人.

A.27　　B.25　　C.19　　D.10

解　$40 + 31 + 4 - 50 = 25$,选 B.

分数与小数的互化及纯循环小数的性质

1 分数与小数的互化

分数$\frac{q}{p}$($p\in\mathbf{N}^*$, $p>1$, $q\in\mathbf{Z}$, $(p,q)=1$)都可以化成有限小数或无限循环小数.

当 $p=2^\alpha5^\beta$($\alpha,\beta\in\mathbf{N}$,且 α,β 不同时为 0),上述$\frac{q}{p}$能化成有限小数.设 $p\mid10^n$(若 $n\in\mathbf{N}^*$, n 最小,则 $n=\max\{\alpha,\beta\}$),则$\frac{q}{p}$化成有限小数的位数为 n.

当$(p,10)=1$时,上述$\frac{q}{p}$能化成纯循环小数,此时由 Euler定理(见文献[1]第 171 页)知,存在最小的正整数 n,使 $p\mid10^n-1$(则 $n\mid\varphi(p)$, $\varphi(p)$ 是 Euler 函数,意义及求法见文献[1]第 169 ~ 171 页),则$\frac{q}{p}$的循环节长度(指$\frac{q}{p}$化成纯循环小数或混循环小数的第一个循环节的数字个数)为 n.

当 $p=2^\alpha5^\beta p_0$($\alpha,\beta\in\mathbf{N}$,且 α,β 不同时为 0)时,上述$\frac{q}{p}$只能化成混循环小数,设 $2^\alpha5^\beta\mid10^n$(若 n 是最小的正整数,则 $n=\max\{\alpha,\beta\}$),$p_0\mid10^m-1$(若 m 是最小的正整数,则 $m\mid\varphi(p_0)$),则$\frac{q}{p}$化成混循环小数的不循环数字个数为 n,循环节长度为 m.

整数及有限小数都可以化成循环节是 0 或 9 的循环小数,如 $3=3.\dot{0}=2.\dot{9}$, $\frac{1}{2}=0.5\dot{0}=0.4\dot{9}$.

有限小数与循环小数都可化成分数或整数,化法是(这里只给出纯小数的情形)

$$\overline{0.a_1\cdots a_n}=\frac{\overline{a_1\cdots a_n}}{10^n}$$

$$\overline{0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_n}=\frac{\overline{a_1\cdots a_n}}{\underbrace{9\cdots9}_{n个9}}$$

$$\overline{0.\dot{a}_1\cdots a_m b_1\cdots \dot{b}_n} = \frac{\overline{a_1\cdots a_m b_1\cdots b_n} - \overline{a_1\cdots a_m}}{\underbrace{9\cdots9}_{n个9}\underbrace{0\cdots0}_{m个0}}$$

(以上叙述参见文献[1]第210页定理5.4.1及文献[2])

2　纯循环小数的几条性质

笔者发现了纯循环小数的几条有趣性质.

定理1　设$\overline{0.\dot{a}_1\cdots \dot{a}_n} = \frac{1}{b}(b\in \mathbf{Q}^+)$,则$\overline{a_1\cdots a_n}\cdot(b+1) = \overline{1a_1\cdots a_n} - 1$.

(如由$0.\dot{1}42\ 85\dot{7}) = \frac{1}{7}$,得$142\ 857\times 8 = 1\ 142\ 856$;由$0.\dot{0}8\dot{1} = \frac{3}{37}$,得$81(\frac{37}{3}+1) = 1\ 080$.)

证明　有$\overline{0.\dot{a}_1\cdots \dot{a}_n} = \frac{\overline{a_1\cdots a_n}}{\underbrace{9\cdots9}_{n个9}} = \frac{1}{b}$,所以

$$\overline{a_1\cdots a_n}\cdot b = \underbrace{9\cdots9}_{n个9} = 10^n - 1 \quad ①$$

$$\overline{a_1\cdots a_n}\cdot(b+1) = 10^n - 1 + \overline{a_1\cdots a_n} = \overline{1a_1\cdots a_n} - 1$$

定理2　设$\overline{0.\dot{a}_1\cdots \dot{a}_n} = \frac{1}{b}(b\in \mathbf{Q}^+)$,则

(1) $\overline{a_{i+1}\cdots a_n a_1\cdots a_i} = (10^i - b\cdot\overline{a_1\cdots a_i})\,\overline{a_1\cdots a_n}(i = 1,\cdots,n)$;

(2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{a_{i+1}\cdots a_n a_1\cdots a_i}}{\overline{a_1\cdots a_n}} = b(\frac{1}{9}\cdot\overline{a_1\cdots a_n} - \sum_{i=1}^{n-1}\overline{a_1\cdots a_i})$.

证明　可得①在这里也成立.

(1)
$$\overline{a_{i+1}\cdots a_n a_1\cdots a_i} = \overline{a_{i+1}\cdots a_n}\cdot 10^i + \overline{a_1\cdots a_i}$$

$$\overline{a_1\cdots a_n} = \overline{a_1\cdots a_i}\cdot 10^{n-i} + \overline{a_{i+1}\cdots a_n}$$

所以
$$\overline{a_{i+1}\cdots a_n a_1\cdots a_i} - 10^i\,\overline{a_1\cdots a_n} = -(10^n - 1)\,\overline{a_1\cdots a_i}$$

用①,得

$$\overline{a_{i+1}\cdots a_n a_1\cdots a_i} = 10^i\,\overline{a_1\cdots a_n} - \overline{a_1\cdots a_n}\cdot b\cdot\overline{a_1\cdots a_i} = (10^i - b\cdot\overline{a_1\cdots a_i})\,\overline{a_1\cdots a_n}$$

(2) 由(1),得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{a_{i+1}\cdots a_n a_1\cdots a_i}}{\overline{a_1\cdots a_n}} = \sum_{i=1}^{n}(10^i - b\cdot\overline{a_1\cdots a_i}) =$$

$$\frac{10}{9}(10^n - 1) - b\sum_{i=1}^{n}\overline{a_1\cdots a_i} =$$

$$\frac{10}{9}b\cdot\overline{a_1\cdots a_n} - b\cdot\overline{a_1\cdots a_n} - b\sum_{i=1}^{n-1}\overline{a_1\cdots a_i}(\text{用①}) =$$

$$b(\frac{1}{9}\cdot\overline{a_1\cdots a_n}-\sum_{i=1}^{n-1}\overline{a_1\cdots a_i})$$

定理 3 设$0.\overline{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_n}=\frac{1}{b}$,$b\in\mathbf{N}^*$,$3\nmid b$,则$9\mid\overline{a_1\cdots a_n}$.

证明 用①可证.

定理 4 设$0.\overline{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_n}=\frac{1}{b}$,$b\in\mathbf{N}^*$,则

(1) $\overline{a_1\cdots a_n}\mid\overline{a_{i+1}\cdots a_na_1\cdots a_i}(i=1,\cdots,n)$;

(2) 当$3\nmid b$时,$b\cdot\overline{a_1\cdots a_n}\mid\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{a_{i+1}\cdots a_na_1\cdots a_i}$.

证明 (1) 由定理2(1)可证.

(2) 由定理2(2)和定理3可证.

定理 5 若$p\mid 10^n+1$,$n\in\mathbf{N}^*$,$\frac{r}{p}<1$,$\frac{r}{p}$的第一个循环节是$a_1\cdots a_{2n}$,则

(1) $a_i+a_{n+i}=9(i=1,\cdots,n)$;

(2) $\frac{p}{r}(\overline{a_1\cdots a_n}+1)=10^n+1$;

(3) $\overline{a_1\cdots a_{2n}}\cdot(\frac{p}{r}-1)=\overline{a_{n+1}\cdots a_{2n}a_1\cdots a_n}$.

证明 (1) 由竖式加法,可证得

$$\overline{b_1\cdots b_n(9-b_1)\cdots(9-b_n)}+(\overline{b_1\cdots b_n}+1)=(\overline{b_1\cdots b_n}+1)\cdot 10^n$$

$$\overline{b_1\cdots b_n(9-b_1)\cdots(9-b_n)}=(\overline{b_1\cdots b_n}+1)(10^n-1) \quad ②$$

由$p\mid 10^n+1$,可设$\frac{r}{p}=\frac{a}{10^n+1}(a\in\mathbf{N}^*)$.

由$\frac{r}{p}<1$,得$a\leqslant 10^n$,可设$a=\overline{b_1\cdots b_n}+1(b_i=0,1,\cdots,9;i=1,\cdots,n)$,得

$$\frac{\overline{a_1\cdots a_{2n}}}{10^{2n}-1}=\frac{r}{p}=\frac{\overline{b_1\cdots b_n}+1}{10^n+1}=\frac{\overline{b_1\cdots b_n(9-b_1)\cdots(9-b_n)}}{10^{2n}-1}(\text{用②}) \quad ③$$

$$\overline{a_1\cdots a_{2n}}=\overline{b_1\cdots b_n(9-b_1)\cdots(9-b_n)}$$

$$a_i=b_i(i=1,\cdots,n),a_{n+i}=9-b_i(i=1,\cdots,n)$$

$a_i+a_{n+i}=9(i=1,\cdots,n)$,即结论(1)成立.

(2) 由$a_i=b_i(i=1,\cdots,n)$及③,可得

$$\frac{r}{p}=\frac{\overline{a_1\cdots a_n}+1}{10^n+1},\frac{p}{r}(\overline{a_1\cdots a_n}+1)=10^n+1$$

(3) 由$\frac{r}{p}=0.\overline{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2n}}=\frac{\overline{a_1\cdots a_{2n}}}{10^{2n}-1}$,得

$$\overline{a_1\cdots a_{2n}}\cdot\frac{p}{r}=\underbrace{9\cdots9}_{2n个9}$$

$$\overline{a_1\cdots a_{2n}}\cdot(\frac{p}{r}-1)=\underbrace{9\cdots9}_{2n个9}-\overline{a_1\cdots a_{2n}}=\overline{a_{n+1}\cdots a_{2n}a_1\cdots a_n}(用(1))$$

定理 5　(1) 即文献[3] 的推论 2,而文献[3] 对此结论的证明含混不清.

定理 6　若条件同定理 5,则

(1) $\overline{a_1\cdots a_{2n}}$ 的各位数字之和是 $9n$;

(2) 若 p 是 m 位数(首位数字不为0),则 $a_i=0,a_{n+i}=9(i=1,\cdots,m-1)$.

证明　(1) 由定理 5(1) 可得.

(2) 由小数除法法则,得 $a_i=0(i=1,\cdots,m-1)$,又由定理 5(1),得 $a_{n+i}=9(i=1,\cdots,m-1)$.

定理 7　若 $p\mid 10^n+1,n\in\mathbf{N}^*$,$\frac{1}{p}$ 的第一个循环节是 $\overline{a_1\cdots a_{2n}}$,$p$ 的个位数字是 k,则

(1) $k=1,3,7$ 或 9;

(2) 当 $k=1,3,7,9$ 时,a_{2n} 分别是 9,3,7,1.

证明　(1) 由 $p\mid 10^n+1$,p 的个位数字是 k,得 $k=1,3,7$ 或 9.

(2) 由定理 5(3),得

$$\overline{a_1\cdots a_{2n}}\cdot(p-1)=\overline{a_{n+1}\cdots a_{2n}a_1\cdots a_n}$$

$(p-1)a_{2n}$ 的个位数字是 $a_n=9-a_{2n}$,又因为 p 的个位数字是 k,所以 $10\mid(k-1)a_{2n}-(9-a_{2n})(a_{2n}=0,1,\cdots,9)$,从而可以验证结论(2) 成立.

定理 8　若 $p\mid\frac{10^{mk}-1}{10^k-1},m\geqslant2,m,k\in\mathbf{N}^*,\frac{r}{p}=0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{mk}$(只写出第一个循环节),记 $A_i=\overline{a_{(i-1)k+1}\cdots a_{ik}}(i=1,\cdots,m)$,则 $\sum_{i=1}^{m}A_i=h(10^k-1),h=1,\cdots,$ 或 $m-1$.

证明　有 $\frac{r}{p}=\frac{\overline{a_1\cdots a_{mk}}}{10^{mk}-1}=\frac{\sum_{i=1}^{m}A_i\cdot10^{(m-i)k}}{10^{mk}-1}$,所以

$$\frac{r}{p}\cdot\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}=\sum_{i=1}^{m-1}A_i\cdot\frac{10^{(m-i)k}-1}{10^k-1}+\frac{\sum_{i=1}^{m}A_i}{10^k-1}\qquad④$$

因为 $p\mid\frac{10^{mk}-1}{10^k-1}$,所以式④左边是正整数,得 $\frac{\sum_{i=1}^{m}A_i}{10^k-1}=h$ 是正整数,即

$\sum_{i=1}^{m} A_i = h(10^k - 1), h \in \mathbf{N}^*$.

由 $0 \leqslant A_i \leqslant 10^k - 1$,得 $0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} A_i \leqslant m(10^k - 1)$,但 A_i 不全等于 0,也不全等于 $10^k - 1$(因为 $a_1 \cdots a_{mk}$ 是第一个循环节),所以 $0 < \sum_{i=1}^{m} A_i < m(10^k - 1)$,从而有 $h = 1, \cdots, m - 1$.

注 (1) 还可由 ④ 证得

$$\frac{r}{p} = \frac{\sum_{i=0}^{m-2}(A_1 + \cdots + A_{m-1-i})10^{ik} + h}{\sum_{i=0}^{m-1} 10^{ik}}$$

(2) 在定理 8 中,当 $m = 2$ 时,即定理 5(1). 定理 8 的证明也给出了定理 5(1) 的又一种简洁证明.

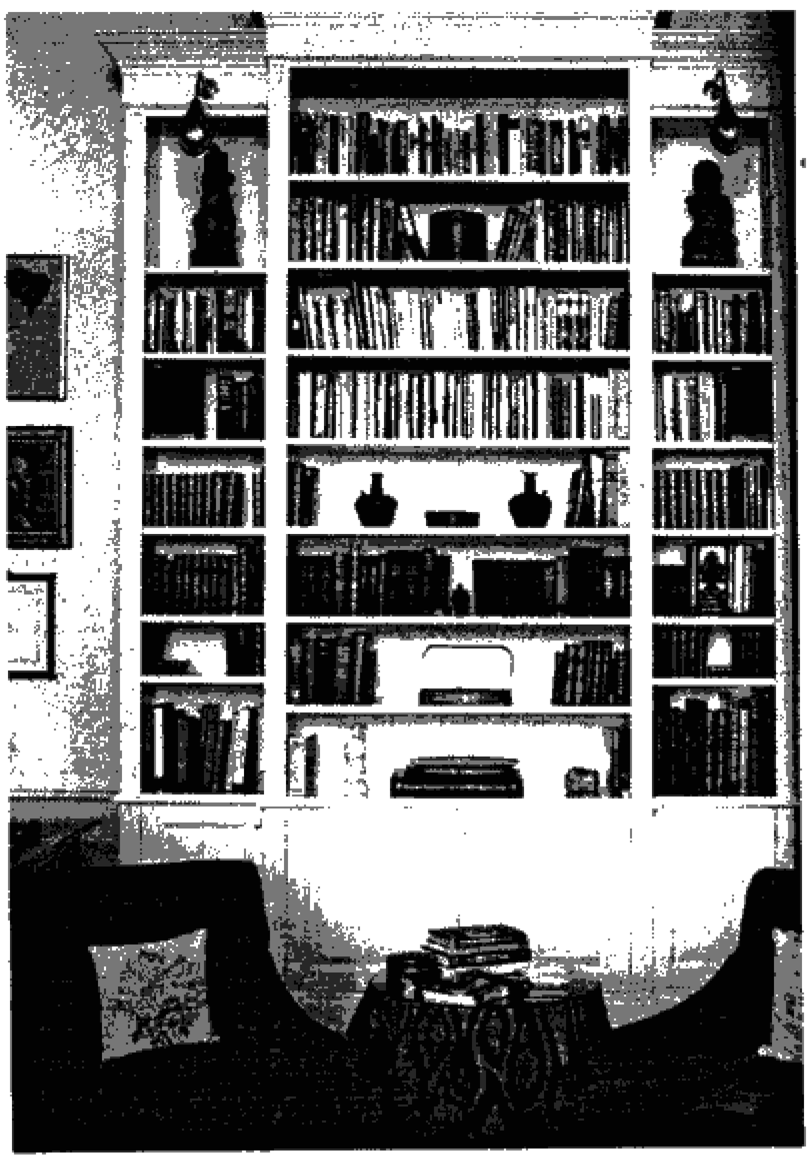
参考文献

[1] 魏万迪. 整数入门[M]. 成都:四川教育出版社,1988.

[2] 洪潮. 中等师范学校数学课本《小学数学基础理论与教法(第一册)》[M]. 2 版. 北京:人民教育出版社,1985:223-226.

[3] 李抗强. 构造是完全平方数的连整数的方法[J]. 数学通讯,1996(1):24-25.

教材研究



对人教版教科书(必修)《数学·第一册(上)》的若干思考

笔者在使用全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》(2006年人民教育出版社)(下简称《教科书第一册(上)》)进行教学时,仔细研读了该书,并提出了若干思考,现在大胆写出来请各位读者审阅,不当之处,敬请批评指正.

1 不应限定"本书所提的约数指的都是正约数"

《教科书第一册(上)》第5页的脚注"如果没有特别说明,本书所提的约数指的都是正约数"建议去掉,最好改为"注意:约数有正约数、负约数之分".

小学《数学》是在正整数范围内中讲述约数、倍数、整除的概念的,到了中学,因为学习了负数,所以约数、倍数、整除的概念也应随之推广:如果整数 a 能被整数 b 整除,即存在一个整数 q,使得 $a = bq$,则 a 称为 b 和 q 的倍数,b 和 q 都称为 a 的一个约数,亦称因数或因子(见谷超豪主编《数学词典》(1992年上海辞书出版社)第6页).脚注限制了"正约数"这个概念的外延是不对的,应当以概念的真实面貌为准.若按照脚注的意思,可以推知倍数也指正倍数(因为约数与倍数是一对概念),那么《教科书第一册(上)》第7页练习第2(1)题"用描述法表示所有偶数组成的集合"的答案应当是 $\{2n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$,而与《教科书第一册(上)》配套使用的《教师教学用书》(2006年人民教育出版社)(下简称《教师用书第一册(上)》)第12页给出的答案正是这样.这样又与《教科书第一册(上)》第13页的定义"形如 $2n(n \in \mathbf{Z})$ 的整数叫做偶数,形如 $2n+1(n \in \mathbf{Z})$ 的整数叫做奇数.全体奇数的集合简称奇数集,全体偶数的集合简称偶数集"(建议将这里的两个"整数"均改为"数")相矛盾!

2 集合 $\{x \in \mathbf{R} \mid x - 3 > 2\}$ 的含义有歧义

《教科书第一册(上)》第6页第10~11行写到:"不等式 $x - 3 > 2$ 的解集可以表示为 $\{x \in \mathbf{R} \mid x - 3 > 2\}$",笔者认为这样表示不妥:因为集合 $\{x \in \mathbf{R} \mid x - 3 > 2\}$ 即 $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 5\}$ 的代表元是"$x \in \mathbf{R}$",所以该集合应当表示满足条件 $x > 5$ 的所有关系式 $x \in \mathbf{R}$ 组成的集合 $\{5.01 \in \mathbf{R}, \cdots, 5.1 \in \mathbf{R}, \cdots, 6 \in$

$\mathbf{R}, \cdots, 7 \in \mathbf{R}, \cdots\}$,与"不等式 $x-3>2$ 的解集"完全不同,所以笔者认为还是用 $\{x \mid x-3>2\}$ 表示不等式 $x-3>2$ 的解集为好.

《教师用书第一册(上)》第3～4页的第7条说以上《教科书第一册(上)》的集合表示方法依据的是国家标准的规定,但笔者认为这种容易产生歧义的表示方法放在教科书中不妥.

3 "1.2 子集、全集、补集"的词序应作改动

《教科书第一册(上)》第8页第一行"1.2 子集、全集、补集"建议改为"1.2 子集、补集与全集";因为教科书是按照这个顺序讲述的;同理,第10页第一行"全集与补集"建议改为"补集与全集".

4 "简单命题"、"复合命题"的定义不严密

《教科书第一册(上)》第28页写到:"'或'、'且'、'非'这些词叫做逻辑联结词.像①、②、③这样的命题,不含逻辑联结词,是简单命题;像④、⑤、⑥这样的命题,它们由简单命题与逻辑联结词构成,是复合命题."

这里"简单命题"、"复合命题"的定义均不严密.因为有些不含"或"、"且"、"非"的命题也是复合命题,如"$2 \leqslant 3$"是"或"命题,"有两个角为45°的三角形是等腰直角三角形"是"且"命题(分别见《教科书第一册(上)》第31页练习第1(1)题、习题第2(4)题),"3不是有理数"是"非"命题;有些含有"或"、"且"、"非"的命题却是简单命题,如《教科书第一册(上)》第27页中的命题"不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集是 $\{x \mid x<-2$,或 $x>3\}$","不等式 $x^2-x-6<0$ 的解集是 $\{x \mid x<-2$,且 $x>3\}$"都是简单命题,《教科书第一册(上)》第30页中的命题"电子保险门在'钥匙插于'且'密码正确'两个条件都满足时,才会开启"也是简单命题,"非零实数的零次幂等于1"不是"非"命题而是简单命题.

文献[1],[2]也对这部分知识提出了修改意见,请读者参阅.

《教科书第一册(上)》第31页第1(2)题中写出"命题 p:方程 $x^2+x-1=0$ 的两根符号不同"的"非 p"形式的复合命题,《教师用书第一册(上)》第18页给出的答案"非 p:方程 $x^2+x-1=0$ 的两根符号相同"是不对的,正确答案应为"非 p:方程 $x^2+x-1=0$ 的两根符号相同或至少有一个零根".[3]

《教科书第一册(上)》第33页例1(2)把命题"正方形的四条边相等"改写成"若 p 则 q"的形式,并写出其逆命题、否命题与逆否命题,给出的解答不对,错误的原因是没有注意"四条边相等"即"四条边都相等",其否定应该是"四条边不都相等",不能简单地说成"四条边不相等",因为"四条边不相等"的意义不清楚.[3]

《教科书第一册(上)》第33页例2末的冒号":"应该为句号".".

文献[4]还指出并纠正了《教师用书第一册(上)》第48页给出的《教科书第一册(上)》第62页第4题答案的错误.

5 对第68页例1(4)的思考

《教科书第一册(上)》第68页例1(4)"求函数 $y=\frac{2x+3}{x-1}(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq1)$ 的反函数"的解答是:"由函数 $y=\frac{2x+3}{x-1}$,得 $x=\frac{y+3}{y-2}$,所以函数 $y=\frac{2x+3}{x-1}(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq1)$ 的反函数是 $y=\frac{x+3}{x-2}(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq2)$."

以上解法中没说清楚反函数的定义域"$x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq2$"是怎么来的,绝不能说是由反函数的解析式"$y=\frac{2x+3}{x-1}$"中的分母不为0得到的,因为反函数的定义域是原函数的值域,必须求出了原函数的值域后方可知道反函数的定义域.没有一般性的结论"反函数的定义域就是使反函数的解析式有意义的自变量取值的集合"成立.[5]

本题关于反函数的定义域的正确求法有两种.

(1) 原函数即 $y=\frac{2(x-1)+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}(x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq1)$,因为 $\frac{5}{x-1}(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq1)$ 的取值范围是非零实数集,所以此函数 y 的值域是"$y\in\mathbf{R}$,且 $y\neq2$)",从而可得所求反函数的定义域是"$x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq2$".

(2) 可将原函数等价变形为 $(y-2)x=y+3(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq1)$,由"$x\in\mathbf{R}$"知此式中 y 的取值范围是"$y\in\mathbf{R}$,且 $y\neq2$",从而可得所求反函数的定义域是"$x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq2$".

6 对第80页例1的思考

《教科书第一册(上)》第80页例1及其解答是:

某种放射性物质不断变化为其他物质,每经过1年剩留的这种物质是原来的84%.画出这种物质的剩留量随时间变化的图象,并从图象上求出经过多少年,剩留量是原来的一半(结果保留一个有效数字).

解 设这种物质最初的质量是1,经过 x 年,剩留量是 y.

经过1年,剩留量 $y=1\times84\%=0.84^1$;

经过2年,剩留量 $y=0.84\times0.84=0.84^2$;

$\vdots$

一般的,经过 x 年,剩留量

$$y = 0.84^x$$

根据这个函数关系可以列表如下：

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	0.84	0.71	0.59	0.50	0.42	0.35

画出指数函数 $y = 0.84^x$ 的图象(图 2 - 14)(本文引用时略去了).从图上看出 $y = 0.5$ 只需 $x \approx 4$.

答:约经过 4 年,剩留量是原来的一半.

关于此题及其解答,笔者有两点思考:

(1) 本题欲介绍的一个重要方法是"用函数图象求方程的近似解",但从上述列的表中已清楚地看出"$y = 0.50$ 时 $x = 4$",所以本题中的"用函数 $y = 0.84^x$ 的图象求方程 $0.84^x = 0.5$ 的近似解"就不会落到实处,是掩耳盗铃的现象.建议把题中的数据"84%"改为"80%"就不会出现这种情形了.

改动后,经过 x 年,剩留量 $y = 0.80^x$,列表如下(上表中两行末均应添上省略号):

x	0	1	2	3	4	5	6	…
y	1	0.80	0.64	0.51	0.41	0.33	0.2	…

由此表画出函数图象后,可用图象求出方程 $0.80^x = 0.5$ 的近似解是 $x \approx 3$.

(2)《教科书第一册(上)》的解答中得出的函数 $y = 0.84^x$ 的定义域是什么呢?解答中没有给出,但从解答中画出的函数图象知定义域是{非负数}(从不断变化知,定义域也应如此).

再来看《教科书第一册(上)》第 99 页练习第 3 题:一种产品的年产量原来是 a 件,在今后 m 年内,计划使年产量平均每年比上一年增加 $p\%$.写出年产量随经过年数变化的函数关系式.

《教师用书第一册(上)》第 61 页给出的解答是:"设年产量经过 x 年增加到 y 件,则 $y = a(1 + p\%)^x(x \in \mathbf{N}^*$,且 $x \leqslant m)$."

比较以上两道题的解答可知,练习第 3 题的题目及解答均无误(由"今后"知 $m \in \mathbf{R}^+$);例 1 的题目及解答均有误,因为所求函数 $y = 0.84^x$ 只适合 $x \in \mathbf{N}$ 的情形,当 $x \notin \mathbf{N}$ 时 y 的值是不能求出的.

若例 1 的题目中再添上条件"这种物质在任意相等的时间里剩留量的百分比都相等",则例 1 的解答完全正确.证明如下:

设这种物质每经过$\frac{1}{n}(n \in \mathbf{N}^*)$年,剩留量是原来的 $r\%$,则经过 n 个$\frac{1}{n}$年(即 1 年)剩留量是原来的$(r\%)^n$,得$(r\%)^n = 84\%$.

若 x 是非负有理数，则存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使 $nx\in\mathbf{N}$，得经过 x 年(即 nx 个 $\frac{1}{n}$ 年)剩留量 $y=(r\%)^{nx}=[(r\%)^n]^x=0.84^x$，此时结论成立.

若 x 是正无理数，用正有理数逼近正无理数的方法可知要证结论也成立.

7 对第96页例2的注记

《教科书第一册(上)》第96～97页的例2及其解答是：

设在海拔 x m处的大气压强是 y Pa，y 与 x 之间的函数关系式是

$$y=ce^{kx}$$

其中 c,k 为常量．已知某地某天在海平面的大气压为 1.01×10^5 Pa，1 000 m高空的大气压为 0.90×10^5 Pa，求600 m高空的大气压强(结果保留三个有效数字)．

解 将 $x=0,y=1.01\times10^5,x=1\,000,y=0.90\times10^5$ 分别代入函数式 $y=ce^{kx}$，得

$$\begin{cases}1.01\times10^5=ce^{k\cdot0}\\0.90\times10^5=ce^{1\,000k}\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}c=1.01\times10^5\\0.90\times10^5=ce^{1\,000k}\end{cases}$$

将 $c=1.01\times10^5$ 代入 $0.90\times10^5=ce^{1\,000k}$ 得

$$0.90\times10^5=1.01\times10^5e^{1\,000k}$$

所以
$$k=\frac{1}{1\,000}\times\ln\frac{0.90}{1.01}$$

由计算器算得

$$k=-1.15\times10^{-4} \quad ①$$

所以
$$y=1.01\times10^5\times e^{-1.15\times10^{-4}x} \quad ②$$

将 $x=600$ 代入上述函数式得

$$y=1.01\times10^5\times e^{-1.15\times10^{-4}\times600}$$

由计算器算得

$$y=0.943\times10^5(\text{Pa})$$

答：在600 m高空的大气压约为 0.943×10^5 Pa.

注 编号①，②为笔者所加.

对于该例题及其解答笔者有以下注记：

(1) 建议题目问话中的“大气压强”改为“大气压”(因为题目中在此之前已经用了“大气压强”简称为“大气压”，并且这样改动之后与答语中的“大气压”一致.

(2) 因为结果保留三个有效数字，所以解题过程中取近似数时应保留四个有效数字(这是近似数的计算法则)，所以式 ① 应改为

$$k = -1.153 \times 10^{-4}$$

从而式 ② 也应改为

$$y = 1.01 \times 10^5 \times e^{-1.153 \times 10^{-4} x}$$

当 $x = 600$ 时，$y = 0.942 \times 10^5$(Pa)．说明原答案有误！

(3) 用整体代换，中间尽量不取近似数的解法将更简洁，更完美！

设 $e^k = t$，得 y 与 x 之间的函数关系式是

$$y = ct^x (t > 0)$$

由已知条件易知 $c = 1.01 \times 10^5$，且

$$0.90 \times 10^5 = 1.01 \times 10^5 \times t^{1\,000}$$

$$t = \left(\frac{0.90}{1.01}\right)^{0.001} = 0.999\,884\cdots$$

若取近似值，则 $t = 1.000$，得所求的函数解析式为 $y = ct^x = 1.01 \times 10^5 \times 1.000^x$，当 $x = 600$ 时，$y = 1.01 \times 10^5$，误差很大，所以以下解法简洁、准确．

得 y 与 x 之间的函数关系式是

$$y = 1.01 \times 10^5 \times \left(\frac{0.90}{1.01}\right)^{0.001x}$$

只按一次计算器算得当 $x = 600$ 时，$y = 0.942 \times 10^5$(Pa)．

这与前者的答案一致．

《教科书第一册(上)》第 99 ~ 100 页的第 6 题用以上整体代换，中间尽量不取近似数的解法的方法同样简洁、完美！并且比《教师用书第一册(上)》第 62 ~ 63 页的解答要简洁！

8　对第 99 页习题第 4 题的疑问

《教科书第一册(上)》第 99 页习题第 4 题是：

某人开汽车沿一条直路以 60 km/h 的速度从 A 地到 150 km 远处的 B 地，在 B 地停留 1 h 后，再以 50 km/h 的速度返回 A 地．把汽车与 A 地的距离 x(km) 表示为时间 t(h)(从 A 地出发时开始) 的函数，并画出函数的图象；再把车速 v(km/h) 表示为时间 t(h) 的函数，并画出函数的图象．

《教师用书第一册(上)》第 61 页给出的答案是：

汽车与 A 地的距离 x(km) 表示为时间 t(h) 之间的函数关系式是

$$x = \begin{cases} 60t & t \in [0,2.5] \\ 150 & t \in [2.5,3.5] \\ 150 - 50(t-3.5) & t \in [3.5,6.5] \end{cases} \quad ③$$

它的图象这里略去.

车速 v(km/h) 与时间 t(h) 的函数关系式是

$$v=\begin{cases}60 & x\in[0,2.5)\\ 0 & x\in[2.5,3.5)\\ -50 & x\in[3.5,6.5]\end{cases} \quad ④$$

它的图象这里也略去.

注 编号 ③,④ 也为笔者所加.

显然 ④ 中的三个"x"均应改为"t",即应将 ④ 改为

$$v=\begin{cases}60 & t\in[0,2.5)\\ 0 & t\in[2.5,3.5)\\ -50 & t\in[3.5,6.5]\end{cases} \quad ⑤$$

读者是否注意到 ③,⑤ 两个分段函数的分段区间的差异,笔者对分段函数 ⑤ 提出疑问:为什么 $t=2.5$ 时的瞬时速度是 0 而不是 60 呢?为什么 $t=3.5$ 时的瞬时速度是 -50 而不是 0 呢?

一般认为瞬时速度是位移函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数(见全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修 Ⅱ)》(2004 年人民教育出版社) 第 111 页倒数第八行),而 $t=2.5$ 时的左导数是 60,右导数是 0,说明 $t=2.5$ 时的导数不存在. 能否由此说明 $t=2.5$ 时的瞬时速度也不存在呢?$t=2.5$ 时的瞬时速度不存在是否与该时刻物体在运动相矛盾呢?

教师用书用右导数表示瞬时速度,那么 $t=6.5$ 时的瞬时速度是 0(因为 $t>6.5$ 时 $s(t)=0$).

请读者评析以上说法是否正确并给出完整的解决办法.

(这些内容笔者曾发表于《数学通讯》2007 年第 11 期的《争鸣(问题 139)》,但至今没有读者对此作出评析.)

9 对第 99 页习题第 5 题答案的完善

《教科书第一册(上)》第 99 页第 5 题是:

某种放射性元素的原子数 N 随时间 t 的变化规律是 $N=N_0e^{-\lambda t}$,其中 N_0,λ 是正的常数.

(1) 说明函数是增函数还是减函数;

(2) 把 t 表示为原子数 N 的函数;

(3) 求当 $N=\frac{N_0}{2}$ 时,t 的值.

《教师用书第一册(上)》第 62 页给出的第(2) 问的答案是:$t=\frac{1}{\lambda}(\ln N_0-$

$\ln N)$

笔者认为解答此问时应注明函数的定义域(解决应用题时更是如此):

由 $N = N_0e^{-\lambda t}(t \geqslant 0)$,得 $0 < N \leqslant N_0$,所以第(2)问的答案应当是:$t = \frac{1}{\lambda}(\ln N_0 - \ln N)(0 < N \leqslant N_0)$

10 《数列》中的几处表述亟待修正

10.1 对第 119 页例 2 的修正

《教科书第一册(上)》第 119 页的例 2 是:

写出下面数列的一个通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:

(1)1,3,5,7;

….

解　(1)$a_n = 2n - 1$;

….

笔者对此题及其解法提出以下异议:

由《教科书第一册(上)》第 119 页的叙述知,数列分为有穷数列和无穷数列两种,其一般形式分别为

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

(所以笔者认为《教科书第一册(上)》第 118 页说“数列的一般形式可以写成 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.”有误)而例 2 中“下面数列”的(1)是有穷数列,所以(1)的正确答案应是“$a_n = 2n - 1(n = 1,2,3,4)$”.

但从原解答来看,以上正确答案不是出题者的本意,所以建议把例 2 中的“使它的前 4 项分别是下列各数”改为“使它的前 4 项分别是所给的数”,再把“(1)1,3,5,7;”改为“(1)1,3,5,7,…;”.这样原答案也不变.

建议该例2的其他小题及《教科书第一册(上)》第 120 ~ 121 页的3,4题,第 122 页习题的第 1 题,第 149 页第 4 题均作以上类似的改动.

《教科书第一册(上)》第 126 页“例 4　已知数列的通项公式为 $a_n = pn + q$,其中 p, q 是常数,且 $p \neq 0$,那么这个数列是否一定是等差数列?如果是,其首项与公差是什么?”中的“且 $p \neq 0$,”建议去掉,并且去掉之后该题的答案及解题过程均不变;还建议把该题末尾的“首项与公差是什么”改为“首项与公差分别是什么”.

另外,笔者认为《教科书第一册(上)》第 127 页练习第 3(2)题中“取出数列中的所有奇数项,组成一个新的数列”一般应理解为“取出数列中的所有是奇

数的项，组成一个新的数列"，所以建议将它改为"取出数列中的第奇数项且按原来的先后顺序组成一个新的数列"或"取出数列中项数为奇数的项且按原来的先后顺序组成一个新的数列"或"取出数列中序号为奇数的项且按原来的先后顺序组成一个新的数列".而《教科书第一册(上)》第127页练习第3(3)题，第138页第3(3)题，第150页第6题都注意了这方面的表述.

《教科书第一册(上)》第138页第3(2)题也应作同样的改动.

10.2 对第128页第9题的改动

《教科书第一册(上)》第128页的第9题是：

三个数成等差数列，它们的和等于18，它们的平方和等于116，求这三个数.

建议将此题改为：

三个数依次成等差数列，它们的和等于18，它们的平方和等于116，求这个等差数列.

10.3 对第137页例3的修正

《教科书第一册(上)》第151页的例3是"已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是项数相同的等比数列，求证：$\{a_n \cdot b_n\}$是等比数列."本题是正确的，并且容易证出.但《教科书第一册(上)》是按照$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均是无穷数列来证明的，高中生不能认为"两个无穷等比数列的项数相同"(只有对有穷数列才能谈项数，"$+\infty$"不是数).

笔者建议，把例3题目中的第一句话改为"已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是无穷等比数列"，若证出了无穷的情形，则有穷的情形自然成立.

10.4 对第151页的第8题的改动

《教科书第一册(上)》第151页的第8题是：

某地现有居民住房的总面积为a m^2，其中需要拆除的旧住房面积占了一半.当地有关部门决定在每年拆除一定数量旧住房的情况下，仍以10%的住房增长率建设新住房.

(1) 如果10年后该地的住房总面积正好比目前翻一番，那么每年应拆除的旧住房总面积x是多少?(提示：计算时可取1.1^{10}为2.6.)

(2) 过10年还未拆除的旧住房总面积占当时住房总面积的百分比是多少?(保留到小数点后第一位)

建议该题应强调"先建后拆"，第(1)问的条件"如果10年后该地的住房总面积正好比目前翻一番"应作为该题总的已知条件，否则第(2)问缺少条件.[6]

11 中英文词汇对照表应准确

文献[7]还指出了《教科书第一册(上)》的2002年版的附录"部分中英文词汇对照表"中"属于"、"不属于"、"包含于"、"逆命题"、"值域"、"闭区间"、"开区间"、"等差数列"、"等比数列"的英文均有误,现在的《教科书第一册(上)》对此作了一些改动,比如,按照文献[7]已把"值域"的英文"co-domain"改为"range",但文献[7]认为"逆命题"的英文应当由"inverse proposition"改为"converse",而现在的《教科书第一册(上)》却改为"converse proposition",能否有一个权威的说法?

参考文献

[1] 刘国平.新教材《逻辑联结词》一节中的两处改进意见[J].数学通报,2002(4):44-45.
[2] 张凤英,刘瑞芬.关于"简易逻辑"的几点认识[J].数学通报,2003(8):12-13.
[3] 胡典顺.对高中数学新教材的若干建议[J].中学数学,2005(5):10-12.
[4] 江蓉.对一道课本应用题的研究[J].数学通讯,2004(8):17-18.
[5] 陈超俊."由反函数的定义域求给定函数的值域法"是错误的[J].数学通报,2001(4):14-16.
[6] 刘永昌,向志平.高中数学新教材中一道习题解法的商榷与推广[J].数学通讯,2001(11):29.
[7] 陈国正,雷忠金.关于新教材词汇对照表的几点商榷[J].数学通报,2002(12):40.

对人教版教科书(必修)《数学·第一册(下)》的若干思考

笔者在使用全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(下)》(2006年人民教育出版社)(下简称《教科书第一册(下)》)进行教学时,仔细研读了该书,并提出了若干思考,现在大胆写出来请各位读者审阅,不当之处,敬请批评指正.

1 第6页的例2应作改动

《教科书第一册(下)》第6页的例2是"写出终边在y轴上的角的集合(用0°到360°的角表示)".

笔者认为,这里的"(用0°到360°的角表示)"意思不清楚,"终边在y轴上的角的集合"能"用0°到360°的角表示"吗?(可能该题想说的意思是"用0°到360°的角加上若干个周角表示终边在y轴上的任意角")建议题目中去掉"(用0°到360°的角表示)".

《教科书第一册(下)》第8页第2题"写出终边在y轴上的角的集合(用0°到360°的角表示)"也应作此改动.

2 第7页练习第2题应作改动

《教科书第一册(下)》第7页练习的第2题是"(口答)今天是星期三,那么$7k(k\in \mathbf{Z})$天后的那一天是星期几?$7k(k\in \mathbf{Z})$天前的那一天是星期几?100天后的那一天是星期几?"建议将此题作一个说明:"-3天前(后)"的意义就是"3天后(前)"(这与负数的意义是一致的).若有此说明,该题的头两问是同一个意思,所以还应去掉一问.按照这个意思还可以理解《教科书第一册(下)》第5页黑体字中"角α与整数个周角的和"中负数个周角的情形.

用这种理解还可把《教科书第一册(下)》第72页的黑体字"函数$y=A\sin(\omega x+\varphi),x\in\mathbf{R}$(其中$A>0,\omega>0$)的图象,可以看做用下面的方法得到:先把正弦曲线上所有的点向左(当$\varphi>0$时)或向右(当$\varphi<0$时)平行移动$|\varphi|$个单位长度,再把所得各点的横坐标缩短(当$\omega>1$时)或伸长(当$0<\omega<1$时)到原来的$\frac{1}{\omega}$倍(纵坐标不变),再把所得各点的纵坐标伸长(当$A>1$

时)或缩短(当 $0 < A < 1$ 时)到原来的 A 倍(横坐标不变)”简述为“函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}$(其中 $A > 0, \omega > 0$)的图象,可以看做用下面的方法得到:先把正弦曲线上所有的点向左平行移动 φ 个单位长度,再把所得各点的横坐标缩短或伸长到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍(纵坐标不变),再把所得各点的纵坐标缩短或伸长到原来的 A 倍(横坐标不变)”.

3 第8页中“1弧度的角”的定义不清楚

《教科书第一册(下)》第4页写到:

“我们规定,按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.如果一条射线没有作任何旋转,我们称它形成了一个零角.” ①

由此知,角有且仅有三种:正角、负角和零角.

《教科书第一册(下)》第8~9页又写到:

“我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角,即用弧度制度量时,这样的圆心角等于1 rad.如图4.6(图形见《教科书第一册(下)》,图中的 $\angle AOB$ 是按逆时针方向旋转的),弧 AB 的长等于半径 r,弧 AB 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是1弧度的角.” ②

“任一0°到360°的角的弧度数 $x = \frac{l}{r}$ 必然适合不等式 $0 \leqslant x < 2\pi$.角的概念推广后,弧的概念也随之推广,任一正角的弧度数都是一个正数.”“如果角 α 是一个负角,那么它的弧度数是一个负数;零角的弧度数是0.”“一般的,可以得到:正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是0;角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha| = \frac{l}{r}$,其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对弧的长,r 是圆的半径.” ③

笔者认为,以上“1弧度的角”的定义并不清楚:

② 中“把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角”,这里的“圆心角”未指明旋转方向,由 ① 知这个角可能是正角,也可能是负角,所以这里的“1弧度的角”指正、负两种角. ② 中“如图4.6,…… 圆心角 $\angle AOB$ 就是1弧度的角”,这里的“1弧度的角”指正角.

《教科书第一册(下)》第12页练习的第10题是“已知半径为120 mm的圆上,有一条弧的长是144 mm,求此弧所对的圆心角的弧度数”,根据 ③ 中的公式“$|\alpha| = \frac{l}{r}$”或《教科书第一册(下)》第10页的弧长公式“$l = |\alpha| r$”均可求得 $|\alpha| = \frac{144}{120} = 1.2, \alpha = \pm 1.2$,所以所求圆心角的弧度数是 ± 1.2.

而与《教科书第一册(下)》配套使用的《教师教学用书》(2003年人民教育

出版社)(下简称《教师用书第一册(下)》)第7页写到:"练习的第10题中,圆心角有正、负两个答案,但因为题目限定取圆心角的绝对值,所以舍去了负值."但笔者却怎么也看不出"题目限定取圆心角的绝对值".《教科书第一册(下)》第13页第8,10,12题均存在此类问题:所求答案是正角还是正、负两个角?

笔者认为,《教科书第一册(下)》应在 ① 之后讲述"角的绝对值"的概念:"角的绝对值就是指这个角度数的绝对值.我们在小学、初中所写的角的大小,就是指角的绝对值.并且约定:我们在今后遇到的角,没有指明角的旋转方向时,这个角的大小就是指这个角的绝对值."

这样,小学、初中学的角就是指高中里角的绝对值(好比小学中的数也是初中里有理数的绝对值),并且在解《教科书第一册(下)》上的题时也变得简洁,答案也与《教师用书第一册(下)》上一致.注意,② 中的文字也无须改动,其意义也清楚明白:② 里第一句话中"圆心角"指"圆心角的绝对值"(从《教科书第一册(下)》第11页例6及其解答知,也是如此).当然,定义了"弧度"之后,角的绝对值也可指这个角弧度数的绝对值.本来嘛,度数与弧度数就是可以互化的.

4 第11页例4(2)的答案不精确

《教科书第一册(下)》第11页例4(2)是"计算 tan 1.5",解法是"$\tan 1.5 \approx \tan 85°57' = 14.12$",这是按查《中学数学用表》来解答的,但若利用科学计算器(是可以用计算器的,见《教科书第一册(下)》第10页例2后第一行),得 $\tan 1.5 = 14.10$,两者相差较多.产生的原因是前者两次近似,而后者只一次近似.《教科书第一册(下)》的解法没错,但建议用计算器算.

《教科书第一册(下)》第13页第10题中的"每一等份"及第11题中的两处"每1 s"建议分别改为"每等份"、"每秒",这样简洁些,也符合习惯.

5 第35页例6的化简结果应为 $-\csc\alpha$

《教科书第一册(下)》第35页例6是一道化简题,所得最后结果是 $-\frac{1}{\sin\alpha}$.

《教师用书第一册(下)》第13页写道:"另外,例6的结果是 $-\frac{1}{\sin\alpha}$,不要求写成 $-\csc\alpha$.注意:$\frac{1}{\sin\alpha}$ 可写成$(\sin\alpha)^{-1}$,但不能写成 $\sin^{-1}\alpha$."

因为教科书第17页介绍了六种三角函数的定义,由此也立知之间的一些倒数关系,比如 $\sin\alpha\cdot\csc\alpha = 1$,所以笔者认为例6的结果应写成最简洁的答案 $-\csc\alpha$(虽说 $\csc\alpha$ 不常用,但此处应当用).

若依照《教科书第一册(下)》、《教师用书第一册(下)》的意思,那么$\frac{1}{\tan\alpha}$ 也

不用改成 $\cot\alpha$，$\frac{1}{\cot\alpha}$ 也不用改成 $\tan\alpha$，这显然不行！

6 一些题目应添上相应的条件

《教科书第一册(下)》第44页第4(2)题是：

题1 已知 $A+B=225°$，求证：$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$.

《教师用书第一册(下)》第34页的给出的提示是：从等式 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\tan(A+B)=\tan 225°$ 入手.

我们来编拟这样的一道选择题：

题2 “$A+B=225°$”是“$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$”成立的(　　).

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

你一定会认为该题的正确答案是D：当 $A=90°$，$B=135°$ 时，$A+B=225°$ 成立，而 $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$ 不成立；当 $A=30°$，$B=15°$ 时，$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$ 不成立.而 $A+B=225°$ 不成立.

而由题1是真命题可知，题2的正确答案是A.

所以，笔者认为题1中还应添上条件“$A\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$B\neq l\pi+\frac{\pi}{2}(k,l\in\mathbf{Z})$”.决不能认为，要证的式子的左右两边、要计算的式子一定是有意义的，它们有意义应当体现在题设中.当然，《教科书第一册(下)》中有约定的出外，比如，“4.4同角三角的基本关系式”(第26页末)写到：“以后说到其他已证或待证的三角恒等式时，除特殊注明的情况外，也都假定是在使两边都有意义的情况下的恒等式.”

所以，对于已证或待证的三角条件等式就不适合此约定了.比如，《教科书第一册(下)》第46页第17题“求证：$\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x)=\tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$”符合以上约定；第101页第14题“已知 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$，且 $m\neq1$，$\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$，$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，求证：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$”就注意到了这一点：证明三角条件等式时，一定要给出使待证等式两边均有意义的字母的取值范围.

但《教科书第一册(下)》第44页第4(2)题“已知 $A+B=225°$，求证：$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$”；第46页第10题“已知 $a\sin(\theta+\alpha)=b\sin(\theta+\beta)$，求证：$\tan\theta=\frac{b\sin\beta-a\sin\alpha}{a\cos\alpha-b\cos\beta}$；第46页第15题“已知 $\alpha+\beta+\gamma=n\pi(n\in\mathbf{Z})$，求证：$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$”；第98页第16(1)题“已知 $A+B=$

$\frac{\pi}{4}$,求证:$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$”就没有注意到:证明三角条件等式时,一定要给出使待证等式两边均有意义的字母的取值范围.《教科书第一册(下)》第48页例2的证明中说“$\frac{1+\sin 4\theta-\cos 4\theta}{2\tan\theta}=\frac{1+\sin 4\theta+\cos 4\theta}{1-\tan^2\theta}$”与“$1+\sin 4\theta-\cos 4\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}(1+\sin 4\theta+\cos 4\theta)$”等价也是不对的.

笔者建议《教科书第一册(下)》第26页末的约定应改述为:“以后说到其他已证或待证的三角等式(包括恒等式和条件等式)时,除特殊注明的情况外,也都假定是在使两边都有意义的情况下的恒等式;包括计算题,也是指在该式有意义的情况下进行计算.”(文献[1],[2]也是这种观点)

7 第53页单位圆的说法不对

《教科书第一册(下)》第15页写到“单位圆(圆心在原点 O,半径等于单位长度的圆)”;而《教科书第一册(下)》第53页正文第二行又写到“在直角坐标系的 x 轴上任意取一点 O_1,以 O_1 为圆心作单位圆”.

这两处是有矛盾的!单位圆的定义是怎样的?

由著名数学家谷超豪主编的《数学词典》(1992年上海辞书出版社)第108页给出的定义是“单位圆(unit circle)以坐标轴的原点为圆心,以等于单位长的线段为半径所作的圆”;在网(http://zhidao.baidu.com/question/21466847.html)上也可以搜索出单位圆的定义“最佳答案:在平面直角坐标系中,以原点为圆心,单位长为半径的圆就是单位圆”.

由此看来,《教科书第一册(下)》第53页正文第二行应改述为“在直角坐标系的 x 轴上任意取一点 O_1,以 O_1 为圆心作半径为单位长的圆”.

8 第98页第13题应作修改

《教科书第一册(下)》第98页第13题填表内容的第五栏即“已知 $\pi<x<2\pi,\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,求 $x,\cos x,\tan x$ 的值”.

该题有两组答案:$x=\frac{4\pi}{3},\cos x=-\frac{1}{2},\tan x=\sqrt{3}$;$x=\frac{5\pi}{3},\cos x=\frac{1}{2},\tan x=-\sqrt{3}$.而《教师用书第一册(下)》第43页给出的仅是第二组答案,所以不完整.但两组答案的题又不适合填表,所以建议把“$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”改为“$\sin x=-1$”.

9 cos(sin 2) 是何意义?

《教科书第一册(下)》第 98 页第 12(3) 题是"用计算器求 cos(sin 2) 的值".《教师用书第一册(下)》第 43 页给出的答案是"0.614 3".

而笔者认为《教师用书第一册(下)》并没有讲清楚"cos(sin 2)"的意义:

因为 sin 2 是 2 弧度的正弦值,是一个实数;而 cos(sin 2) 要有意义的话,sin 2 必须是角的大小,所以 cos(sin 2) 无意义!

《教科书第一册(下)》第 17 页的表格上方写的"由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系,三角函数可以看成以实数为自变量的函数",笔者认为这也没有道理:当 α 是实数时,$\sin\alpha$ 没有意义;只有当 α 表示角的大小时,$\sin\alpha$ 才有意义.决不能说"由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系,三角函数就可以看成以实数为自变量的函数",只能求角的三角函数(角的单位是弧度时可以省略不写,形式上变成了一个实数,但仍然表示的是多少弧度,绝不是实数),不能求实数的三角函数.

鉴于像"cos(sin 2)"这样的式子及"若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,求证:$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$"这样的题目还很常见,都是把 cos(sin 2) 理解成(sin 2) 弧度的余弦;把 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$ 中的第二个 α 理解成角 α 的弧度数 —— 是一个实数(而笔者认为 $\sin\alpha$,α 分别是实数与角,它们不能比较大小).所以应把《教科书第一册(下)》第 17 页的表格上方写的"由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系,三角函数可以看成以实数为自变量的函数"改述为"有时候,也会遇到 $\sin\alpha$ $(\alpha\in\mathbf{R})$ 的情形,这时实数 α 应看成 α 弧度";在"若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$"中第三个 α 也应理解成角 α 的弧度数 —— 是一个实数.

10 第 101 页第 12 题的正确解答

《教科书第一册(下)》复习参考题四 B 组的第 12 题(第 101 页)是:"求函数 $y=\dfrac{\lg\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\tan x-1}$ 的定义域."

《教师用书第一册(下)》第 46 页的给出的答案是(没有给出解答过程):$\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

细细品味一下可知,《教师用书第一册(下)》的这个答案并不正确:因为该答案并没有指出当 $k=0,1,-1,2,-2,\cdots$ 时,各集合 $\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cup$

$\left(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$之间应当求并集.而正确答案应当是这些集合的并集

$$\left\{k\pi+\alpha \mid -\frac{\pi}{12}<\alpha<\frac{\pi}{4},\text{或}\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5\pi}{12}\right\}$$

这里还想说明一点:几个集合的并集不宜作为答案的最后结果.

下面的答案在很多资料中还很常见:

(1) $\left\{\alpha \middle| 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\alpha \middle| 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$;

(2)$(1,2)\cup(3,4)$;

(3)$(-\infty,-10)\cup(10,+\infty)$.

笔者认为,这些答案均不对:对于两个集合的并集,还应算出最后结果,即用一个集合来表示.这三个答案应分别改为:

(1′)$\left\{\alpha \middle| 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},\text{或}\,2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$;

(2′)$\{x \mid 1<x<2,\text{或}\,3<x<4\}$;

(3′)$\{x \mid x<-10,\text{或}\,x>10\}$.

并且笔者还发现一些权威的资料都注意了上述问题.比如,人民教育出版社出版的高中教科书及其《教师教学用书》都注意了这方面的问题.

11 应明确指出零向量的方向是任意的

《教科书第一册(下)》第104页定义"既有大小又有方向的量叫做向量",第105页定义"长度为0的向量叫做零向量,记作**0**"、"规定**0**与任一向量平行".

既然**0**也是向量,**0**就应该有方向,但《教科书第一册(下)》没有明确给出**0**的方向,从而导致规定**0**与任一向量平行的合理性无法解释."**0**与任一向量平行"是否暗示了"**0**的方向是任意的"?如果是这样的暗示,为什么在讨论两向量的夹角以及垂直时又把**0**排除在外呢(见《教科书第一册(下)》第127~128页的叙述)?

文献[3],[4]均建议:《教科书第一册(下)》应明确指出**0**的方向是任意的,或者说**0**是唯一的方向不确定的向量,进一步认定**0**与任一向量平行,也与任一向量垂直.大学教材[5]也是这样的观点,第131页写到:"零向量的方向不确定,也就是说,零向量的方向可以看做是任意的."第156页又写到:"定理4.5.2 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相互垂直的条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$."(教材[5]是分$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$中有**0**、无**0**两种情形证明是充要条件的)

《教科书第一册(下)》第122页的结论"$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$的充要条件是$x_1y_2-$

$x_2y_1 = 0$" 中的"($b \neq 0$)" 可以去掉.[3]

12 "线段的定比分点"的定义应作改动

建议将《教科书第一册(下)》第124页"线段的定比分点"的定义改述为[6]:

设点 P 是有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$(P_1,P_2 不重合)所在直线上异于 P_2 的任意一点,则使$\overrightarrow{P_1P} = \lambda\overrightarrow{PP_2}$的 λ 叫做点 P 分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比,点 P 叫做分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$成定比 λ 的定比分点.

由画图可知,当点 P 在线段P_1P_2内时,$\lambda > 0$;当点 P 与P_1重合时,$\lambda = 0$;当点 P 在线段P_1P_2或 P_2P_1 的延长线上时,$\lambda < 0$.所以定比 λ 可取不为 -1 的所有实数(若 $\lambda = -1$,则 P_1,P_2 重合),《教科书第一册(下)》上没有强调这一点,所以在推导定比分点坐标公式时欠严谨.

13 第119页的公式 $OB_1 = |b|\cos\theta$ 是如何推导出来的?

笔者认为,要推导出《教科书第一册(下)》第119页的公式 $OB_1 = |b|\cos\theta$,必须在图5-30的(1),(2)中作出规定:当有向线段 OB_1 与 OA 方向相同(相反)时,有向线段 OB_1 表示正数(负数).而《教科书第一册(下)》与《教师用书第一册(下)》均无此规定,那么此式又是如何推导出来的呢?请读者阅读文献[7],或许会有所帮助.

14 关于解斜三角形的一些思考

文献[3]指出了《教科书第一册(下)》"解斜三角形"内容的放置不妥.

《教科书第一册(下)》第141~142页的图5-37中还应画出无解的情形.《教科书第一册(下)》第141页说:"已知两边和其中一边的对角解三角形,有两解或一解,图5-37和图5-38说明了在$\triangle ABC$中,已知 a,b 和A 时解三角形的各种情况."此说法有误,应改为:

"已知两边和其中一边的对角解三角形,有两解、一解或无解(最好除《教科书第一册(下)》上的例2和例3外,还应补充无解的例题),图5-37和图5-38说明了在$\triangle ABC$中,已知 a,b 和A 时解三角形的各种情况."(图5-37的三种情形应改为四种情形,即第一种情形应为无解的情形)

《教师用书第一册(下)》第61页第三段说:"本节(解斜三角形)中复杂的计算都是使用计算器计算的.当使用计算器计算时,约定:当计算器所示结果为准确数时,或者为不少于四个有效数字的近似数而需要保留四个有效数字时,一律使用等号;保留的有效数字少于四个时,使用约等号."(笔者建议把此约定写于《教师用书第一册(下)》)

笔者发现《教师用书第一册(下)》中有几处“=”,“≈”的使用不一致:

第141页例3及解为:

在△ABC中,已知 $a=60, b=50, A=38°$,求 B(精确到1°)和 c(保留两个有效数字).

解 ….因为 $\sin B=\cdots=0.5131$

所以 $$B=31° \quad ④$$

….

第143页4及解为:

在△ABC中,已知 $a=7, b=10, c=6$,求 A, B 和 C(精确到1°).

解 因为 $\cos A=\cdots=0.725$

所以 $$A\approx 44° \quad ⑤$$

因为 $\cos C=\cdots=0.8071$

所以 $$C\approx 36° \quad ⑥$$

….

第143～144页例5及解为:

在△ABC中,已知 $a=2.730, b=3.696, C=82°28'$,解这个三角形(边长保留两个有效数字,角度精确到1′).

解 …因为 $\cos A=\cdots=0.7767$

所以 $$A=39°2' \quad ⑦$$

….

以上④⑦中用“=”,而⑤⑥中用“≈”.究竟应该用什么?道理又何在?《教科书第一册(下)》及《教师用书第一册(下)》中均无说明.

题3 (由《教科书第一册(下)》第141页例3改编)在△ABC中,已知 $a=60, b=50, A=38°$,求 c(保留两个有效数字).

解此题时,必须先用正弦定理求 B,请问 B 应精确到什么程度?还有与之相反的问题:在解三角形时,题目只要求角的结果精确到什么程度,而中间过程须算出边长,请问边长应精确到什么程度(题目中又未规定)?

《教师用书第一册(下)》第4页中“(0°,90°)”之类的表示不妥,理由见文献[8]:区间是实数的集合,而角度不是实数.

参考文献

[1] 陆海泉.解一道课本习题后的思考[J].数学通讯,2003(8):1-2.
[2] 罗中寿.对高中新教材中一道习题的完善建议[J].数学通讯,2003(6):17.
[3] 胡典顺.对高中数学新教材的若干建议[J].中学数学,2005(5):10-12.

[4] 路见可. 谈有关向量教学中的几点建议 —— 中学数学笔谈之十七[J]. 数学通讯, 2000(11):3-4.
[5] 吕林根. 解析几何[M]. 北京:高等教育出版社,1988.
[6] 甘志国. 建议[N]. 少年智力开发报·数学专页(高一),2004-5-9(1).
[7] 董正洪. 怎样理解 $OB_1 = |\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的意义[J]. 数学通讯,2008(19):16-18.
[8] 刘永春. "锐角"慎用"(0°,90°)"表示[J]. 中学数学杂志(高中),2004(4):57.

对人教版教科书(必修)《数学·第二册(上)》的若干思考

笔者在使用全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(上)》(2006年人民教育出版社)(下简称《教科书第二册(上)》)进行教学时,仔细研读了该书,并提出了若干思考,现在大胆写出来请各位读者审阅,不当之处,敬请批评指正.

1 一些语句上的改动

《教科书第二册(上)》第3页中的两处"每1 m^2"建议均改为"每平方米",这样简洁些,也符合习惯.第10页例1及其解答中的六处"当"均可改为"当且仅当".第12页第3题中的"当且仅当"应改为"均当且仅当".第33页第14题末的"问怎样设计房屋能使总造价最低,最低总造价是多少元."建议改为"问怎样设计能使房屋总造价最低?最低总造价是多少元?";建议《教科书第二册(上)》第63页"图7-19"下面第一段话中的第一处"左下方"、"右上方"分别改为"右上方"、"左下方",这样将与下文的"或大于0"、"或小于0";"$x+y-1>0$"、"$x+y-1<0$"相一致.第76页中的"例2设A,B两点的坐标是$(-1,-1)$,(3,7),……"建议改为"例2设A,B两点的坐标分别是$(-1,-1)$,(3,7),……".

《教科书第二册(上)》第23页末的小字中的"用了$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2$这一结论"应改为"用了当$a\geqslant 0$时:$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2$这一结论".

与《教科书第二册(上)》配套使用的《教师教学用书》(2004年人民教育出版社)(下简称《教师用书第二册(上)》)第17页给出的《教科书第二册(上)》第18页第*9题的证法繁琐,文献[1]的例1给出了其放缩法的简洁证法.

《教科书第二册(上)》第53页例7是用"等腰三角形在同一底上的两个外角相等"来解答的,建议用"等腰三角形的底角相等"来解答,要直接些.

2 第38页"方向向量"的定义应作改动

建议将《教科书第二册(上)》第38页的定义"直线上的向量$\overrightarrow{P_1P_2}$及与它平行的向量都称为直线的方向向量"改为"直线上的非零向量$\overrightarrow{P_1P_2}$及与它平行的非零向量都称为直线的方向向量".因为零向量与任一向量平行(见2006年人

民教育出版社《教科书第一册(下)》第105页),而零向量不能确定直线的方向.

《教科书第二册(上)》第47页练习的第2(2)题是“已知直线 $Ax+By+C=0$. 系数取什么值时,方程表示通过原点的直线?”《教师用书第二册(上)》第42页给出的答案是“$C=0$ 时,表示直线通过原点”.笔者认为,题目中的 C 不能叫系数,所以建议将“系数取什么值时”改为“A,B,C 满足什么条件时”;同样的道理,《教科书第二册(上)》第48页的第11题中的“系数 A,B,C 满足什么关系时”也应作同样改动.

3 应区分“交点”与“公共点”

在初中学习圆时,就有这样的定义:

当直线与圆没有公共点时,称直线与圆相离;当直线与圆有唯一公共点时,称直线与圆相切,此时的唯一公共点叫做切点;当直线与圆有两个公共点时,称直线与圆相交,此时的两个公共点都叫做交点.

再来看《教科书第二册(上)》第78页的叙述:

由曲线方程的定义可知,两条曲线交点的坐标应该是两个曲线方程的公共实数解,即两个曲线方程组成的方程组的实数解;反过来,方程组有几个实数解,两条曲线就有几个交点,方程组没有实数解,两条曲线就没有交点.也就是说两条曲线有交点的充要条件是它们的方程所组成的方程组有实数解.可见,求曲线的交点的问题,就是求由它们的方程所组成的方程组的实数解的问题.

显然,这里的“交点”就是“公共点”的意思,那么,是不是到了高中就不用“公共点”而只用“交点”呢?请再来看《教科书第二册(上)》第115页第11(1)题、第133页第5题及第147页第13题:

求直线 $3x+10y-25=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ 的交点坐标.(答案:$\left(3,\frac{8}{5}\right)$,此时直线与椭圆相切)

证明直线 $x-8y+96=0$ 与抛物线 $y^2=6x$ 只有一个公共点.

如果直线 $y=kx-1$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 没有公共点,求 k 的取值范围.

《教科书第二册(上)》还是在多处使用了“公共点”,并不是只用“交点”.

笔者建议把《教科书第二册(上)》第78页的叙述及第115页第11题(见上)中的“交点”均改为“公共点”,即公共点是交点和切点的统称,交点和切点是对立的.但有的直线与曲线又相交又相切,因为相交、相切都是局部概念,例如,曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=3x+2$ 在点 $(-1,-1)$ 处相切,在点 $(2,8)$ 处相交.

4 对第79～91页一些题目的思考

(1)《教科书第二册(上)》第79页第7题是“求与点 $O(0,0)$ 与 $A(c,0)$ 的距

离的平方差为常数 c 的点的轨迹方程”.建议将题中的第二个“与”字改为顿号“、”,“轨迹方程”改为“轨迹”.《教师用书第二册(上)》第50页给出的答案是“当 $c \neq 0$ 时,轨迹方程为 $x = \frac{c \pm 1}{2}$;当 $c = 0$ 时,轨迹为整个坐标平面”.笔者认为这个答案不对,正确的解法是:

设动点 $M(x,y)$,得 $|MO|^2 - |MA|^2 = c$(不应当是 $||MO|^2 - |MA|^2| = c$,参见双曲线的定义“在平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于常数(这个常数大于0且小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线”立知),即

$$(x^2 + y^2) - [(x - c)^2 + y^2] = c$$

$$2cx = c(1 + c)$$

所以,当 $c = 0$ 时所求轨迹方程为 $0x + 0y = 0$;当 $c \neq 0$ 时所求轨迹方程为 $x = \frac{c+1}{2}$.

(2)《教科书第二册(上)》第79页第8题是“两根杆分别绕着定点 A 和 B ($AB = 2a$) 在平面内转动,并且转动时两杆保持相互垂直,求杆的交点 P 的轨迹方程.(书上配的有图)”,《教师用书第二册(上)》第50页给出的答案是“以直线 AB 为 x 轴,线段 AB 的垂直平分线为 y 轴,建立坐标系,得点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = a^2$”.

笔者要指出的是:应把该题中的“两根杆”改为“足够长的两根杆”(即长度不小于 $2a$ 的两根杆),否则,轨迹是两段圆弧(而从原图来看,轨迹确实是两段圆弧).

(3)《教科书第二册(上)》第87页第1(3)题是“方程 $x^2 + y^2 + 2ax - b^2 = 0$ 表示什么图形”,《教师用书第二册(上)》第50页给出的答案是“以 $(-a,0)$ 为圆心,$\sqrt{a^2 + b^2}$ 为半径的圆”.笔者认为,正确的答案应为“当 $a = b = 0$ 时,表示点(0,0);当 a,b 不都为0时,表示以 $(-a,0)$ 为圆心,$\sqrt{a^2 + b^2}$ 为半径的圆”(因为点不是圆,虽然有时把点看成半径为0的圆).(请注意,该页第2题“求下列各圆的半径和圆心的坐标”求解时就无须分类讨论.文献[1],[2]的第5节也指出了该观点)

(4)《教科书第二册(上)》第89页第3题是“…… 求线段 PQ 中点轨迹的普通方程”,《教师用书第二册(上)》第51页给出的答案是“$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$”.而笔者认为线段的两个端点是不能重合的(见九年义务教育三年制初级中学教科书《几何・第一册》(人民教育出版社,2001年第2版)第13页的定义“直线上两个点和它们之间的部分叫做线段”),所以正确答案应当是“$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1(y \neq 0)$”.同

理,《教科书第二册(上)》第91页第10题、第105页例3、第107页第6题、第133页第6题的答案都存在这样的问题.

(5)《教科书第二册(上)》第90页第4题是"赵州桥的跨度是37.4 m,圆拱高约为7.2 m,求这座圆拱桥的拱圆的方程",《教师用书第二册(上)》第51页给出的答案是"$x^2+(y+27.88)^2=27.88^2(-7.2\leqslant y\leqslant 0)$".而笔者认为答案应当是"$x^2+(y+27.88)^2=27.88^2$",因为是求"拱圆的方程"而不是求"圆拱的方程".建议将原题中的"拱圆的方程"改为"圆拱的方程",这样给出的答案才正确,且考查的知识更多(文献[1],[2]的第2节也指出了该观点).

(6)《教科书第二册(上)》第90～91页第9(3)题是"把参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\\y=\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$ (t是参数)化成普通方程",《教师用书第二册(上)》第52页给出的答案是"$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$".笔者认为该题的详细解答如下:

由t的取值范围是$\{t\mid t\neq 0,且\ t\in\mathbf{R}\}$,可得$t+\dfrac{1}{t}$的取值范围是$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,$t-\dfrac{1}{t}$的取值范围是$\mathbf{R}$.从而得以下各种情形:

① 当$a=b=0$时,普通方程为$x^2+y^2=0$;

② 当$a=0,b\neq 0$时,普通方程为$x=0(y\in\mathbf{R})$;

③ 当$a\neq 0,b=0$时,普通方程为$y=0(x\leqslant -|a|$,或$x\geqslant |a|)$;

④ 当$ab\neq 0$时,普通方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

建议将原题添上条件"$ab\neq 0$".

(7)《教科书第二册(上)》第98页第19题是"点$M(x,y)$到两个定点M_1,M_2距离的比是一个正数m,求点M的轨迹方程.……",《教师用书第二册(上)》第54～55页给出的答案是"以点M_1,M_2所在的直线为x轴,……建立直角坐标系,则点M_1,M_2的坐标分别为$(-a,0)$和$(a,0)(a>0)$.设点M的坐标为(x,y).……".笔者认为,题目中有点M的坐标(x,y),说明题目中已建立了直角坐标系,但又看不出这个坐标系是怎么建的,以至于解题时又要重新建系,所以建议把题目中的"$M(x,y)$"改为"M".(文献[3]也有类似的观点)

(8)《教科书第二册(上)》第112页例5的解答中的"$x=ON=|OA|\cos\varphi$,$y=NM=|OB|\sin\varphi$"应改为"$x=\overrightarrow{ON}=|OA|\cos\varphi,y=\overrightarrow{NM}=|OB|\sin\varphi$(有向线段$\overrightarrow{ON},\overrightarrow{NM}$与坐标轴的正向相同时表示正数,与坐标轴的正向相反时表示负数,为一个点时表示零)",书上的写法只适合点$A(x,y)$在

第一象限或在坐标轴的正方向上的情形.

(9)《教科书第二册(上)》第113页第1题"说出椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$的焦点和顶点的坐标"中的"$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$"应改为"$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$",因为《教师用书第二册(上)》第72页就是按此给出答案的,否则,就要分$|a|>|b|>0$,$|b|>|a|>0$两种情形来解答.

5 对三种圆锥曲线的定义及其标准方程推导的思考

(1)《教科书第二册(上)》第116页正文开头写到:"我们已经知道,与两定点的距离的和为常数的点的轨迹是椭圆",此话不严谨.由椭圆的定义,可得以下完整的结论[4]:

结论1 在平面内到两个定点F_1,F_2(不重合,下同)的距离的和等于常数$2a(a\geqslant 0)$的点的轨迹分别是:

① 当$2a>|F_1F_2|$时,轨迹为以F_1,F_2为焦点且长轴长为$2a$的椭圆;

② 当$2a=|F_1F_2|$时,轨迹为线段F_1F_2;

③ 当$0\leqslant 2a<|F_1F_2|$时,轨迹不存在.

所以应把《教科书第二册(上)》第116页正文开头的那句话改为"我们已经知道,与两定点的距离的和为常数(这个常数大于两定点的距离)的点的轨迹是椭圆".

(2)《教科书第二册(上)》第116～117页给出了

双曲线定义 我们把平面内与两个定点F_1,F_2的距离的差的绝对值等于常数(小于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线.这两个定点叫做双曲线的焦点,两焦点的距离叫做双曲线的焦距.

此定义不严谨,应把"(小于$|F_1F_2|$)"改为"(大于0且小于$|F_1F_2|$)".深入挖掘该定义,得

结论2 在平面内与两个定点F_1,F_2的距离的差的绝对值等于常数$2a$($a\geqslant 0$)的点的轨迹分别是:

① 当$2a>|F_1F_2|$时,轨迹不存在;

② 当$2a=|F_1F_2|$时,轨迹为直线F_1F_2上去掉线段F_1F_2的内点后剩下的两条射线;

③ 当$0<2a<|F_1F_2|$时,轨迹为以F_1,F_2为焦点且实轴长为$2a$的双曲线;

④ 当$2a=0$时,轨迹为线段F_1F_2的中垂线.

(3)《教科书第二册(上)》第111～112页例4及第125～126页例3的结论

就是通常所说的椭圆、双曲线的第二定义,《教科书第二册(上)》第128页还给出了

抛物线定义 平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线.点 F 叫做抛物线的焦点,直线 l 叫做抛物线的准线.

此定义也有误,应把"定直线 l"改为"定直线 $l(F\notin l)$".当 $F\in l$ 时,轨迹是直线的过点 F 的垂线.

《教科书第二册(上)》第132页练习第2题是"填空:动点 M 与定点 F 的距离和它到定直线的距离的比等于 e,则当 $0<e<1$ 时,动点 M 的轨迹是________;当 $e=1$ 时,动点 M 的轨迹是________;当 $e>1$ 时,动点 M 的轨迹是________."

《教师用书第二册(上)》第76页给出的答案是"椭圆,抛物线,双曲线",该题的结论就是通常所说的

三种圆锥曲线的统一定义 与一个定点(焦点)的距离和一条定直线(准线)的距离的比等于常数 e 的点的轨迹,当 $0<e<1$ 时是椭圆;$e>1$ 是双曲线;$e=1$ 是抛物线.(见高级中学课本《平面解析几何(全一册必修)》(1990年人民教育出版社))

此定义也有误,应把"定直线"改为"不过该点的定直线".

深入挖掘该统一定义,又得

结论3 在平面内到定点 F 的距离是到定直线的距离 $e(e\geqslant 0$ 倍的点的轨迹分别是:

①当 $F\notin l$ 时:

又 $e>1$ 时,轨迹为以 F,l 为一对焦点,准线且离心率为 e 的双曲线;

又 $e=1$ 时,轨迹为以 F 为焦点,l 为准线的抛物线;

又 $0<e<1$ 时,轨迹为以 F,l 为一对焦点,准线且离心率为 e 的椭圆;

又 $e=0$ 时,轨迹为点 F.

②当 $F\in l$ 时:

又 $e>1$ 时,轨迹为过点 F 且与 l 的夹角为 $\arcsin\frac{1}{e}$ 的两条相交直线;

又 $e=1$ 时,轨迹为过点 F 且垂直于 l 的直线;

又 $0<e<1$ 时,轨迹不存在;

又 $e=0$ 时,轨迹为点 F.

所以,建议《教科书第二册(上)》第132页练习第2题中添上条件"定点 F 不在定直线上".

《教科书第二册(上)》第125～126页例3的后面所写的"由例3可知,当点

M 到一个定点的距离和它到一条定直线距离的比是常数 $e=\frac{c}{a}(e>1)$ 时，这个点的轨迹是双曲线．定点是双曲线的焦点，定直线叫做双曲线的准线，常数 e 是双曲线的离心率"这段话也有误．不过，教科书第 111 ~ 112 页例 4 的后面所写的"由例 4 可知，当点 M 与一个定点的距离和它到一条定直线距离的比是常数 $e=\frac{c}{a}(0<e<1)$ 时，这个点的轨迹是椭圆．定点是椭圆的焦点，定直线叫做椭圆的准线，常数 e 是椭圆的离心率"这段话无误．

文献[5]的例 3 也作了挖掘圆锥曲线定义的研究，但文献[5]也犯了本文已指出的错误：文献[5]第 39 页右栏第二段中"当 $e>1$ 或 $0<e<1$ 时定点 F 不在定直线 l 上"有误，因为 $e>1$ 时有 $F\in l$ 的可能；文献[5]第 39 页右栏"(3) 满足条件 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\frac{2|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的点 (x,y) 的轨迹是以点 $F(x_0,y_0)$ 为焦点，直线 $l:ax+by+c=0$ 为准线的双曲线"也不对，应分 $F\in l$ 和 $F\notin l$ 两种情形讨论．本文指出的这种错误，在广大高中师生中很普遍，且具有一定的代表性和隐蔽性，请广大读者阅读本文后能引起重视．

(4) 教科书第 106 页习题第 1 题是：

化简下列方程，使结果不含根式．

①$x+y+\sqrt{xy}=6$;

②$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$.

《教师用书第二册(上)》第 72 页给出的答案是(没有解答过程)：

①$x^2+y^2+xy-12x-12y+36=0$;

②$y^2-16x+64=0$.

这两个答案均不对：$(x,y)=(6,6)$ 适合 ① 的答案 $x^2+y^2+xy-12x-12y+36=0$ 却不适合 ① 的条件 $x+y+\sqrt{xy}=6$；$(x,y)=(13,\pm 12)$ 适合 ② 的答案 $y^2-16x+64=0$ 却不适合 ② 的条件 $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$．完整的解答应当是：

① 即　$\sqrt{xy}=6-x-y,(\sqrt{xy})^2=(6-x-y)^2(x+y\leqslant 6)$

$$x^2+y^2+xy-12x-12y+36=0(x+y\leqslant 6)$$

② 即　$\sqrt{x+y}=4-\sqrt{x-y}(x\pm y\geqslant 0,x-y\leqslant 16)$

两边平方，可得

$$4\sqrt{x-y}=8-y(x\pm y\geqslant 0,x-y\leqslant 16,y\leqslant 8)$$

再平方，得

$$y^2=16(x-4)(x\pm y\geqslant 0,x-y\leqslant 16,y\leqslant 8) \qquad ①$$

$$y=\pm 4\sqrt{x-4}(x\geqslant 4,x\pm y\geqslant 0,x-y\leqslant 16,y\leqslant 8) \qquad ②$$

在式②中,当 $x \geqslant 4$ 时

$$x \pm y \geqslant 0 \Leftrightarrow x \pm 4\sqrt{x-4} \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x-4} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$x \geqslant 4\sqrt{x-4} \Leftrightarrow (x-8)^2 \geqslant 0$$

$$x - y \leqslant 16 \Leftrightarrow x \mp 4\sqrt{x-4} \leqslant 16 \Leftrightarrow x + 4\sqrt{x-4} \leqslant 16 \Leftrightarrow$$
$$4\sqrt{x-4} \leqslant 16 - x(x \leqslant 16) \Leftrightarrow$$
$$(4\sqrt{x-4})^2 \leqslant (16-x)^2(4 \leqslant x \leqslant 16) \Leftrightarrow 4 \leqslant x \leqslant 8$$

$$y \leqslant 8 \Leftrightarrow \pm 4\sqrt{x-4} \leqslant 8 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} \leqslant 2 \Leftrightarrow 4 \leqslant x \leqslant 8$$

所以式①即 $y^2 = 16x - 64(4 \leqslant x \leqslant 8)$,这就是所求的答案.

以上解答过程说明,化简曲线的方程时一定要注意等价性,比如,将一个式子两边平方后得到的式子很可能与原来的式子不等价.笔者认为,《教科书第二册(上)》在推导椭圆和双曲线的标准方程时也有这样不严密的情形.

先来看《教科书第二册(上)》对椭圆的标准方程的推导过程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a(a > c > 0) \qquad ③$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad ④$$

两边平方,可得

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad ⑤$$

再平方,得

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \qquad ⑥$$

…

因为有两次平方,所以还要说明③⑥两式等价.而《教科书第二册(上)》没作任何说明,下面用两种方法来说明(只需说明⑥⇒③,先由⑥得 $-a \leqslant x \leqslant a, y^2 \leqslant a^2 - c^2$).

方法1 可得 $(x-c)^2 + y^2 \leqslant (a+c)^2 + a^2 - c^2 = 2a^2 + 2ac < 4a^2$

$$2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} > 0$$

所以③⇔④⇔⑤.

可得 $a^2 - cx \geqslant 0$,所以⑤⇔⑥.

方法2 下证⑥⇒③.

$$y^2 = a^2 - c^2 - \frac{a^2-c^2}{a^2}x^2$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \left(a + \frac{c}{a}x\right) + \left|a - \frac{c}{a}x\right| = 2a$$

再来看《教科书第二册(上)》对双曲线的标准方程的推导过程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a(c > a > 0) \qquad ⑦$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad ⑧$$

两边平方,可得

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad ⑨$$

再平方,得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \quad ⑩$$

…

因为也有两次平方,所以也要说明 ⑦⑩ 两式等价.而《教科书第二册(上)》也没作任何说明,下面也用两种方法来说明(只需说明 ⑩⇒⑦,先由 ⑦ 得 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$, $y\in\mathbf{R}$).

方法 1 当 $x\leqslant -a$ 时,由 ⑦ 得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2a$$

因为此时可证 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2a\geqslant|x-c|-2a\geqslant(a+c)-2a>0$,所以上式两边平方后是等价的,得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

因为此时易证 $a^2-cx\geqslant 0$,所以该式两边平方后也是等价的,得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)(x\leqslant -a) \quad ⑪$$

当 $x\geqslant a$ 时,由 ⑦ 得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a$$

上式两边平方后是等价的,得

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

因为此时易证 $cx-a^2\geqslant 0$,所以该式两边平方后也是等价的,得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)(x\geqslant a) \quad ⑫$$

由 ⑪,⑫,得 ⑦⇔⑩

方法 2 下证 ⑥⇒③: $y^2=\dfrac{c^2-a^2}{a^2}x^2-c^2+a^2$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|-\left|a-\frac{c}{a}x\right|=$$

$$\begin{cases}\left(-a-\dfrac{c}{a}x\right)-\left(a-\dfrac{c}{a}x\right)=-2a & (x\leqslant -a)\\ \left(a+\dfrac{c}{a}x\right)-\left(-a+\dfrac{c}{a}x\right)=2a & (x\leqslant -a)\end{cases}$$

读者若不信以上检验的重要，我们再来做一道题：方程$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1$所表示的曲线是什么？

解　将原方程变形为

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

平方，得

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=1-4x$$

再平方，得

$$12x^2-4y^2=3$$

即

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$$

所以原方程表示的曲线应该是双曲线.

而由以上结论1③知原方程不表示任何曲线，即不存在实数x,y满足原方程.

(5) 用椭圆与双曲线的标准方程的统一形式$\alpha x^2+\beta y^2=1$解题.

焦点在x轴、y轴上椭圆的标准方程分别是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

焦点在x轴、y轴上双曲线的标准方程分别是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0),\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$$

所以，椭圆与双曲线的标准方程有统一的形式

$$\alpha x^2+\beta y^2=1$$

用此统一形式解题有时将很方便，下面看《教科书第二册(上)》上的三道题目：

第118页的例2是“已知双曲线的焦点在y轴上，并且双曲线上两点P_1,P_2的坐标分别为$(3,-4\sqrt{2}),\left(\frac{9}{4},5\right)$，求双曲线的标准方程”.

解　可设所求双曲线的标准方程为$\alpha x^2+\beta y^2=1(\alpha<0<\beta)$，因为点$P_1(3,-4\sqrt{2}),P_2\left(\frac{9}{4},5\right)$在此双曲线上，所以得方程组

$$\begin{cases}9\alpha+32\beta=1\\ \frac{81}{16}\alpha+25\beta=1\end{cases}$$

解得

$$\alpha=-\frac{1}{9},\beta=\frac{1}{16}$$

所以所求双曲线的标准方程是$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

这种解法比《教科书第二册(上)》上的换元解法要简单得多,且条件"焦点在 y 轴上"是多余的.在该题中,若要求经过点 P_1,P_2 的焦点在 x 轴上的双曲线,经过点 P_1,P_2 的焦点在 x 轴上的椭圆,经过点 P_1,P_2 的焦点在 y 轴上的椭圆,则均不存在.

第 120 页练习的第 4(3) 题是"求适合下列条件的双曲线的标准方程:焦点在 x 轴上,经过点$(-\sqrt{2},-\sqrt{3})$,$\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{2}\right)$."

解 可设所求双曲线的标准方程为 $\alpha x^2+\beta y^2=1(\alpha>0>\beta)$,从而可求得答案为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

第 120 页习题的第 3(3) 题是"求适合下列条件的双曲线的标准方程:经过点$(-7,-6\sqrt{2})$、点$(2\sqrt{7},-3)$."

解 可设所求双曲线的标准方程为 $\alpha x^2+\beta y^2=1(\alpha\beta<0)$,从而可求得答案为$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$.

注 若不用这种方法求解,还要分两种情形设出双曲线的标准方程用待定系数法求解.

定理 1 若两点 $P'_i(|x_i|,|y_i|)(i=1,2)$ 与坐标原点 O 不共线(即 $x_1^2y_2^2\neq x_2^2y_1^2$),则经过两点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2)$ 的椭圆或双曲线的标准方程是

$$\frac{y_2^2-y_1^2}{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2}x^2+\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2}y^2=1$$

(6)《教科书第二册(上)》第 119 页的例 3 是:

一炮弹在某处爆炸,在 A 处听到爆炸声的时间比在 B 处晚 2 s.

① 爆炸点应在什么样的曲线上?

② 已知 A,B 两地相距 800 m,并且此时声速为 340 m/s,求曲线的方程.

解 ① 由声速及 A,B 两处听到爆炸声的时间差,可知 A,B 两处与爆炸点的距离的差,因此爆炸点应位于 A,B 为焦点的双曲线上.

因为爆炸点离 A 处比离 B 处更远,所以爆炸点应在靠近 B 处的一支上.

② 这里略去.

由以上结论 2 知,以上第 ① 问的解答有误,建议将第 ① 问改为"若此时声音每秒传播的距离小于$\frac{1}{2}|AB|$,则爆炸点应在什么样的曲线上?",则以上解答就完整无误了.

(7)《教科书第二册(上)》第 124 ~ 125 页例 2 的解法可大大简化.

原解法是解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{25^2}{12^2}-\dfrac{(y-55)^2}{b^2}=1\\ \dfrac{13^2}{12^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$$

先得
$$y=\frac{5b}{12}(负值舍去)$$

再得
$$\frac{25^2}{12^2}-\frac{\left(\frac{5b}{12}-55\right)^2}{b^2}=1$$

$$19b^2+275b-18\,150=0$$

$$b\approx 25(\mathrm{m})$$

所以所求双曲线方程为

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{625}=1$$

下面给出以上方程组的一个简便解法.

原方程组即

$$\begin{cases}\dfrac{25^2}{12^2}-1=\dfrac{(y-55)^2}{b^2}(y<55)\\ \dfrac{13^2}{12^2}-1=\dfrac{y^2}{b^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=55-\dfrac{\sqrt{481}}{12}b\\ y=\dfrac{5}{12}b\end{cases}$$

所以
$$55-\frac{\sqrt{481}}{12}b=\frac{5}{12}b,\ b=\frac{55}{38}(\sqrt{481}-5)\approx 25$$

这种解法不需解一元二次方程,只需解一元一次方程,当然简便得多.

(8)《教科书第二册(上)》第137页的最后一题是"过抛物线焦点的一条直线与它交于两点 P,Q,经过点 P 和抛物线顶点的直线交准线于点 M,求证:直线 MQ 平行于抛物线的对称轴."

《教师用书第二册(上)》第79页给出的解答很复杂且不严密(没有注意过抛物线焦点的一条直线的斜率不存在的情形),下面给出一种简单解法.

证明 运用《教科书第二册(上)》第133页第7题是"过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点的一条直线和此抛物线相交,两个交点的纵坐标为 y_1,y_2,求证:$y_1y_2=-p^2$".(《教师用书第二册(上)》第77～78页在证明该题时也没有注意过抛物线焦点的一条直线的斜率不存在的情形)可给出本题的简证:

设抛物线的方程为 $y^2=2px$，由以上结论还可设 $P(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$，$Q\left(x_2,-\frac{p^2}{y_1}\right)$.

容易求得直线 PO（O 是抛物线的顶点也即坐标原点）：$y=\frac{2p}{y_1}x$ 与准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的交点 M 的纵坐标是 $-\frac{p^2}{y_1}$，与点 Q 的纵坐标相等，所以要证结论成立.

(9)《教科书第二册(上)》复习参考题八 B 组的第 5 题是"两定点的坐标分别为 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，动点 M 满足条件 $\angle MBA=2\angle MAB$，求动点 M 的轨迹方程."

《教师用书第二册(上)》第 83 页给出的答案是"$3x^2-y^2=3(x>0)$".实际上，其解答过程不严谨，且答案也不完整.正确的解答应当是：

解 设 $M(x,y)$，有 $0\leqslant\angle MBA<\pi$，$0\leqslant\angle MAB<\frac{\pi}{2}$.

(1) 当 $\angle MBA=2\angle MAB=0$ 时，点 M 是线段 AB 的内点，此时点 M 的轨迹方程是 $y=0(-1<x<2)$.

(2) 当 $\angle MAB=\frac{\pi}{4}$ 时，$\angle MBA=\frac{\pi}{2}$，易得点 M 的坐标是$(2,\pm 3)$.

(3) 当 $0<\angle MAB<\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}<\angle MAB<\frac{\pi}{2}$ 时

$$\tan\angle MBA=-\frac{y}{x-2},\tan\angle MAB=\frac{y}{x+1}$$

得

$$x\neq-1,2,y\neq0$$

又

$$\tan\angle MBA=\tan 2\angle MAB$$

得

$$-\frac{y}{x-2}=\frac{\frac{2y}{x+1}}{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}$$

$$3x^2-y^2=3$$

再由 $\angle MBA=2\angle MAB>0$，可得 $|MA|>|MB|$，所以上式中的 x 还应满足 $x>\frac{-1+2}{2}$ 即 $x>1$，所以此时点 M 的轨迹方程为

$$3x^2-y^2=3(x>1\text{ 且 }x\neq2)$$

综上所述，可得所求动点 M 的轨迹方程是

$$3x^2-y^2=3(x>1),y=0(-1<x<2)$$

由此题的结论知，双曲线 $3x^2-y^2=3$ 右支上的点 M 满足 $\angle MF_2A_1=2\angle MA_1F_2$，其中 A_1，F_2 分别是该双曲线的左顶点和右焦点.

一般的双曲线是否也有此种性质呢?

猜想 1 若 A_1,F_2,M 分别是某双曲线的左顶点,右焦点和右支上的动点,则存在常数 λ 使得 $\angle MF_2A_1=\lambda\angle MA_1F_2$ 恒成立.

分析 可设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+,c=\sqrt{a^2+b^2})$,得左顶点 $A_1(-a,0)$,右焦点 $F_2(c,0)$.

若猜想 1 成立,则当 $MF_2\perp A_1F_2$ 时,得

$$\angle MF_2A_1=\lambda\angle MA_1F_2$$

即

$$\frac{\pi}{2}=\lambda\arctan\left(\frac{c}{a}-1\right),\lambda=\frac{\pi}{2\arctan\left(\frac{c}{a}-1\right)}$$

所以,猜想 1 等价于

猜想 1′ 若 A_1,F_2,M 分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\in\mathbf{R}^+,c=\sqrt{a^2+b^2})$的左顶点,右焦点和动点,则$\angle MF_2A_1=\frac{\pi}{2\arctan(\frac{c}{a}-1)}\angle MA_1F_2$恒成立.

可以证明当 $c=2a$(即 $b=\sqrt{3}a$ 也即$\lambda=2$)时猜想 1′ 成立.

定理 2 若 A_1,F_2,M 分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$的左顶点,右焦点和右支上的动点,则 $\angle MF_2A_1=2\angle MA_1F_2$ 恒成立.

证明 不妨设 $M(x_0,y_0)(x_0>a>0,y_0>0)$,当 $x_0=c=2a$ 即 $MF_2\perp A_1F_2$ 时,上面已证得猜想 1′ 成立.

当 $x_0\neq 2a$ 时,得

$$\tan\angle MF_2A_1=-\frac{y_0}{x_0-2a},\tan\angle MA_1F_2=\frac{y_0}{x_0+a}$$

$$\tan 2\angle MA_1F_2=\frac{\frac{2y_0}{x_0+a}}{1-\left(\frac{y_0}{x_0+a}\right)^2}=\frac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2-{y_0}^2}=$$

$$\frac{2y_0(x_0+a)}{(x_0+a)^2+3a^2-3x_0^2}=\frac{y_0}{2a-x_0}=\tan\angle MF_2A$$

又由 $\triangle MF_2A_1$ 得

$$\angle MF_2A_1=2\angle MA_1F_2$$

综上所述,定理 2 成立.

还可以证明当 $c=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)a$（即 $b=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}+1}{3}}a$ 也即 $\lambda=3$）时猜想 1′ 不成立. 事实上，此时可在猜想 1′ 中选 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2\sqrt{3}+1}$，$c=\sqrt{3}+1$，$F_2(\sqrt{3}+1,0)$，$A_1(-\sqrt{3},0)$，$M(\sqrt{6},\sqrt{2\sqrt{3}+1})$，得

$$\tan\angle MF_2A_1=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1-\sqrt{6}}=7.477\,470\cdots,\tan\angle MA_1F_2=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

$$\tan 3\angle MA_1F_2=\frac{3\tan\angle MA_1F-\tan^3\angle MA_1F}{1-3\tan^2\angle MA_1F}=5,924\,585\cdots$$

说明此时 $\angle MF_2A_1=3\angle MA_1F_2$ 不成立.

猜想 2 当且仅当 $\lambda=2$ 时猜想 1 成立.

参考文献

[1] 方精忠. 对高二数学新教材及教师用书的几点质疑[J]. 数学通讯，2002(11)：23-24.

[2] 方精忠. 对人教版高二数学新教材及教师教学用书的几点质疑[J]. 中学数学教学，2002(2)：17-18.

[3] 余永安. 新教材高中数学第二册几个值得商讨的问题[J]. 数学通讯，2003(7)：26.

[4] 甘志国. 深入挖掘圆锥曲线的定义[J]. 中学数学杂志(高中)，2007(6)：29-30.

[5] 李爱清，刘继红. 加强题组教学提高学生能力[J]. 数学通报，2007(7)：17-18.

对人教版教科书(必修)《数学·第二册(下A)、(下B)》的若干思考

笔者在使用全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第二册(下A)》、《数学·第二册(下B)》(2006年人民教育出版社)(下分别简称《教科书第二册下A》、《教科书第二册下B》)进行教学时,仔细研读了这两本书,并提出了若干思考,现在大胆写出来请各位读者审阅,不当之处,敬请批评指正.

1 一些语句上的改动

(1)《教科书第二册下A》第6页第一行"过A,B,C三点的平面又可记作'平面ABC'"应改为"过不共线的三点A,B,C的平面又可记作'平面ABC'".《教科书第二册下B》第5页最后一行写的就是"过不共线三点A,B,C的平面通常记作平面ABC",若A,B,C共线,则过这三点的平面是不确定的.

(2)《教科书第二册下A》第13页及《教科书第二册下B》第15页给出的异面直线所成的角的定义中的两直线平行均应还包括两直线重合的情形.实际上,《教科书第二册下A》第11页的定理(及第12页的推论)即《教科书第二册下B》第13页的定理、《教科书第二册下A》第50~51页即《教科书第二册下B》第8~10页中介绍的"斜二测画法"中的"已知图形中平行于x轴或y轴的线段,在直观图中分别画成平行于x'轴或y'轴……"中的两直线平行均应还包括两直线重合的情形.

(3)《教科书第二册下A》第20页的例2(1)中"要经过面$A'C'$内的一点P和棱BC将木料锯开"应改为"要经过面$A'C'$内的一点P和棱BC沿平面将木料锯开".

(4)《教科书第二册下A》第31页第六行末应添个"则"字,该页例3即《教科书第二册下B》第26页例4中的"P"建议改为"D".

(5)《教科书第二册下A》第35页第一行"两个平面的位置关系只有两种"中的"只有"应当改为"有且只有",第18页写的就是"一条直线和一个平面的位置关系有且只有以下三种".

(6)《教科书第二册下A》第40页的脚注即《教科书第二册下B》第50页的脚注"当二面角的两个面重合时,规定二面角的大小为0°;当二面角的两个面合

成一个平面时,规定二面角的大小为 180°”中的“规定”均应去掉,因为它们均可由二面角的平面角的定义推得.

(7)《教科书第二册下 A》第 42 页中“两个平面互相垂直”的定义应改述为“一般的,两个平面相交时,如果它们所成的四个二面角中有一个是直二面角,就说这两个平面互相垂直”.第 43 页图 9－56 即《教科书第二册下 B》第 50 页图 9－70 中的“β”应标在平面 β 的右方,因为这样才与证明中的“二面角 $\alpha-CD-\beta$”(半平面 β)相吻合;同样的道理,该页图 9－58 中的 α 也应放在平面 α 的右方;第 44 页图 9－57 中的直线 a 应画在平面 α 内(即不超过表示平面 α 的平行四边形的边界).另外,《教科书第二册下 B》第 42 页“设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in\mathbf{R})$”是不对的,应改为“设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in\mathbf{R})$”.

(8)《教科书第二册下 A》第 45 页第 4 题中还应添上条件“V 形面的两个面是全等的矩形”,否则无法解答;第 46 页第 6 题题意不清,理由可见文献[1]第 18 页的论述.

(9)《教科书第二册下 A》第 54 页的定理即《教科书第二册下 B》第 65～66 页的定理“如果棱锥被平行于底面的平面所截,那么截面和底面相似,并且它们面积的比等于截得的棱锥的高与已知棱锥的高的平方比”建议改述为“如果棱锥被平行于底面的平面所截,那么截面和底面相似,并且它们的相似比等于截得的棱锥的高与已知棱锥的高的比”,因为前者是由后者推出的且两者是等价的.

(10)《教科书第二册下 A》第 55 页正棱锥的性质中“(1)各侧棱相等……(2)棱锥的高……”建议改为“(1)正棱锥各侧棱相等……(2)正棱锥的高……”,《教科书第二册下 B》第 67 页就是这样叙述的.

(11)《教科书第二册下 A》第 70 页第二段中的“半圆以它的直径为旋转轴”建议改为“半圆以它的一条直径所在的直线为旋转轴”,第三段末“所有点的集合”建议改为“点的集合”(因为集合就暗含了“所有”,《教科书第二册下 B》第 78 页第二行就是这样叙述的);该页倒数第二段末“被不经过球心的截面截得的圆叫做小圆”中的“截面”应改为“平面”,因为在这里先有平面,再有截面(《教科书第二册下 B》第 78 页倒数第三段末就是这样叙述的);第 71 页(《教科书第二册下 B》第 78 页)“两点的球面距离”的定义中漏掉了“半圆”的情形(因为半圆既不是优弧也不是劣弧),应把其中的“劣弧”改为“劣弧(或半圆)”;第 74 页第三行(《教科书第二册下 B》第 81 页倒数第八行末的)“$2x\approx4.5(\mathrm{cm})$”应改为“$2x\approx4.5$”,因为由解题过程的开头“设空心钢球的内径为 $2x$ cm”知这里

的 $2x$ 是一个数,没有单位.

(12)《教科书第二册下 A》第 99 页即《教科书第二册下 B》第 103 页的例 3(2) 是"有 5 种不同的书,要买 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有多少种不同的送法?(答案是 $5\times5\times5=125$)",笔者认为该小题中应添上条件"每种书至少 3 本"(否则原答案不对).

(13)《教科书第二册下 A》第 108 ~ 109 页即《教科书第二册下 B》第 112 页的例 4 中应添上条件"7 个白球可以互相区别"(否则原答案不对),而《教科书第二册下 A》第 147 页即《教科书第二册下 B》第 146 页的概率问题中可不必添上这样的条件,《教科书第二册下 A》第 161 页即《教科书第二册下 B》第 165 页第 4 题也不必添上这样的条件.

(14)《教科书第二册下 A》第 115 页最后一行即《教科书第二册下 B》第 120 页第一行"这个公式所表示的定理叫做二项式定理,……" 中的"所表示的定理" 应当去掉,因为公式也是定理.

(15)《教科书第二册下 A》第 133 页即《教科书第二册下 B》第 137 页概率的定义中的"在它附近摆动" 应去掉,因为在求必然事件、不可能事件的概率时不会出现摆动的情形,建议把"事件 A" 改为"若事件 A".

(16)《教科书第二册下 A》第 154 页即《教科书第二册下 B》第 158 页第 5 题中的"假定每个元件能使用 3 000 小时的概率是 0.99" 应改为"…… 都是 0.99"

2 用平面几何中的平行公理证明立体几何中的公理 4

关于《教科书第二册下 A》及《教科书第二册下 B》中的公理 1 - 4、推论 1 - 3,文献[2] 提出了商榷及解决方案,读者可研读该文献.

下面将用平面几何中的平行公理证明立体几何中的公理 4[3].

公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

已知:$a \parallel c, b \parallel c$.求证:$a \parallel b$.

证明 当 a,b,c 共面时,由平面几何中的平行公理(过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行) 立得欲证.下面再证 a,b,c 不共面的情形.

如图 1,可选点 $A \in b, A \notin a$,设 a, A 确定的平面为α,b,c 确定的平面为 β(β 也可由 A,c 确定).

因为 a,b,c 不共面,所以 $a \not\subset \beta$,而 $a \subset \alpha$,得 α,β 不重合,可设 $\alpha \cap \beta = AA'$.

因为 $c \parallel a, a \subset \alpha, c \not\subset \alpha$,所以 $c \parallel \alpha$(线面平行的判定),所以过 c 的平面 β 与 α 的交线 $AA' \parallel c$(线面平行的性质).

又 $b \parallel c$,得在 β 内过点 A 有两条直线 AA', b 均与 c 平行,所以 AA', b 重合

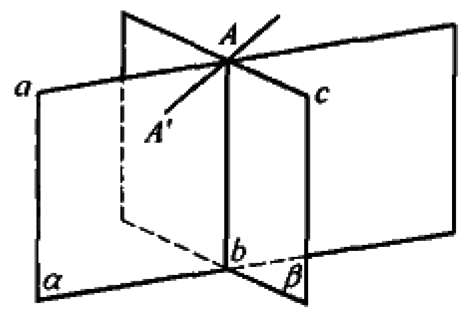


图 1

(平行公理),得 $\alpha \cap \beta = b$.

因为 $a \parallel c, c \subset \beta, a \not\subset \beta$,所以 $a \parallel \beta$,所以过 A 的平面 α 与 β 的交线 $b \parallel a$,即 $a \parallel b$.此时要证结论也成立.

虽然以上证明用到了直线和平面平行的判定定理及性质定理(见《教科书第二册下 A》第 19 ~ 20 页、《教科书第二册下 B》第 17 ~ 18 页),且《教科书第二册下 A》把直线和平面平行的判定定理、性质定理安排在公理 4 之后,由于后者的证明均没有用到公理 4,所以以上证明没有犯"循环论证"的错误.

3 何谓点到射线的距离?[4]

《教科书第二册下 A》第 31 页例 3、第 34 页第 11 题(也即《教科书第二册下 B》第 26 页例 4、第 28 页第 6 题)的结论是否正确均取决于"如何定义点到射线的距离"(从初中到高中的各种数学教科书中均未定义):一种理解是,点到射线的距离就是点到射线所在直线的距离,比如平面几何中的角平分线判定定理 —— 到一个角两边距离相等的点在这个角的平分线上;另一种是按《教科书第二册下 A》第 79 页的叙述"两条异面直线的距离、直线和平面的距离以及两个平面的距离,都是通过点与点的距离来定义的.它们实际上反映的都是两个点的集合(这两点各属于一个点集)间的距离"来理解点到射线的距离.很多文献(比如[4],[5],[6])都倾向于后一种理解,但这样的话,以上四道题的结论将变得很复杂(详见[4],[5],[6]).

4 已经试验过的事件不是随机事件[4]

应注意,已经试验过的事件不是随机事件,所以《教科书第二册下 A》(《教科书第二册下 B》)第 132 页(第 136 页)中的"5 月 1 日"及第 134 页(第 138 页)例 1(1)、(4)中的"1 月 1 日"、"某天"均应改为"将来的某一天".

另外,文献[8]对《教科书第二册下 B》也提出了一些很好的修改意见,读者可以研读.

参考文献

[1] 向显元,张裕仁.从一到高考题谈对高中数学教材的一点看法[J].中学数学,2004(7):17-18.

[2] 贺德光,刘玉华.立体几何中"有关公理问题"的商榷[J].数学通讯,2004(1):14-15.

[3] 甘志国.初等数学研究(Ⅰ)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008:506.

[4] 甘志国.何谓点到射线的距离?[M]// 中学数学教学实践与研究.西安:陕西人民教育出版社,2005:155.

[5] 李扬.对一道课本例题的质疑[J].中学数学教学,2002(6):17.

[6] 吴国林,孟祥礼.对新教科书一道立几习题及答案的商榷[J].中学数学杂志(高中),2004(4):17-18.

[7] 甘志国.已经试验过的事件不是随机事件[J].中学数学杂志(高中),2004(4):60-61.

[8] 方精忠.人教版高中数学新教材第二册(下B)第九章《空间直线、平面、简单多面体》教学体会[J].中学数学研究,2002(9):17-19.

对人教版教科书《数学·第三册(选修II)》的若干思考

笔者在使用全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修II)》(2006年人民教育出版社)(下简称《教科书第三册选修II》)进行教学时,仔细研读了这本书,并提出了若干思考,现在大胆写出来请各位读者审阅,不当之处,敬请批评指正.

1 建议《教科书第三册选修II》各章的顺序作调整

因为《教科书第三册选修II》的"第一章 概率与统计"中的"期望"涉及无穷级数的和,"正态分布的概率"涉及无穷区域的面积,"总体密度曲线"涉及极限的思想,所以建议该书的各章按复数、简易微积分(包括极限和导数)、统计的顺序编排.该书的编者把"概率与统计"放在第一章的理由可能是高二下学期教科书最后一章是"概率",但这里介绍的知识与原概率知识联系不大.

2 《教科书第三册选修II》中一些语句上的改动

(1) 建议第6页第七行及该页第二个表中的"x_i"均改为"x_n",这样才与第11页的两个表一致.

(2) 第7页的表后第三行"中的第 $k+1$ 项(这里 k 可取 $0,1,\cdots,n$)中的各个值"中的"中的各个值"应去掉.

(3) 第9页第4题是"抛掷5枚硬币,求出得到正面向上的次数 ξ 的分布列",中的"次数"应改为"枚数";第15页第5题也应作同样改动.

(4) 第12页第二个表中的"0.092"建议改为"0.092 1",这样表中近似数的精确度才一致.

(5) 第22页正文第一行中的"个体数较多"应改为"个体较多"或"个体数较大".

(6) 第23页正文倒数第五行中的"从总体中剔除一些个体使剩下的总体中个体个数"应改为"从总体中随机剔除一些个体使总体中剩下的个体个数".

(7) 第34页图1-4的(1)中的"$\mu=-1$"不是图象的对称轴方程,而是指图象中的参数 $\mu=-1$,建议该图象中标注的"$\mu=-1$"不能指向对称轴,而应

指向图象,用“$x = -1$”指向对称轴.图 1 - 4 的(2),(3) 也应作类似改动.

(8) 第 35 页“(1) 曲线在 x 轴的上方,与 x 轴不相交”中的“,与 x 轴不相交”应去掉,否则重复.

(9) 第 37 页正文倒数第三行中的“概率值”应改为“概率”.

(10) 第 44 页最后一段中的“自由度 7 - 2”、“$r_{0.05} = 0.632$”应分别改为“自由度 10 - 2”、“$r_{0.05} = 0.576$”;第 45 页第六行中的“0.576”应改为“0.532”.

(11) 第 86 ~ 91 页中的六种函数极限定义中的“函数 $f(x)$ 无限趋近于(一个)常数 a”应改为“函数 $f(x)$ 的值无限趋近于(一个)常数 a”.

(12) 第 113 页第 9(5) 题是“求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$”,易知此极限不存在.建议把此题改为“求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x^2-1}\right)$”,这样就与与《教科书第三册选修 II》配套使用的《教师教学用书》(2004 年人民教育出版社)(下简称《教科书第三册选修 II 教学用书》)第 56 页给出的答案“$-\frac{1}{2}$”一致了.

(13) 第 132 页第 2(3) 题《教科书第三册选修 II 教学用书》第 72 页给出的答案“$\sec^2x - 1$”应简化为“$\tan^2x$”.

(14) 第 143 页倒数第四行中“$[a,b]$ 上连续的函数”建议改为“$[a,b]$ 上的连续函数”.

(15) 第 144 ~ 145 页的例 2 及其解答中的三处“箱”建议改为“箱子”,这样才符合语言习惯.

(16) 第 157 页第 2(5) 题《教科书第三册选修 II 教学用书》第 78 页给出的答案“$-\frac{x(2\sqrt{x^2+4}+4)}{x^2(2+\sqrt{x^2+4})\sqrt{x^2+4}}$”应化简.

(17) 解答第 158 页第 10(1) 题时计算函数值很复杂(《教科书第三册选修 II 教学用书》第 79 页给出的答案是错误的),建议删去此题.

(18) 第 163 页“练习”上面的第二行“一般的,两个复数只能说相等或不相等,而不能比较大小”中的“复数”应改为“不全是实数的复数”,其理由可见文献[1].

(19) 第 171 ~ 172 页的正文中有三处“复数 Z”应改为“复数 z”,因为数一般用小写字母表示,点用大写字母表示.

3 关于系统抽样的注记

《教科书第三册选修 II》第 23 页讲述了系统抽样.

上面,由于总体中的个体数 1 000 正好能被样本容量 50 整除,可以用它们

的比值作为进行系统抽样的间隔.如果不能整除,比如总体中的个体数为 1 003,样本容量仍为50,这时可用简单随机抽样先从总体中剔除3个个体(可利用随机数表),使剩下的个体数 1 000 能被样本容量 50 整除,然后再按系统抽样的方法往下进行.因为总体中的每个个体被剔除的概率相等,也就是每个个体不被剔除的概率相等,所以在整个抽样过程中每个个体被抽取的概率仍然相等.

系统抽样的步骤可概括为:

(1) 采用随机方式将总体中的个体编号.为简便起见,有时可直接利用个体所带有的号码,如考生的准考证号、街道上的各户门牌号,等等.

(2) 为将整个的编号进行分段(即分成几个部分),要确定分段的间隔 k.当 $\frac{N}{n}$(当 N 为总体中的个体数,n 为样本容量)是整数时,$k=\frac{N}{n}$;当 $\frac{N}{n}$ 不是整数时,通过从总体中剔除一些个体使剩下的总体中个体个数 N' 能被 n 整除,这时 $k=\frac{N'}{n}$.

(3) 在第一段用简单随机抽样确定起始的个体编号 l.

(4) 按照事先确定的规则抽取样本(通常是将 l 加上间隔 k,得到第二个编号 $l+k$,再将 $(l+k)$ 加上 k,得到第三个编号 $l+2k$,这样继续下去,直到获取整个样本).

注 以上引文中有下划线的部分是笔者所加,下同.)

注记1 引文中第一处加粗部分强调了"用简单随机抽样先从总体中剔除3个个体",而引文中第三处加粗部分没有指明如何"从总体中剔除一些个体".

注记2 引文中第二处加粗部分强调了"采用随机方式将总体中的个体编号",但《教科书第三册选修 II》第 22 页的"系统抽样"例子中说"例如,为了了解参加某种知识竞赛的 1 000 名学生的成绩,打算从中抽取一个容量为 50 的样本.假定这 1 000 名学生的编号是 1,2,…,1 000",即此例中没有强调"采用随机方式将总体中的个体编号".

注记3 引文(1)中的"街道上的各户门牌号"一般是按照某种顺序(通常是按大小顺序从一端排到另一端,一边排奇数号,另一边排偶数号)编排的,显然这种编排不是"采用随机方式".

注记4 引文中第三处加粗部分后的"使剩下的总体中"应改为"使总体中剩下的".

笔者建议,对于系统抽样的步骤应作如下改动(下面两种改动均可):

改法1 将原步骤(1)中的"有时可直接利用个体所带有的号码"改为"有时可直接利用个体所带有的号码(但这些号码应是随机编排的)";步骤(2)加

粗部分中的"剔除"改为"随机剔除";步骤(3)改为"在第一段中任意指定一个个体 l 为起始个体编号".

注 因为步骤(1)中已强调了"采用随机方式",所以步骤(2),(3)中就没有必要再强调"随机"(但结果一定是随机的).步骤(2)中"剔除的个数应是最少的"才符合"系统抽样"的要求,当然"剔除更多个"的话也符合"等概率"的要求.

改法 2 将原步骤(1)中的"采用随机方式"去掉;(2)中加粗部分应改为"用简单随机抽样(比如随机数表)先从总体中剔除一些个体".

建议《教科书第三册选修 II》以改法 2 介绍系统抽样的步骤.

4 对函数极值定义的异议

《教科书第三册选修 II》第 141 页给出的函数极值的定义是:

一般的,设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义,如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) < (>) f(x_0)$,我们就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值.极大值与极小值统称为极值.

大学中的一些《数学分析》、《微积分》教材中也是这样定义极值的,比如樊映川等编的《高等数学讲义》(人民教育出版社,1964年第2版)第305页的定义.

此定义并不严谨.

若按上述定义知:

常数函数 $f(x) = c$ 是没有极值的,所以它在任何开区间上也无极值 ①

又由上述《高等数学讲义》第 311 页的叙述(以下也是显然的事实):"设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的,则它的最大值及最小值必然是存在的.我们来讨论怎样求出最大值的方法(求最小值的方法也可同样讨论).如果函数在 a 与 b 间的一点达到最大值,这个最大值显然也是极大值;但最大值也可以在区间的端点 a,b 处达到,…"可知:

在开区间上可导函数的最值一定是极值 ②

又常数函数在任何开区间上都是可导的,所以由结论①②知:

常数函数在开区间上没有最值 ③

众所周知,函数的最大(小)值就是所有函数值中最大(小)的,常数函数的最大值、最小值均存在,并且都是这个常数本身.这与③矛盾!这说明《教科书第三册选修 II》中函数极值的定义不严谨,可修正为:

一般的,设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近都有定义,如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x) \leqslant (\geqslant) f(x_0)$,我们就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大(小)值.极大值与极小值统称为极值.

注 以上“x_0 附近”是不严格的表述(限于高中生的理解只能这样表述)，严格的表述指 x_0 的一个任意小的空心邻域.《教科书第三册选修 II》中的定义对于 x_0 左侧及右侧的函数值均不是常数的情形是正确的. 实际上，罗元等主编、路见可主审《数学分析简明教程(上册)》(1988 年武汉工业大学出版社) 第 169 页，赵慈庚编《一元函数微分学》(1980 年上海科技出版社) 第 316 页及谷超豪主编《数学词典》(1992 年上海辞书出版社) 第 275 页的定义均与以上“修正”一致.

5 对最值求法的简化

《教科书第三册选修 II》第 144 页给出的求函数最值的步骤是：

“设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下：

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值；

(2) 将 $f(x)$ 的各极值与 $f(a)$,$f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.”

而求极值是比较复杂的(须列表讨论)，这就使得求最值更复杂了. 实际上，求最值比求极值要简洁得多.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，我们来求 $f(x)$ 的最值.

先求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最值. 易知函数在开区间内的最值一定是极值，所以，若 x_0 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的最值点，则 x_0 也是极值点，所以 $f'(x_0)$ 的值为 0 或不存在. 当然，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值还可能在端点 a, b 上取到(如二次函数在闭区间上的最值).

从而可得求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值的步骤：

(1) 求导数 $f'(x)$，找出使 $f'(x)$ 的值为 0 及不存在的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；

(2) 计算函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(a), f(b)$，其中最大(小) 的是最大(小) 值.

例 (《教科书第三册选修 II》第 144 页例 1) 求函数 $y = x^4 - 2x^2 + 5$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

解 $y' = 4x^3 - 4x$，令 $y' = 0$，得 $x = 0, \pm 1$.

设 $y = f(x)$，因为 $f(0) = 5$, $f(\pm 1) = 4$, $f(\pm 2) = 13$，所以当且仅当 $x = \pm 1$ 时，y 取最小值，且最小值是 4；当且仅当 $x = \pm 2$ 时，y 取最大值，且最大值是 13.

《教科书第三册选修 II》第 145 ~ 147 页例 3、例 4 的解答中求最值也是先判断是极值(书上没写过程)，这是很复杂的，而用以上简化步骤就无须判定极值，

开区间的情形对端点的函数值可用极限思想解决.比如,例3中已求得:

$$S(R)=\frac{2V}{R}+2\pi R^2(R\in(0,+\infty)$$

$$S'(R)=0\text{时},R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

又$\lim\limits_{R\to0^+}S(R)=+\infty$,$\lim\limits_{R\to+\infty^+}S(R)=+\infty$,所以$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)<+\infty$,得当且仅当$R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$时$S(R)$取到最小值.

这种用极限思想求连续函数在开区间内的最值的方法应引起重视.

6 对第155~156页例2的异议[2]

《教科书第三册选修Ⅱ》第155~156页例2的题目及其解答均有误.题目第二段中的“磁道之间的宽度必须大于m”应改为“磁道之间的宽度必须不小于m”;解答中的“即每条磁道上的比特数最多可达到$\frac{2\pi r}{n}$”也不对,因为当$\frac{2\pi r}{n}\notin$ N时就达不到$\frac{2\pi r}{n}$.把题目作上述改动后,该题的解法思路是:

因为“存储量 = 磁道数 × 每磁道的比特数”,所以应使磁道数尽可能地增加,存储区的内半径r也应尽可能地增加,所以最外面的磁道(不存储任何信息)就是磁盘的边缘(半径为R的圆).

设可存储信息的磁道数是$k(k\in\mathbf{N}^*)$,则里面的磁道半径$r=R-km$,得存储量$a_k=k\left[\frac{2\pi}{n}(R-km)\right]$(这里$[x]$表示不大于实数$x$的最大整数,$\pi$表示圆周率,$m,n,R$是已知的正数,$R>m$).

原题即求$k\in\mathbf{N}^*$且$k<\frac{R}{m}$时,$a_k=k\left[\frac{2\pi}{n}(R-km)\right]$的最大值.

此问题也是本文提出而未解决的问题.

参考文献

[1] 甘志国.复数不能比大小[J].数学通讯,2005(12):19.

[2] 甘志国.初等数学研究(Ⅰ)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008:675.

数学竞赛



一道加拿大数学竞赛题的推广

1997 年加拿大数学公共竞赛有一道题是：已知 16 个正数之和为 100，平方和为 1 000，证明这 16 个数中没有一个大于 25.

本文将推广该题的结论.

首先给出二次函数 $f(x)=x^2$ 的一条性质：对于任意 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$$

（当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号）　①

定理　设 $n(n\geqslant 2)$ 个实变数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 之和为定值 A，平方和为定值 B，则 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的取值范围为：

(1) 当 $A^2>nB$ 时，x_i 不存在；

(2) 当 $A^2=nB$ 时，$x_i=\frac{A}{n}$；

(3) 当 $A^2<nB$ 时，$\frac{A-\sqrt{(n-1)(nB-A^2)}}{n}\leqslant x_i\leqslant\frac{A+\sqrt{(n-1)(nB-A^2)}}{n}$（两个等号均当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{i-1}=x_{i+1}=\cdots=x_n$ 时取到）.

证明　只证定理对于 x_n 的结论成立即可.

由题设，得

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=A-x_n\\x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2=B-x_n^2\end{cases}$$

在 ① 中把 n 换为 $n-1$，得

$$\frac{B-x_n^2}{n-1}\geqslant\left(\frac{A-x_n}{n-1}\right)^2\text{（当且仅当 } x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\text{ 时取等号）}$$

$$nx_n^2-2Ax_n+A^2-(n-1)B\leqslant 0\text{（当且仅当 } x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\text{ 时取等号）}$$

②

(1) 当 $A^2>nB$ 时，对于任意的实数 x_n，总有 $nx_n^2-2Ax_n+A^2-(n-1)B>0$，所以由 ② 知此时 x_n 不存在.

(2) 当 $A^2 = nB$ 时,当且仅当 $x_n = \frac{A}{n}$ 时,$nx_n^2 - 2Ax_n + A^2 - (n-1)B = 0$,否则 $nx_n^2 - 2Ax_n + A^2 - (n-1)B > 0$,所以由 ② 知此时 $x_n = \frac{A}{n}$.

(3) 当 $A^2 < nB$ 时,由 ② 知 $\frac{A - \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{A + \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}}{n}$,两个等号均当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$ 时取到,具体地说:当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{A + \sqrt{\frac{nB - A^2}{n-1}}}{n}$ 时,$x_n = \frac{A - \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}}{n}$;当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{A - \sqrt{\frac{nB - A^2}{n-1}}}{n}$ 时,$x_n = \frac{A + \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}}{n}$.证毕.

在定理中令 $n = 16, A = 100, B = 1\,000$,得 $A^2 < nB$,由结论(3)得 $-12.5 \leqslant x_i \leqslant 25(i = 1,2,\cdots,16)$,又 x_i 是正数,所以 x_i 的取值范围是 $0 < x_i \leqslant 25$,即赛题的结论成立.

一道全国联赛试题一般情形的简洁解法

2000年全国高中数学联赛第一试第5题是一道选择题:

平面上整点(纵、横坐标都是整数的点,也叫格点)到直线 $l: y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$ 的距离中的最小值是(　　).

A. $\frac{\sqrt{34}}{170}$　　B. $\frac{\sqrt{34}}{85}$　　C. $\frac{1}{20}$　　D. $\frac{1}{30}$

文献[1]运用分类讨论的方法解答了该题,并说此法具有一般性,当分类讨论的情形较多时,可编程利用计算机解决.

实际上,解决此题的一般情形,无需分类讨论,也无需计算机的帮助,有简洁的解法及结论.

本文中用符号 $[c]$ 表示不超过 c 的最大整数;用 $\{c\}$ 表示 c 的小数部分,$\{c\} = c - [c]$,得 $0 \leqslant \{c\} < 1, c = [c] + \{c\}$.

引理[2]　当 $a, b \in \mathbf{Z}, (a, b) = 1$ 时,对于任意的 $n \in \mathbf{Z}$,不定方程 $ax + by = n$ 均有整数解(设其有一组整数解 (x_0, y_0),则全部整数解为 $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at, t \in \mathbf{Z}$).

定理1　对于直线 $l: ax + by = c (a, b \in \mathbf{Z}, c \in \mathbf{R}, (a, b) = 1)$,则:

(1) 当 $\{c\} = 0$(即 $c \in \mathbf{Z}$)时,平面上整点到直线 l 的最短距离为0,且达到最短距离的整点 (x_0, y_0) 是不定方程 $ax_0 + by_0 = c$ 的全部整数解;

(2) 当 $0 < \{c\} < \frac{1}{2}$ 时,平面上整点到直线 l 的最短距离为 $\frac{\{c\}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,且达到最短距离的整点 (x_0, y_0) 是不定方程 $ax_0 + by_0 = [c]$ 的全部整数解;

(3) 当 $\{c\} = \frac{1}{2}$ 时,平面上整点到直线 l 的最短距离为 $\frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$,且达到最短距离的整点 (x_0, y_0) 是两个不定方程 $ax_0 + by_0 = c \pm \frac{1}{2}$ 的全部整数解;

(4) 当 $\frac{1}{2} < \{c\} < 1$ 时,平面上整点到直线 l 的最短距离为 $\frac{1 - \{c\}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,且达到最短距离的整点 (x_0, y_0) 是不定方程 $ax_0 + by_0 = [c] + 1$ 的全部整数解.

证明　平面上的整点 (x_0, y_0) 到直线 l 的距离为

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

又设 $ax_0 + by_0 = n$(有 $n \in \mathbf{Z}$),欲求 d 的最小值,即求 $|n - c|$ 的最小值,

由$[c]$,$\{c\}$的意义进而可得定理成立.

推论　对于直线$l: ax+by=c(a,b\in \mathbf{Z},c\in \mathbf{R},(a,b)=1)$,则:

(1) 当$0\leqslant \{c\}\leqslant \frac{1}{2}$时,平面上整点到直线$l$的最短距离为$\frac{\{c\}}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

(2) 当$\frac{1}{2}\leqslant \{c\}<1$时,平面上整点到直线$l$的最短距离为$\frac{1-\{c\}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

对于本文开头的联赛题,可先将直线l变形为

$$5x-3y=-2.4$$

在推论(2)中令$a=5,b=-3,c=-2.4$,可得所求最短距离为$\frac{1-0.6}{\sqrt{5^2+3^2}}=\frac{\sqrt{34}}{85}$,因而选B.

例1　求平面上整点到直线$l: y=\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}$的最短距离,并求出达到最短距离的所有整点.

解　先将l变形为$-7x+4y=2$.

由定理1(1)可得所求最短距离为0,达到最短距离的所有整点为$(4t+2,7t+4)(t\in \mathbf{Z})$.

例2　求平面上整点到直线$l:\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y=\frac{1}{2}$的最短距离,并求出达到最短距离的所有整点.

解　先将l变形为$2x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由定理1(4)可得所求最短距离为$\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{10}$,达到最短距离的所有整点为$(1-t,2t-1)(t\in \mathbf{Z})$.

定理2　平面上整点到直线$ax+by=c(a,b,c\in \mathbf{R},ab\neq 0,\frac{a}{b}\notin \mathbf{Q})$的距离可取任意正数(因而最短距离不存在).

还需深入研究定理2.

参考文献

[1] 周金元.一道全国联赛试题引发的思考[J].中学生数学,2001,8(上):18.
[2] 单壿.趣味数论[M].北京:中国青年出版社,1987.
[3] 张毅.直线外整点到直线的最短距离的求法[J].数学通讯,1989(3):17-18.

新加坡中一、二数学竞赛题选

一、选择题(有且只有一个答案正确)

1. 如果四个不同的正整数 m,n,p,q 满足 $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=4$,那么 $m+n+p+q$ 等于(　　).

A.10　　B.21　　C.24　　D.26　　E.28

2. 某国人口第 1 年增长 $i\%$,第 2 年增长 $j\%$,那么这两年人口共增长了(　　).

A.$(i+j)\%$　　B.$ij\%$　　C.$(i+ij)\%$

D.$(i+j+\frac{ij}{100})\%$　　E.$(i+j+\frac{i+j}{100})\%$

3. 如果一个序列 $\{a_i\}$ 满足 $a_1=2,a_{n+1}=a_n+2n$(n 为自然数),那么 a_{100} 是(　　).

A.9 900　　B.9 902　　C.9 904

D.10 100　　E.10 102

4. 若有 50 个数的算术平均值为 32,70 个数的算术平均值为 53,则这 120 个数的算术平均值为(　　).

A.44　　B.$44\frac{1}{4}$　　C.$44\frac{1}{2}$　　D.$44\frac{3}{4}$　　E.45

5. 如果 $\frac{m}{n}=\frac{4}{3},\frac{r}{t}=\frac{9}{14}$,那么 $\frac{3mr-nt}{4nt-7mr}$ 的值为(　　).

A.$-\frac{11}{2}$　　B.$-\frac{5}{4}$　　C.$-\frac{1}{7}$　　D.$\frac{11}{14}$　　E.$-\frac{11}{14}$

6. 用 11 除 $3^{1\,998}+2$,得到的余数是(　　).

A.1　　B.3　　C.5　　D.7　　E.9

7. 若 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,那么 $a_0+a_1+\cdots+a_n=$(　　).

A.2^n　　B.2^n+1　　C.2^n-1

D.n^2　　E.n^2+1

8. 13 对夫妇参加一次舞会,每人都与其他每人(除配偶外)握手一次,但女士之间不握手,则这 26 人之间握手次数为(　　).

A.78　　B.185　　C.234　　D.312　　E.325

9. $S = 1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 100!$的个位数是( )

A. 1 B. 3 C. 5 D. 7 E. 9

10. 如图1，$\triangle ABC$ 中，CD, AE, BF 分别是它们所在边的 $\frac{1}{3}$，CF, AD, BE 分别相交于 N_1, N_2, N_3，则 $\triangle N_1N_2N_3$ 与 $\triangle ABC$ 大小之比为( ).

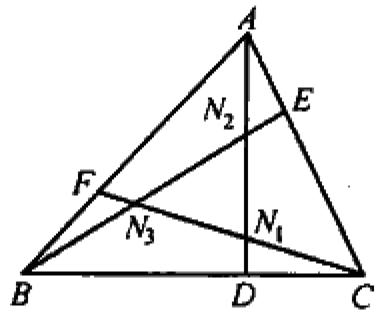


图 1

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{6}$

E. 无法确定

二、填空题

11. 整数 $4^6 \times 5^8$ 的位数是________.

12. 一袋中装有红、白、蓝、绿四色球共28个，红球比白球多4个，白球比蓝球多3个，蓝球比绿球多2个，则白球有________个.

13. $1\,998 \times 19\,971\,997 - 1\,997 \times 19\,981\,997 =$ ________.

14. 有8张标有2,3,5,7,11,13,17,19的纸牌，从中抽出一张，记住其数字后放回去重洗，再抽出一张记住其数字后又放回重洗……如此进行四次，记住的四个数的积为 p，则下列各数：136,198,455,1 925,3 553，其中不能等于 p 的是________.

15. $1\,997^{1\,998} - 1\,998^{1\,999} + 1\,999^{1\,997}$ 的个位数是________.

16. 11支球队举行循环赛，每两队间进行两场比赛，每场胜方获奖金200元，则组委会应准备奖金________元.

17. 安尼出售一种货物，他若将原售价降低10元，则获利为售价的10%；若将原价降低20元，则获利为售价的20%. 两种方法实际获利一样多，其原售价为________元.

18. 若正整数 x, y 满足 $x - y = 75$，且它们的最小公倍数为360，则 $x + y =$ ________.

19. 满足 $6\,000 < n^3 < 180\,000$ 且 n^3 的尾数为3的正整数 n 的值是________.

20. 把7个 1 cm × 2 cm 的长方形拼成一个 2 cm × 7 cm 的大长方形(例如图2是一种拼法)，共有________种拼法.

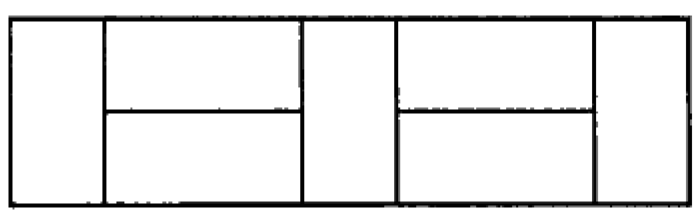


图 2

三、解答题

21. 若三个正整数 1 238, 1 596, 2 491 分别被 m 除余 n(m, n 为正整数),求 $m+n$ 的值.

22. 若 20^n 是 300! 的因数,试求自然数 n 的最大值.

23. 某人 1957 年的年龄是他出生年份(他是 20 世纪出生的)的数字和,他 1998 年生日过后是多少岁?

24. 正整数 m, n,满足 $8m+9n=mn+6$,求 m 的最大值.

25. 求 $5^{42}+7^{42}$ 被 11 除的余数.

26. 把一个四位数的数字顺序颠倒后(如把 1 234 写成 4 321),其值增加 2 088, 1 000 到 9 999 之间有多少个这样的四位数?

27. 若正整数 a, b, c 满足 $ab+bc=518$, $ab-ac=360$,求 abc 的最大值.

28. 根据图 3 中绘出的小三角形面积的数据,求 $\triangle ABC$ 的面积.

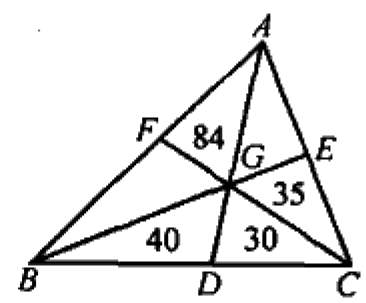


图 3

29. 在比 10 000 小的正整数中,有多少个 x,使 $2^x - x^2$ 不能被 7 整除?

30. 假设有 $N=2^{p-1}(2^p-1)$,其中 2^p-1 是质数,若 R 是 N 中所有因数(包括 1 和 N)的倒数和,求 R 的值.(注:本题要用一点等比数列求和公式)

参考答案

1.E 2.D 3.B 4.B 5.E 6.D 7.A 8.C 9.B 10.C 11.10 12.8 13.1 997 14.455 或 3 553 15.8 16.22 000 17.30 18.165 19.47 20.21

21. $$\begin{cases}1\,238=ma+n\\1\,596=mb+n\\2\,491=mc+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m(b-a)=358\\m(c-b)=895\\m(c-a)=1\,253\end{cases}$$

$(358, 895, 1\,253)=179$,即 $m=179$,从而 $n=164$,所以 $m+n=343$.

22. $\left[\frac{300}{5}\right]+\left[\frac{300}{5^2}\right]+\left[\frac{300}{5^3}\right]=74$, n 的最大值为 74.

23. 设出生年份为 $\overline{19xy}$,则 $57-\overline{xy}=1+9+x+y$,解得 $x=3$, $y=7$,所以此人 1998 年为 61 岁.

24. $m=\frac{9n-6}{n-8}=9+\frac{66}{n-8}$,当 $n=9$ 时, m 取最大值为 75.

25. $5^5=11A+1$, $7^5=11B-1$,所以 $5^{42}+7^{42}=11A'+25+11B'+49=11C+74$,但 $74=11D+8$,所以所求余数为 8.

26. 设四位数为 $\overline{xyut}$,依题意,有 $1\,000t+100u+10y+x-1\,000x-100y-$

$10u - t = 2\,088$,可得到 $111(t - x) + 10(u - y) = 232$,只有 $t - x = 2, u - y = 1$,前者有 7 种取值法,后者有 9 种取值法,所以共有 63 个这样的四位数.

27. 由 $ab + bc = 518, ab - ac = 360$. 可得 $c(b + a) = 2 \times 79$ 取 $c = 2$, $a + b = 79$,又 $ab = 518 - 2b$,经试验得,$b = 7$ 时 ab 取得最大值 504,abc 取最大值为 1 008.

28. 设 $S_{\triangle ACE} = x, S_{\triangle BFC} = y$,得 $\begin{cases} \dfrac{x}{35} = \dfrac{x + y + 84}{40 + 35 + 35} \\ \dfrac{3}{4} = \dfrac{30 + 35 + x}{84 + 40 + y} \end{cases}$,解得 $\begin{cases} x = 70 \\ y = 56 \end{cases}$,所以 $S_{\triangle ABC} = 315$.

29. x 连续取 1 到 21 的自然数,2^x 被 7 除的余数为 2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,2,4,1,而 x^2 被 7 除的余数为 1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0,其中有 6 个对应的余数相同,其余 15 个不同,说明有 15 个 $2^x - x^2$ 的值不能被 7 整除. 再往下取,仍按 21 为周期出现,而$\left[\dfrac{10\,000}{21}\right] = 476$,说明 x 取 1 到 9 996 个整数值是 $2^x - x^2$ 有 $476 \times 15 = 7\,140$ 个值,不能被 7 整除,剩下的 4 个数按周期可知,也有 2 个对应的 $2^x - x^2$ 不能被 7 整除,所以共有 7 142 个整数值使 $2^x - x^2$ 不能被 7 整除.

30. 因为 $2^p - 1$ 是质数,所以 N 的所有因数为 $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^{p-1}, 2^p - 1, 2(2^p - 1), 2^2(2^p - 1), \cdots, 2^{p-1}(2^p - 1)$(其中 p 为大于 2 的自然数,$2^p - 1$ 为质数),它们的倒数和为

$$R = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^p - 1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^p - 1}\right) = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}} \cdot \frac{2^p}{2^{p-1}} = 2$$

特殊地,当 $2^p - 1 = 2$ 时,$2^p = 3, 2^{p-1} = \dfrac{3}{2}$,此时 $N = \dfrac{3}{2} \times 2 = 3, R = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$.

介绍两道竞赛题

题1 设 $f:N\to N$，并且对所有的正整数 n，恒有 $f(n+1)>f(n)$，$f(f(n))=3n$，则 $f(2\,008)=$ ________.

解 若 $f(1)=0$，得 $f(f(1))=3$，即 $f(0)=3$，这与 $f(1)=0$ 矛盾(因为 $f(n)$ 递增)！所以 $f(1)\geqslant 1$.

若 $f(1)=1$，在题设

$$f(f(n))=3n \qquad ①$$

中令 $n=1$，得 $f(1)=3$，矛盾！所以 $f(1)\geqslant 2$.

又在 ① 中令 $n=1$，得 $3=f(f(1))\geqslant f(2)>f(1)\geqslant 2$.

从而可得 $f(1)=2$，$f(2)=3$.

由 ①，还可得 $f(3n)=f(f(f(n)))=3f(n)$，即

$$f(3n)=3f(n) \qquad ②$$

由 ②，得

$$f(3^2n)=3f(3n)=3^2f(n)$$
$$f(3^3n)=3^2f(3n)=3^3f(n)$$
$$\vdots$$
$$f(3^kn)=3^kf(n)(k\in\mathbf{N}) \qquad ③$$

由 ③，得

$$f(3^n)=3^nf(1)=2\times 3^n$$
$$f(2\times 3^n)=3^nf(2)=3\times 3^n$$

因为 2×3^n 到 3×3^n 共有 (3^n-1) 个整数(不包括本身)，3^n 到 2×3^n 也共有 (3^n-1) 个整数(不包括本身)；又 $f(n)$ 严格递增，所以

$$f(3^n+m)=2\times 3^n+m(m\in\mathbf{N},m\leqslant 3^n)$$
$$f(2\times 3^n+m)=f(f(3^n+m))=3(3^n+m)(m\in\mathbf{N},m\leqslant 3^n) \qquad ④$$

由 ④，得

$$f(2\,008)=f(2\times 3^6+550)=3(3^6+550)=3\,837$$

(对于任意的正整数 n，均可求出 $f(n)$ 的值.)

题2 给定正整数 n 和正数 M，对于等差数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1{}^2+a_{n+1}{}^2\leqslant M$，试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值.

原解 记 $a_{n+1}=a$,由已知得

$$S=(n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1)d$$

$$\frac{S}{n+1}=a+\frac{n}{2}d$$

又可得$(a-nd)^2+a^2\leqslant M$,所以

$$M\geqslant\frac{4}{10}(a+\frac{n}{2}d)^2+\frac{1}{10}(4a-3nd)^2\geqslant\frac{4}{10}\left(\frac{S}{n+1}\right)^2$$

$$\sqrt{M}\geqslant\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot\frac{|S|}{n+1},|S|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{10M}(n+1)$$

从而可得,所求 S 的最大值是$\frac{1}{2}\sqrt{10M}(n+1)$.

巧解 (三角换元法)若$\{a_n\}$的各项均为 0,得 $S=0$. 否则,由 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 知,可设 $a_1=\sqrt{r}\cos\theta,a_{n+1}=\sqrt{r}\sin\theta(0\leqslant\theta<2\pi,0<r\leqslant M)$,得

$$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=\frac{n+1}{2}(a_{n+1}+a_{2n+1})=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{r}(n+1)(3\sin\theta-\cos\theta)$$

$$S\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{10M}(n+1)$$

当且仅当 $r=M,3\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{10}$(即 $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}},\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$) 即

$$a_1=-\sqrt{\frac{M}{10}},a_{n+1}=3\sqrt{\frac{M}{10}}\text{ 时},S=\frac{1}{2}\sqrt{10M}(n+1)$$

又$\frac{1}{2}\sqrt{10M}(n+1)>0$,所以所求 S 的最大值是$\frac{1}{2}\sqrt{10M}(n+1)$.

谈谈第四届"希望杯"(高一初赛)压轴题

2008年3月16日举行的"希望杯"第四届全国青少年数学大赛初赛题(高一)的压轴题及其参考答案是:

设 $m \in \mathbf{N}^*$, $F(m)$ 表示 $\log_2 m$ 的整数部分.

(1) 求满足 $F(m)=3$ 的 m 的值;

(2) 求 $F(2^n+1)+F(2^n+2)+\cdots+F(2^{n+1})$ 的值;

(3) 求 $F(1)+F(2)+\cdots+F(2^n)$ 的值.

解 (1) 略.

(2) 因为 $F(2^n)=n$, $F(2^{n+1})=n+1$, 所以

$$F(2^n+1)+F(2^n+2)+\cdots+F(2^{n+1}-1)+F(2^{n+1})=$$
$$\underbrace{n+n+\cdots+n}_{(2^n-1)\text{个}n}+n+1=n\cdot 2^n+1$$

(3)(以下解法与参考答案不同)

设 $F(2^n+1)+F(2^n+2)+\cdots+F(2^{n+1})=a_n$, $F(1)+F(2)+\cdots+F(2^n)=b_n$, 则第(3)问的答案 b_n 就是数列$\{a_{n-1}\}$的前 n 项和. 又 $a_{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-1}+1$, 所以用错位相减法可求得答案为 $b_n=(n-2)\cdot 2^n+n+2$.

笔者认为,上述解答只给出了(2)中 $n\in\mathbf{N}$,(3)中 $n\in\mathbf{N}^*$ 的情形.

实际上,因为函数 $F(m)(m\in\mathbf{N}^*)$的定义域是$\mathbf{N}^*$,所以(2),(3)中的 n 只要满足 $2^n\in\mathbf{N}$即可,比方说 $n=\log_2 3$ 即 $2^n=3$ 时(2),(3)中的式子也有意义.

下面在 $2^n\in\mathbf{N}$ 时解答(2),(3):

对于(3),我们来求

$$f(k)=F(1)+F(2)+\cdots+F(k)(k\in\mathbf{N}^*) \quad ①$$

在原解答(3)中已得(可单独验证 $n=0$ 时也成立)

$$b_n=F(1)+F(2)+\cdots+F(2^n)=(n-2)\cdot 2^n+n+2(n\in\mathbf{N}) \quad ②$$

易知存在唯一的自然数 n 使得 $2^n\leqslant k<2^{n+1}$,这里的 n 即 $\log_2 k$ 的整数部分,通常记作$[\log_2 k]$,从而得

$$f(k)=F(1)+F(2)+\cdots+F(k)=$$
$$[F(1)+F(2)+\cdots+F(2^n)]+$$
$$[F(2^n+1)+F(2^n+2)+\cdots+F(k)]=$$

$$b_n+\underbrace{n+n+\cdots+n}_{(k-2^n)\text{个}n}=(n-2)\cdot 2^n+n+2+n(k-2^n)=$$

$$(k+1)n+2-2^{n+1}=(k+1)[\log_2 k]+2-2^{[1+\log_2 k]}\ (k\in\mathbf{N}^*)$$

即

$$f(k)=F(1)+F(2)+\cdots+F(k)=$$

$$(k+1)[\log_2 k]+2-2^{[1+\log_2 k]}\ (k\in\mathbf{N}^*) \quad ③$$

对于(2),我们来求

$$g(t)=F(t+1)+F(t+2)+\cdots+F(2t)(t\in\mathbf{N}^*) \quad ④$$

由 ③,立得

$$g(t)=F(t+1)+F(t+2)+\cdots+F(2t)=$$

$$f(2t)-f(t)=(2t+1)[1+\log_2 t]-$$

$$2^{[2+\log_2 t]}-(t+1)[\log_2 t]+2^{[1+\log_2 t]}=$$

$$2t+1+t[\log_2 t]-2^{[1+\log_2 t]}\ (t\in\mathbf{N}^*)$$

即

$$g(t)=F(t+1)+F(t+2)+\cdots+F(2t)=$$

$$2t+1+t[\log_2 t]-2^{[1+\log_2 t]}\ (t\in\mathbf{N}^*) \quad ⑤$$

一个三角形的面积

定理 如图1,点 D,E,F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上,且 $\frac{AE}{EC}=a$, $\frac{CD}{DB}=b,\frac{BF}{FA}=c$,则

$$\frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(abc-1)^2}{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}$$

证明 连结 BP,设 $S_{\triangle ABP}=x$.

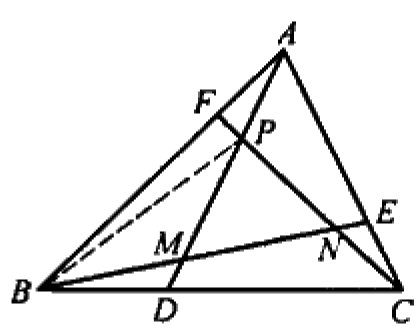


图1

由 $\frac{CD}{DB}=b$,得

$$S_{\triangle ACP}=bS_{\triangle ABP}=bx$$

又由 $\frac{BF}{FA}=c$,可得

$$S_{\triangle BCP}=cS_{\triangle ACP}=bcx$$

由 $x+bx+bcx=S_{\triangle ABC}$,得

$$x=\frac{1}{bc+b+1}S_{\triangle ABC}$$

所以

$$S_{\triangle ACP}=\frac{b}{bc+b+1}S_{\triangle ABC}$$

同理,有

$$S_{\triangle ABM}=\frac{a}{ab+a+1}S_{\triangle ABC},S_{\triangle BCN}=\frac{c}{ca+c+1}S_{\triangle ABC}$$

所以

$$\frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle ABC}}=1-\frac{a}{ab+a+1}-\frac{b}{bc+b+1}-\frac{c}{ca+c+1}$$

即

$$\frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(abc-1)^2}{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}$$

推论1 在图1中,线段 AD,BE,CF 相交于一点的充要条件是 $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$.

由推论1易证:三角形的三条中线、三条角平分线,锐角三角形的三条高线分别共点.我们来证明第三个结论:

如图 2,有$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{CD}{CE}\cdot\frac{BF}{BD}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{BA}=1$,所以 AD,BE,CF 共点.

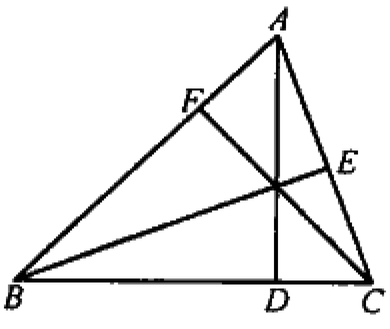


图 2

推论 1 即著名的塞瓦定理,所以本文的定理可以看做是塞瓦定理的推广.

推论 2 在图 1 中,若$\frac{AE}{EC}=\frac{CD}{DB}=\frac{BF}{FA}=k$,则$\frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$.

在推论 2 中,记$f(k)=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$,易证

$$f(k)=f(\frac{1}{k}) \tag{①}$$

在定理中,记 $F(a,b,c)=\frac{(abc-1)^2}{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}$,可证

$$F(a,b,c)=F(\frac{1}{a},\frac{1}{c},\frac{1}{b})=F(\frac{1}{c},\frac{1}{b},\frac{1}{a})=F(\frac{1}{b},\frac{1}{a},\frac{1}{c}) \tag{②}$$

读者可从式 ①,② 分别结合推论 2、定理理解这两个式子的意义.

在图 1 中还可证得

$$\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CBE}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BE\cdot\sin\angle ABE}{\frac{1}{2}BC\cdot BE\cdot\sin\angle CBE}=\frac{AB\sin\angle ABE}{BC\sin\angle CBE}$$

同理,有

$$\frac{CD}{DB}=\frac{CA\sin\angle CAD}{BA\sin\angle BAD},\frac{BF}{FA}=\frac{BC\sin\angle BCF}{CA\sin\angle ACF}$$

再由推论 1,得:

推论 3 在图 1 中, 线段 AD,BE,CF 共点的充要条件是$\frac{\sin\angle CAD\cdot\sin\angle ABE\cdot\sin\angle BCF}{\sin\angle BAD\cdot\sin\angle CBE\cdot\sin\angle ACF}=1$.

2004年全国高中联赛压轴题的别证及推广

2004年全国高中联赛的压轴题是:

乙知 α,β 是方程 $4x^2-4tx-1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个不等实根,函数 $f(x)=\frac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$.

(1) 求 $g(t)=\max f(x)-\min f(x)$.

(2) 证明:对于 $u_i\in(0,\frac{\pi}{2})(i=1,2,3)$,若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$,则 $\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3}{4}\sqrt{6}$.

对于(1),参考答案是用增函数的定义证得 $f(x)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的增函数,再求出 $g(t)$ 的,下面再给出导数解法

$$f'(x)=-2\cdot\frac{x^2-tx-1}{(x^2+1)^2}$$

由题意,得 $x\in[\alpha,\beta]$ 时,$f(x)=4x^2-4tx-1\leqslant 0$,所以 $x^2-tx-1<0$,$f'(x)>0$,即 $f(x)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的增函数,得

$$g(t)=f(\beta)-f(\alpha)=\frac{(\beta-\alpha)[t(\alpha+\beta)-2\alpha\beta+2]}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}=$$

$$\frac{\sqrt{t^2+1}(t^2+\frac{5}{2})}{t^2+\frac{25}{16}}=\frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}$$

对于(2),还可加强为:

定理 若 $g(t)=\frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}(t\in\mathbf{R})$,$u_i\in(0,\frac{\pi}{2})(i=1,2,\cdots,n;n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,若 $\sum_{i=1}^{n}\sin u_i=a(0<a<n)$,则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g(\tan u_i)}\leqslant\frac{\sqrt{6}}{96}(25n-\frac{9a^2}{n})$(当且仅当 $\sin u_1=\cdots=\sin u_n=\frac{1}{\sqrt{3}}$,$a=\frac{n}{\sqrt{3}}$ 时取等号).

证明 $g(\tan u_i)=\frac{\frac{8}{\cos u_i}(\frac{2}{\cos^2 u_i}+3)}{\frac{16}{\cos^2 u_i}+9}=\frac{\frac{16}{\cos u_i}+24\cos u_i}{16+9\cos^2 u_i}\geqslant$

$$\frac{2\sqrt{16\times 24}}{16+9\cos^2 u_i}(\text{当且仅当} \sin u_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{时取等号}) =$$

$$\frac{16\sqrt{6}}{16+9\cos^2 u_i}(i=1,2,\cdots,n)$$

由柯西不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2 u_i \geqslant \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\sin u_i)^2(\text{当且仅当} \sin u_1 = \sin u_2 = \cdots =$$

$$\sin u_n = \frac{a}{n} \text{时取等号}) = \frac{a^2}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g(\tan u_i)} \leqslant \frac{1}{16\sqrt{6}}\sum_{i=1}^{n}(16+9\cos^2 u_i) =$$

$$\frac{1}{16\sqrt{6}}(16n+9n-9\sum_{i=1}^{n}\sin^2 u_i) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{96}(25n-\frac{9a^2}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g(\tan u_i)} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{96}(25n-\frac{9a^2}{n})(\text{当且仅当} a = \frac{n}{\sqrt{3}} \text{时取等号})$$

证毕!

猜想 在定理的题设下,也有 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{g(\tan u_i)} \leqslant \frac{(25n^2-9a^2)\sqrt{n^2-a^2}}{40n^2-24a^2}$(当且仅当 $\sin u_1 = \sin u_2 = \cdots = \sin u_n = \frac{a}{n}$ 时取等号).

容易证明,猜想的结论强于定理的结论.

一道赛题的又一解法

1995 年全国高中数学联赛第二试第二题为：

若关于 x 的方程

$$5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p \qquad ①$$

的三个根均为正整数，求实数 p 的范围.

《中学数学月刊》、《数学通讯》等杂志给出过此题的完整解法，下面再给出此题的又一解法.

解　因为原方程有一根 $x=1$，所以可把原题简化为：

若关于 x 的方程

$$5x^2-5px+66p-1=0 \qquad ②$$

的两个根均为正整数，求实数 p 的范围.

由韦达定理知，方程②的两根之和为 p，又由题设得 $p\in\mathbf{N}^*$.

由方程②及 $x\in\mathbf{N}^*$，可得

$$p=\frac{5x^2-1}{5x-66}=x+13+\frac{x+857}{5x-66}$$

所以 $5x-66\mid x+857$（本文中的整除，若未注明，均指数的整除），得

$$5x-66\mid 5(x+857),5x-66\mid 4\,351$$

又 $4\,351=19\times229$，19，229 均为素数，所以 $5x-66=\pm1,\pm19,\pm229$，或 $\pm4\,351$.

又 $5x-66\equiv-1\pmod 5$，所以 $5x-66=-1,19,229$，或 $-4\,351$，$x=13,17,59,-857$. 可得 $p=-844$，或 76. 又 $p\in\mathbf{N}^*$，所以 $p=76$（此时方程②的两个根为 17，59）.

由以上解法，还可得以下结论：

若关于 x 的方程①的三个根均为整数，则复数 p 的取值范围是 $p=-844$，或 76.

用以上解法，还可求不定方程

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\,(f(x),g(x)\text{ 是关于 }x\text{ 的整系数多项式})\neq\text{常数} \qquad ③$$

的全部整数解.

可按以下步骤求解：

(1) 先约去 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式（在有理数范围内），得两种情形：

$y = \frac{u(x)}{v(x)}$($u(x)$, $v(x)$ 是关于 x 的整系数多项式,且它们不含非常数的公因式,$v(x) \neq$ 常数) ④

或 $y = \frac{u(x)}{a}$($u(x)$ 是关于 x 的整系数多项式,常数 $a \in \mathbf{N}^*$) ⑤

对于 ⑤ 的求解是容易的,可设 $x = an + r(r = 0,1,\cdots,a-1; n \in \mathbf{Z})$ 分别代入求解,所得结果是:⑤ 若有整数解,则有无限组解;⑤ 或者没有整数解.

(2) 用多项式的带余除法,设 $u(x) = q_1(x)v(x) + u_1(x)$,$\partial u_1(x) < \partial f(x)$($\partial f(x)$ 指多项式 $f(x)$ 的次数).

存在常数 $m_1 \in \mathbf{N}^*$,使 $m_1q_1(x)$ 为整系数多项式,且 $m_1u(x) = m_1q_1(x)v(x) + m_1u_1(x)$(所以 $m_1u_1(x)$ 也是整系数多项式),又设 $m_1u_1(x) = u'_1(x)$,得

若 ④ 有整数解,则 $v(x) \mid u'_1(x)$,$\partial u'_1(x) < \partial v(x)$.

(3) 又设 $v(x) = q_2(x)u'_1(x) + u_2(x)$,$\partial u_2(x) < \partial u'_1(x)$.

存在常数 $m_2 \in \mathbf{N}^*$,使 $m_2q_2(x)$ 为整系数多项式,且 $m_2v(x) = m_2q_2(x)u'_1(x) + m_2u_2(x)$(所以 $m_2u_2(x)$ 为整系数多项式).

因为 $m_2v(x) \mid m_2u'_1(x)$,所以

$$m_2q_2(x)u'_1(x) + m_2u_2(x) \mid m_2(m_2q_2(x)u'_1(x) + m_2u_2(x)) - m_2^2u_2(x)$$

得

$$m_2v(x) \mid m_2^2u_2(x), v(x) \mid m_2u_2(x)$$

设 $m_2u_2(x) = u'_2(x)$,得:若 ④ 有整数解,则 $v(x) \mid u'_2(x)$,$\partial u'_2(x) < \partial u'_1(x)$.

(4) 重复步骤(3),可得:若 ④ 有整数解,则存在常数 $A \in \mathbf{Z}$,使 $v(x) \mid A$.

因为 $u(x)$ 与 $v(x)$ 没有非常数公因式,所以可证 $A \neq 0$.

所以 $v(x) = A$ 的约数(有限个),通过试验可求出其全部整数根(即 x 的有限个值),再由 ④,可试验求出 ④ 的全部整数解.

再补充一点:(由 $f(x) = 0$ 且 $g(x) \neq 0$),或 $g(x) = \pm 1$,得到的 x 值一定满足方程 ③.

由上述解法,可得:

定理 (本定理中的整除均指多项式的整除)

(1) 若 $g(x) \nmid f(x)$,则方程 ③ 只有有限组整数解.

(2) 若 ③ 有无数组整数解,则 $g(x) \mid f(x)$.

(3) 若 ⑤ 有一组整数解,则有无数组整数解.

方程 ⑤ 也有无整数解的情形,如 $y = \frac{x^2+1}{3}$ 就没有整数解.

IMO41 – 2 及与之等价的几道奥赛题

2000 年 7 月 19 日举行的第 41 届国际数学奥林匹克竞赛(IMO41)的第 2 题为:

题 1 设 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$, $abc = 1$,求证

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1 \qquad ①$$

笔者发现该题与几道国际(国家)奥林匹克竞赛题是等价的.

在题 1 中可令 $a = \frac{y}{x}, b = \frac{x}{z}, c = \frac{z}{y}(x,y,z \in \mathbf{R}^+)$,便得 1983 年瑞士数学奥林匹克竞赛题:

题 2 若 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$,则 $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leqslant xyz$.

因为可证得恒等式

$$\begin{aligned} xyz - (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) = \\ x(x - z)^2 + y(y - z)^2 - (x - z)(y - z)(x + y - z) = \\ x^2(y + z - x) + y^2(z + x - y) + z^2(x + y - z) = \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x(y - z)^2 - y(z - x)^2 - z(x - y)^2 \end{aligned}$$

所以还可将题 2 等价变形为:

题 3 (1992 年加拿大数学奥林匹克试题)若 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$,则 $x(x - z)^2 + y(y - z)^2 \geqslant (x - z)(y - z)(x + y - z)$.

题 4 (IMO6)若 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$,则 $x^2(y + z - x) + y^2(z + x - y) + z^2(x + y - z) \leqslant 3xyz$.

题 5 若 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$,则 $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz + x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2$.

(题 5 是常用不等式 $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$ 的加强)

这里再给出题 2 的一种加强形式:

定理 1 若 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$,则

$$\frac{(x + y + z)^3}{27xyz} \cdot (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leqslant xyz \qquad ②$$

证明 因为不等式 ② 关于 x,y,z 轮换对称,所以可设 $x \geqslant y \geqslant z > 0$. 若 $y + z \leqslant x$,可得:式 ② 的左边 $\leqslant 0 <$ 右边,此时式 ② 成立.

若 $y+z>x$,则 x,y,z 为某 $\triangle ABC$ 的三边长(图 1),得

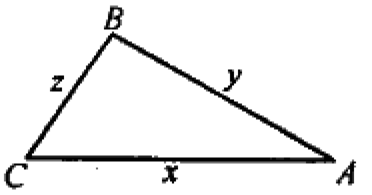


图 1

不等式②$\Leftrightarrow[(x+y)^2-z^2][(y+z)^2-x^2][(z+x)^2-y^2]\leqslant 27x^2y^2z^2\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+1\right)\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+1\right)\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+1\right)\leqslant\frac{27}{8}\Leftrightarrow$$

$$(\cos C+1)(\cos A+1)(\cos B+1)\leqslant\frac{27}{8}\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}$$

而最后一个不等式是 $\triangle ABC$ 中熟知的不等式,所以定理 1 成立.

还可将题 2 等价变形为:

定理 2 若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,则 $(x+y+z)^3-4(x+y+z)(xy+yz+zx)+9xyz\geqslant 0$.

例 (IMO25) 已知 x,y,z 都是非负实数,且 $x+y+z=1$,求证:$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$.

证明 当 $xyz=0$ 时,易证结论成立.

当 $xyz\in\mathbf{R}^+$ 时,由题设及定理 2,得

$$xy+yz+zx\leqslant\frac{9}{4}xyz+\frac{1}{4}$$

所以

$$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{1}{4}xyz+\frac{1}{4}$$

又

$$xyz\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

所以

$$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$$

一道“希望杯”赛题的另证

第 9 届“希望杯”全国数学邀请赛高二试题中有一道题是：

若实数 x,y 满足 $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$，求证：$\frac{1}{2} \leqslant 2x^2+3xy+2y^2 \leqslant 7$.

通常的证法是用三角换元法：

可设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，得 $1 \leqslant r^2 \leqslant 2$，所以

$$2x^2+3xy+2y^2 = r^2(2+\frac{3}{2}\sin 2\theta)$$

因为 $-1 \leqslant \sin 2\theta \leqslant 1$，所以

$$\frac{1}{2} \leqslant 2+\frac{3}{2}\sin 2\theta \leqslant \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2}r^2 \leqslant r^2(2+\frac{3}{2}\sin 2\theta) \leqslant \frac{7}{2}r^2$$

又由 $1 \leqslant r^2 \leqslant 2$，可得

$$\frac{1}{2} \leqslant 2x^2+3xy+2y^2 \leqslant 7$$

很少有人想到把这道题加强为两个结论：

(1) 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2 \geqslant 1$，求证：$2x^2+3xy+2y^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

(2) 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2 \leqslant 2$，求证：$2x^2+3xy+2y^2 \leqslant 7$.

证明　用以上的三角换元法也可证出这两个结论，以下证明更简洁：

(1) 因为 $(x+y)^2 \geqslant 0$，所以 $\frac{2xy}{x^2+y^2} \geqslant -1$（当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时）.

因为 $\frac{2x^2+3xy+2y^2}{x^2+y^2} = 2+\frac{3}{2}\cdot\frac{2xy}{x^2+y^2} \geqslant 2+\frac{3}{2}\cdot(-1) = \frac{1}{2}$，$x^2+y^2 \geqslant 1$，所以

$$2x^2+3xy+2y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geqslant \frac{1}{2}$$

(2) 因为 $2xy \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$，所以 $xy \leqslant 1$，所以

$$2x^2+3xy+2y^2 \leqslant 2\times 2+3\times 1 = 7$$

IMO32 中一道试题的推广

1991 年举行的第 32 届国际数学奥林匹克竞赛(IMO32) 中有一道试题为:

设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点,求证:$\angle PAB,\angle PBC,\angle PCA$ 中至少有一个小于或等于 $30°$.

文献[1]运用凸函数的性质——琴生不等式[2]给出了该题的一种证法,为了方便读者,这里再把文献[1]的证明叙述得更清楚些.

琴生不等式 设函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 内上(下)凸,则对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in$ Ⅰ,总有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant(\geqslant)f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)$,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号.

由函数 $f(x)=\lg(\sin x)(0<x<\pi)$ 的图象知,$f(x)$ 是上凸函数(上凸函数的定义可见文献[2]).

赛题的证明 如图 1,设 $\alpha=\angle PAB,\beta=\angle PBC,\gamma=\angle PCA$,得

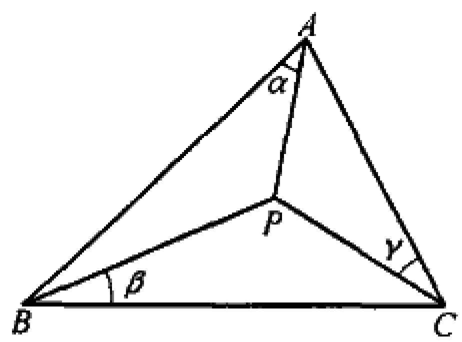


图 1

$$PA\cdot\sin\alpha=PB\cdot\sin(B-\beta)$$
$$PB\cdot\sin\beta=PC\cdot\sin(C-\gamma)$$
$$PC\cdot\sin\gamma=PA\cdot\sin(A-\alpha)$$

所以

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(A-\alpha)\sin(B-\beta)\sin(C-\gamma) \quad ①$$

因为函数 $y=\lg(\sin x)$ 在 $(0,\pi)$ 内上凸,所以由琴生不等式,得

$$\frac{1}{6}[\lg(\sin\alpha)+\lg(\sin(A-\alpha))+\lg(\sin\beta)+\lg(\sin(B-\beta))+\lg(\sin\gamma)+\lg(\sin(C-\gamma))]\leqslant$$
$$\lg\{\sin\frac{1}{6}[\alpha+(A-\alpha)+\beta+(B-\beta)+\gamma+(C-\gamma)]\}=\lg\frac{1}{2}$$

又由 ①,得

$$(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2\leqslant(\frac{1}{2})^6$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqslant\frac{1}{8}$$

所以 $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$ 中有一个比如 $\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}$,得 $\alpha\leqslant 30^\circ$ 或 $\alpha\geqslant 150^\circ$,从而可得要证结论成立.

同以上证明,容易把赛题的结论推广为:

定理 设 P 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内一点,则 $\angle PA_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots,n$;约定 $A_{n+1}=A_1)$ 中至少有一个不大于 $\frac{n-2}{2n}\pi$.

参考文献

[1] 彭海军.对称分析法[J].数学通讯,2000(21):46
[2] 陈传理.高中数学竞赛名师讲座[M].武汉:华中师范大学出版社,1993:84-86.

一道西部数学奥赛题与一道高考压轴题的联系及区别

题 1 (2004年中国西部数学奥林匹克竞赛题)求证:对任意正实数 a,b,c,都有

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad ①$$

先证明左边的不等式成立,有

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}>a$$

所以

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}>\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

同理,有

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}>\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}>\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

把它们相加即得欲证

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}$$

再来证明右边的不等式也成立,先把 ① 变形为

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}$$

设 $\frac{b^2}{a^2}=x,\frac{c^2}{b^2}=y,\frac{a^2}{c^2}=z$;得

$$1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}(x,y,z\in\mathbf{R}^+,xyz=1) \qquad ②$$

对于 ① 右边的不等式即

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}(x,y,z\in\mathbf{R}^+,xyz=1) \qquad ③$$

可不妨设 $0<x\leqslant y\leqslant z$,又由 $xyz=1$ 可得 $x\leqslant 1,z\geqslant 1$,所以 $0<x\leqslant 1\leqslant y\leqslant z$ 或 $0<x\leqslant y\leqslant 1\leqslant z$.

(1) 当 $0 < x \leqslant y \leqslant 1 \leqslant z$ 时,即证 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{1+xy}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$

设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{1+xy}}$,得

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{y}}{\sqrt{1+y}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

可证 $2f'(x)=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{(1+xy)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$,所以 $f(x) \leqslant f(1) \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$.

(2) 当 $0 < x \leqslant 1 \leqslant y \leqslant z$ 时,即证 $\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}+\frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{1+yz}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$.

设 $g(z)=\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}+\frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{1+yz}}$,可得 $g(1) \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$.

可证 $2g'(z)=\frac{\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{2}}}{(1+yz)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}} \leqslant 0$,所以 $g(z) \leqslant g(1) \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$.

总之,③ 成立,即 ① 右边的不等式也成立.

由题 1 笔者联想到了与之类似的一道高考题:

题2 (2008 年高考江西理科卷压轴题最后一问) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\frac{ax}{ax+8}}$, $x \in (0,+\infty)$,对任意正数 a,证明: $1 < f(x) < 2$.(其证明可见原参考解答,很复杂)

可得 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{ax}}}$,再令 $b=\frac{8}{ax}$,即证

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}} < 2(x,a,b \in \mathbf{R}^+, xab=8)$$

也即证

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}} < 2(x,y,z \in \mathbf{R}^+, xyz=8) \qquad ④$$

③④ 不是很类似吗?因为笔者见到的对题 2 的证明过程均很复杂,所以曾想用题 1 的证明来得到题 2 的简洁证明,并且还猜想可把 ④ 加强为 $1 < \frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}} \leqslant \sqrt{3}(x,y,z \in \mathbf{R}^+, xyz=8)$,但笔者又迅速否定了此猜想: $x=y=1, z=8$ 就是一个反例,所以上面对题 1 的简洁证明也不能

适合于题 2. 实际上，当 $x\to 0,y\to 0$ 时 $z\to+\infty$，$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\to 2$；当 $x\to+\infty,y\to+\infty$ 时 $z\to 0$，$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\to 1$，这说明式 ④ 两端的常数 1,2 均是最佳的.

猜想 1 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，则 $1<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}}\leqslant\frac{n\sqrt{2}}{2}$（这里 $x_{n+1}=x_1$）.

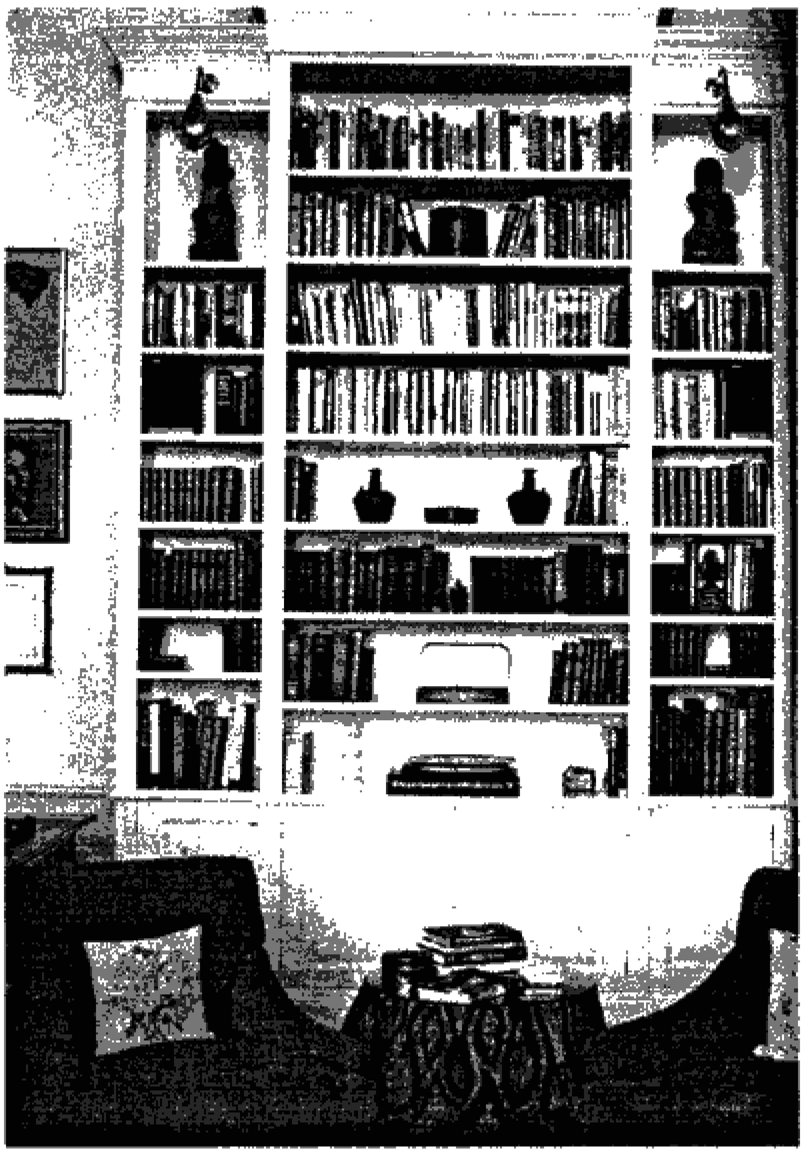
猜想 2 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，$\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=1$，则 $1<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\leqslant\frac{n\sqrt{2}}{2}$.

问题 1 若 t 是已知的正数，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，$\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=t^n$，求函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}$ 的值域.

猜想 3 问题 1 的答案是 $\left(1,\frac{n}{\sqrt{t+1}}\right]$ 或 $(1,n)$.

问题 2 若猜想 3 成立，请问：当 t 为何值时，问题 1 的答案是 $\left(1,\frac{n}{\sqrt{t+1}}\right]$？当 t 为何值时，问题 1 的答案是 $(1,n)$？

数学问题



争鸣

问题 107 全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》(2003年人民教育出版社)第30页例1中把命题"负数的平方是正数"写成"若一个数是负数,则它的平方是正数",与教科书配套使用的《教师教学用书》第10页说也可以写成"若一个数是负数的平方,则这个数是正数".

笔者认为一个命题的题设和结论应当是唯一确定的,不应有以上两种写法.试问以上两种写法哪种正确呢?

评析 该问题收稿2篇.

选登1 数学中的命题一般都可写成"若p则q"的形式,在"若p则q"中,p叫做命题的条件(或题设),即已知事项,q叫做命题的结论,即由已知事项推出的事项,而对于一个命题,尤其是简单命题,不一定非要把它写成"若p则q"的形式.教材中把一个命题写成"若p则q"的形式,主要目的是为了引入四种命题及其真值之间的关系.

那么,对于一个简单命题,如何判断它的条件与结论呢?这就要求我们深刻理解命题的题设和结论的概念,准确把握哪个是已知事项,而哪个又是推出事项.对于"负数的平方是正数"这一命题,其意在于让我们判断"负数的平方是不是正数",故其"若p则q"的形式应为"若一个数是负数的平方,则这个数是正数",而不是"若一个数是负数,则它的平方是正数",否则,对于"同角的余角相等"这一命题,我们又该如何去写呢?类似的命题还有"5减去1大于3",其"若p则q"的形式为"若一个数是5减去1,则它大于3",而不是"若一个数是5,则它减去1大于3".

教材之所以出现两种写法,一是考虑到学生的实际水平,在这里不要对这个问题纠缠不清;二是可能考虑到了命题的逻辑等价,即两个复合命题的真值完全相同,而对于逻辑等价的两个命题,在推理论证时可以相互替换."若p则q"形式的命题是复合命题,而对于教材中两种写法显然真值是完全相同的,故教材中认为两处写法均正确.

王兵权 河北河间第三中学 062459

选登2 笔者认为两种写法皆正确,理由如下:

一个命题究竟是简单命题,还是复合命题并不是绝对的,而是相对的.根据

逻辑学知识，简单命题中的性质命题就是断定对象具有或不具有某种性质的判断，其由主项、谓项、联项和量项四部分构成的.由此定义不难知道"负数的平方是正数"也可以看做是一个简单命题，这样一来，此命题的联项是什么？值得商榷，因为弄清这一点，关系到对本问题中两种写法的正确与否的理解.

联项是联结主项和谓项的语词，它表示"具有"还是"不具有"的差别，决定了一个判断是肯定命题还是否定命题.表示"具有"某属性的联项是肯定的联项，通常用"是"这个判断词；表示"不具有"某属性的联项是否定的联项，通常用"不是"这个判断词.但在语言表述中，肯定的联项(是)有时可以省略，否定的联项(不是)在语言表达中是不能省略的.基于此，笔者认为命题"负数的平方是正数"的联项可有两种理解：一种理解就是命题中的"是"，此时主项为"负数的平方"，谓项是"正数"，若按此理解，命题应改写为"若一个数是负数的平方，则这个数是正数"；另一种理解是省略了联项"是"，即原命题可表达为"负数是平方为正数的数".此时主项为"负数"，谓项是"平方为正数的数".据此理解，原命题应改写为"若一个数是负数，则它的平方为正数".

综上分析知，两种写法都正确也就不足为奇了.至于一个命题的题设和结论应是唯一确定的提法，笔者认为不妥，因为对一个命题的联项的认识不同，从而就带来了命题的题设和结论的不同.如本问题所提到的命题就是如此.再如"正方形的四条边相等"也存在同样的问题(高一《教师教学用书》第 10 页语)，请读者玩味！

王峰　　安徽临泉一中　　236400

编者按：编者不赞成该命题可理解为"负数是平方为正数的数"这一说法.

问题 112　全日制普通高级中学教科书(必修)《数学・第一册(上)》(2003 年人民教育出版社)第 70 页的第 2(3) 题是：用分数指数幂表示$\sqrt[3]{(a-b)^2}(a, b \in \mathbf{R}^+)$.与教科书配套使用的《教师教学用书》第 55 页给出的答案是$(a-b)^{\frac{2}{3}}$.

笔者认为：教科书中只讲述了底数为非负数的分数指数幂，从未涉及负数的分数指数幂(这样处理也很合适)，所以该题的答案应为$|a-b|^{\frac{2}{3}}$.

请问：以上观点是否正确？

问题 134　用线性规划知识可得：如图 1，若 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$ 在直线 $l: Ax+By+C=0$ 的两侧，得

$$(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)<0$$

笔者通过类比，猜测以下结论也应成立，但不会证明，请读者判断真假.

如图 2，$l_i: Ax + By + C_i = 0 (i = 1,2)$ 是两条平行直线，$M(x_0, y_0)$ 是夹在这两条平行线之间的任一点，则有

$$(Ax_0 + By_0 + C_1)(Ax_0 + By_0 + C_2) < 0$$

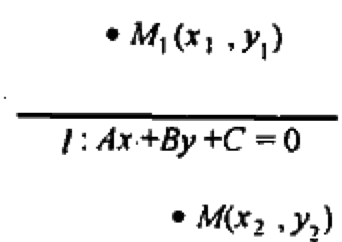


图 1

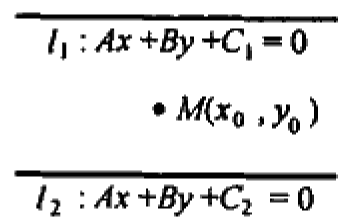


图 2

评析　该问题共收稿 37 篇，均给出了正确的证明方法，来稿前 5 名作者是：甘肃省兰州连城铝业有限责任公司中学宋波，陕西延安第一中学陈尚生，河南灵宝市第一高级中学南东江，福建泉州马甲中学肖忠，江苏盐城师范学院数科院 04(2) 班孙金兰。

选登 1　易得甘志国老师在问题 134 中提出的猜想是成立的，其猜想如下：$M(x_0, y_0)$ 是两平行直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 与 $l_2: Ax + By + C_2 = 0$ 之间的任一点，则 $(Ax_0 + By_0 + C_1)(Ax_0 + By_0 + C_2) < 0$.

证明　当 $B = 0$ 时，$l_1: x = -\frac{C_1}{A}$，$l_2: x = -\frac{C_2}{A}$，不妨设 $-\frac{C_1}{A} > -\frac{C_2}{A}$，由 $M(x_0, y_0)$ 夹在这两条平行直线间知

$$-\frac{C_1}{A} > x_0 > -\frac{C_2}{A}$$

即 $(Ax_0 + C_1)(Ax_0 + C_2) < 0$，因此当 $B = 0$ 时满足.

当 $B \neq 0$ 时，有

$$l_1: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C_1}{B},$$

$$l_2: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C_2}{B}.$$

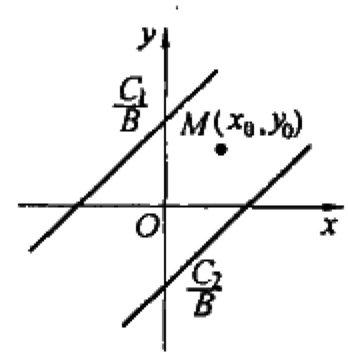


图 3

不妨设 $-\frac{C_1}{B} > -\frac{C_2}{B}$，如图 3 所示.

由 $M(x_0, y_0)$ 夹在这两条平行直线间，有

$$\begin{cases} y_0 < -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C_1}{B} \\ y_0 > -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C_2}{B} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{A}{B}x_0 + y_0 + \frac{C_1}{B}\right) \cdot \left(\frac{A}{B}x_0 + y_0 + \frac{C_2}{B}\right) < 0$$

故　　$(Ax_0+By_0+C_1)(Ax_0+By_0+C_2)<0$

综上所述,猜想成立.

事实上,问题134中所提到的两个命题推广到空间仍然成立,即:

命题1　若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 在平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的两侧,则 $(Ax_1+By_1+Cz_1+D)(Ax_2+By_2+Cz_2+D)<0$.

命题2　若 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是夹在两平行平面 $\pi_1:Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\pi_2:Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间,则 $(Ax_0+By_0+Cz_0+D_1)(Ax_0+By_0+Cz_0+D_2)<0$.

罗建宇　江苏张家港市暨阳高级中学　215600

选登2　因为 $M(x_0,y_0)$ 是夹在两条平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 与 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 之间的一点,所以

$$\frac{|Ax_0+By_0+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{|Ax_0+By_0+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

即

$$|Ax_0+By_0+C_1|+|Ax_0+By_0+C_2|=|(Ax_0+By_0+C_1)-(Ax_0+By_0+C_2)|$$

所以　　$(Ax_0+By_0+C_1)\cdot(Ax_0+By_0+C_2)\leqslant 0$

因为　　$Ax_0+By_0+C_1\neq 0, Ax_0+By_0+C_2\neq 0$

所以　　$(Ax_0+By_0+C_1)\cdot(Ax_0+By_0+C_2)<0$

郑志安　浙江宁波荣安实验中学　315010

问题139　笔者在解决有关球的体积问题时,常遇到以下计算问题却不能解决:

设 A,B,C 是半径为1的球面上的三点,O 是球心,$\angle AOB=\alpha$,$\angle BOC=\beta$,$\angle COA=\gamma(\alpha,\beta,\gamma\in(0,2\pi))$,请求出几何体 $O-ABC$ 的体积 $V_{(\alpha,\beta,\gamma)}$;特别地,请求出 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时的体积 $V_{(1,1,1)}$.笔者猜测 $V_{(\alpha,\beta,\gamma)}=\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{\beta}{2\pi}\cdot\frac{\gamma}{2\pi}V_{球}$ $(V_{球}=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3)$.

评析　该问题共收稿12篇,均指出原猜想不成立.来稿中,安徽肥东县梁园中学王茂飞与另一位没有通信地址的老师给出了与选登1相同的结论.

选登1　若三棱锥 $V-ABC$ 的三条侧棱长分别为 $VA=a$,$VB=b$,$VC=c$,侧面顶角 $\angle BVC=\alpha$,$\angle AVC=\beta$,$\angle AVB=\gamma$,则三棱锥 $V-ABC$ 的体积为

$$V=\frac{1}{3}abc\cdot\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}}$$

证明　如图4,过 A 作 $AH\perp$ 平面 VBC 于 H,过 H 作 $HM\perp VB$ 于 M,$HN\perp VC$ 于 N,连结 AM,AN,MN,VH,则

$$AM \perp VB, AN \perp VC, AH \perp VH, VM = a\cos\gamma, VN = a\cos\beta$$

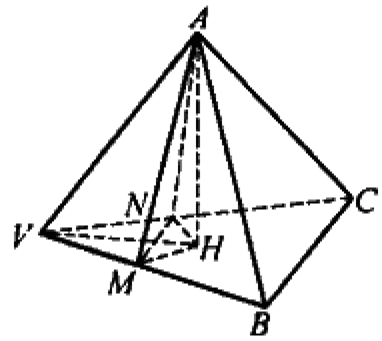


图4　三棱锥

从而

$$MN = \sqrt{(a\cos\gamma)^2 + (a\cos\beta)^2 - 2(a\cos\gamma)(a\cos\beta)\cos\alpha} =$$
$$a\sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

因为 V,M,H,N 四点在以 VH 为直径的圆上，即 VH 为 $\triangle VMN$ 外接圆的直径，所以

$$VH = \frac{MN}{\sin\angle BVC} = \frac{a\sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha}$$

所以　$AH = \sqrt{VA^2 - VH^2} =$

$$\frac{a(1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma)^{\frac{1}{2}}}{\sin\alpha}$$

从而三棱锥 $V - ABC$ 的体积为

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}bc\sin\alpha\right)\cdot AH =$$
$$\frac{1}{6}abc\cdot\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} =$$
$$\frac{1}{3}abc\cdot\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}}$$

特别地，当 $a = b = c = 1$ 时，可得问题139的几何体 $O - ABC$ 的体积

$$V(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\right.$$
$$\left.\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

从而
$$V(1,1,1) = \frac{1}{3}\sqrt{\sin\frac{3}{2}\sin^3\frac{1}{2}} \approx 0.110\,5$$

这说明问题139的猜测是错误的.

注　$1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma =$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$-\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha) - \cos^2\gamma + \cos\gamma[\cos(\alpha+\beta) +$$

$\cos(\alpha-\beta)]=[\cos(\alpha+\beta)-\cos\gamma][\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta)]=$

$[-2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}]\cdot$

$[-2\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}]=$

$4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}$

邢友金　江苏兴化市戴窑高级中学　225741

问题 154　全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》(2006年人民教育出版社)第99页习题第4题是:

某人开汽车沿一条直路以60 km/h的速度从 A 地到150 km远处的 B 地,在 B 地停留1 h后,再以50 km/h的速度返回 A 地.把汽车与 A 地的距离 x(km)表示为时间 t(h)(从 A 地出发时开始)的函数,并画出函数的图象;再把车速 v (km/h) 表示为时间 t(h) 的函数,并画出函数的图象.

与该教科书配套使用的《教师教学用书》第61页给出的答案是:

汽车与 A 地的距离 x(km) 表示为时间 t(h) 之间的函数关系式是

$$x=\begin{cases}60t, t\in[0,2.5]\\150, t\in[2.5,3.5]\\150-50(t-3.5), t\in[3.5,6.5]\end{cases}\quad ①$$

它的图象这里略去.

车速 v(km/h) 与时间 t(h) 的函数关系式是

$$v=\begin{cases}60, x\in[0,2.5)\\0, x\in[2.5,3.5)\\-50, x\in[3.5,6.5]\end{cases}\quad ②$$

它的图象这里也略去.

显然 ② 中的三个"x"均应改为"t",即应将 ② 改为

$$v=\begin{cases}60, t\in[0,2.5)\\0, t\in[2.5,3.5)\\-50, t\in[3.5,6.5]\end{cases}\quad ③$$

读者是否注意到 ①,③ 两个分段函数的分段区间的差异?笔者对分段函数 ③ 提出疑问:为什么 $t=2.5$ 时的瞬时速度是0而不是60呢?为什么 $t=3.5$ 时的瞬时速度是 -50 而不是0呢?

一般认为瞬时速度是位移函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数(见全日制普通高级中学教科书《数学·第三册(选修 Ⅱ)》(2004年人民教育出版社)第111页倒数第八行),而 $t=2.5$ 时的左导数是60,右导数是0,说明 $t=2.5$ 时的导数不存在.能否由此说明 $t=2.5$ 时的瞬时速度也不存在呢?$t=2.5$ 时的瞬时速度不存在

是否与该时刻物体在运动相矛盾呢?

《教师教学用书》用右导数表示瞬时速度,那么 $t = 6.5$ 时的瞬时速度是 0(因为 $t > 6.5$ 时,$s(t) = 0$).

请读者评析以上说法是否正确并给出完整的解决办法.

问题 157 很多文献都指出命题"若 p 则 q" 的否定不是"若 p 则 $\neg q$",而是"p 且 $\neg q$".那么命题"p 且 $\neg q$" 的题设和结论分别是什么呢?

命题"若 $x > 3$ 则 $x > 2$" 的否定应当是"$x > 3$ 且 $x \leqslant 2$",后者就不是命题(因为不能判断真假),那么其否定应当怎么说呢?是不是应当说成"若 $x > 3$ 则 $x \leqslant 2$"(只否定结论)呢?

命题"今天是星期一" 的否定是"今天不是星期一"(只否定结论)吗?命题"平行线相交" 的否定是"平行线不相交"(只否定结论)吗?

请读者对上述问题给出答案.

评析 该问题共收稿 3 篇,都对原问题作出了合理解释,下面的选登是最早收到的稿件.

选登 "若 p 则 q" 的否定是个较为复杂的问题,不能简单地认为就是"若 p 则 $\neg q$",那是对数理逻辑学不知晓的缘故;也不能一概认为就是文献上所说的 $p \wedge (\neg q)$,那又太教条了.在数理逻辑学中,命题逻辑和谓词逻辑讨论的对象是不同的,问题 157 正好涉及这两个概念.我们先从命题逻辑的角度来谈"若 p 则 q" 的否定.在命题"若 p 则 q" 中,如果 p,q 本身是命题,则叫做假言命题,属于命题逻辑讨论的对象,记做"$p \Rightarrow q$",它的否定是 $p \wedge (\neg q)$,其依据是下面的真值表.

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (\neg q)$	$p \Rightarrow \neg q$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1

我们知道,一个命题和它的否定命题的真假情况总是相反的.从表中可以看出,"$p \Rightarrow q$" 与"$p \wedge (\neg q)$" 的真假情况正好相反,而"$p \Rightarrow q$" 与"$p \Rightarrow \neg q$" 的真假情况并不总是相反.因此 $p \Rightarrow q$ 的否定命题是 $p \wedge (\neg q)$,而不是 $p \Rightarrow \neg q$.(在命题逻辑中,只要 p 为假,则不论 q 是真还是假,$p \Rightarrow q$ 都为真,即"假 $\Rightarrow$ 假" 为真,"假 $\Rightarrow$ 真" 也为真,这一点很重要.)这就是问题 157 所提到的,为什么有的文献说"若 p 则 q" 的否定是"$p \wedge (\neg q)$" 缘由,可见得它是针对假言命题而论的.

“命题的否定”与“否命题”不一样,“否命题”是命题的四种形式之一,具备“若 p 则 q”的形式,可清楚地看条件和结论:“命题的否定”却不然,它是对整个命题的否定,其形式不是假言命题,条件和结论未必直接显现,这就像问“复合命题 $p \wedge q$ 的条件是什么”一样,无法直接回答.

再从谓词逻辑的角度来谈“若 p 则 q”的否定.在“若 p 则 q”中,如果 p,q 是开语句,则属于谓词逻辑讨论的范畴.如命题“若 $x>3$ 则 $x>2$”中的“$x>3$”和“$x>2$”,这里“条件”和“结论”都不是命题,而是开语句,中学阶段所遇到的“若 p 则 q”大多属于这一类.如果把命题“若 $x>3$ 则 $x>2$”的否定说成是“$x>3$ 且 $x\leqslant 2$”,那是不问青红皂白,将讨论命题逻辑的方法机械地搬到了谓词逻辑中,当然不能判定其真假.

如果把命题“若 $x>3$ 则 $x>2$”的否定说成是“若 $x>3$ 则 $x\leqslant 2$”,那是完全错误的,套用这种否定法写命题“若 $x>3$ 则 $x>4$”的否定“若 $x>3$ 则,$x\leqslant 4$”,命题及其否定都变成假命题了!从谓词逻辑的角度来看,“若 $x>3$ 则 $x>2$”是省略了量词的全称肯定题(SAP),它对应中学课本里的“$\forall x\in M$,$p(x)$”全称型命题,实际意义为“对一切 $x>3$ 都有 $x>2$”,它的否定应该是特称否定命题(SOP):“存在 $x>3$ 且 $x\leqslant 2$”.问题157所提到的“平行线相交”,当然也是谓词逻辑讨论的对象,把它写成“若 p 则 q”形式就是“若 $a\parallel b$ 则 a 与 b 相交”,其实际意义为“所有的平行线都相交”,它的否定应该是“存在这样的平行线,它们不相交”.

“今天是星期一”与“平行线相交”这两个命题不能相提并论,前者是简单命题,要用命题逻辑的方法来讨论,它的否定可以直接用否定词:“今天不是星期一”(类似于“15能被3整除”的否定是“15不能被3整除”);而“平行线相交”则是省略了量词的全称命题,它的否定应从谓词逻辑的角度去考虑.(如上)

综上所述,当 p,q 是命题时,“$p\Rightarrow q$”的否定是“p 且 $\neg q$”;当 p,q 是开语句时,对于省略全称量词的命题“若 p 则 q”而言,它的否定是“存在 p,且 $\neg q$”;对于简单命题,直接用否定词进行否定.由于没有哪一本数理逻辑学的书籍系统阐述“若 p 则 q”的否定,所以在考虑命题的否定时常常会遇到一些困惑,以上只是一家之言,仅供参考.

缪选民 江苏省泰州市海陵区教育局教研室 225300

对一个问题的研究

笔者在《数学通讯》2007年第11期“争鸣”栏的问题139中提出(以下猜测的叙述较原文更明了):

猜测 设 A,B,C 是半径为1的球面上的三点,O 是球心,且 $\angle BOC=\alpha$, $\angle COA=\beta$,$\angle AOB=\gamma$,$\alpha,\beta,\gamma\in(0,2\pi]$,则几何体 $O-ABC$(指三棱锥 $O-ABC$ 与体积不超过半球的球缺ABC 上的一部分(本文记作伪球缺 ABC)的组合体,下同)的体积是

$$V_{(\alpha,\beta,\gamma)}=\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{\beta}{2\pi}\cdot\frac{\gamma}{2\pi}V_{球} \quad ①$$

刑友金老师在该刊2008年第1期“争鸣”栏的“评析问题139”中求出了

$$V_{三棱锥O-ABC}=\frac{1}{3}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}}$$

$$\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi) \quad ②$$

进而可以否定此猜测.

事实上,过球心 O 作三个两两互相垂直的平面就把球O分成八块相同的几何体,可设其中的一块是几何体 $O-ABC$(相当于猜测中的 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$),则

$$V_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{8}V_{球}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}V_{球}$$

这也否定了此猜测.但由此笔者又提出:

猜想 猜测中的式①应修正为

$$V_{(\alpha,\beta,\gamma)}=\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\beta}{\pi}\cdot\frac{\gamma}{\pi}V_{球} \quad ③$$

定理1 若 α,β,γ 中有两个为$\frac{\pi}{2}$,则猜想③成立.

证明 不妨设 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$.把半球 O 从球心 O 处分割成 2π 等“份”,则每一等份的几何体就是猜想中 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$,$\gamma=1$ 的情形,所以

$$V_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\gamma)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} V_{球} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} V_{球}$$

说明此时 ③ 成立.请读者再研究其余的情形.

定理 2 在 ③ 中,若 $\alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi)$,则三棱锥 $O-ABC$ 的高

$$OH = \sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}}{(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2})(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2})(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2})(-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2})}} \quad ④$$

证明 在三棱锥 $O-ABC$ 中,作 $OH \perp$ 平面 ABC.

由 $OA = OB = OC = 1, \angle BOC = \alpha, \angle COA = \beta, \angle AOB = \gamma, \alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi)$,得 $BC = 2\sin\frac{\alpha}{2}, CA = 2\sin\frac{\beta}{2}, AB = 2\sin\frac{\gamma}{2}$.由海伦公式,得

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2})(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2})} \cdot \sqrt{(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2})(-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2})}$$

再用体积法可求出三棱锥 $O-ABC$ 的高 OH 由式 ④ 确定.

本文再提出新的有趣问题:

问题 在猜想 ③ 中如何求 $V_{伪球缺ABC}$?请研究$\frac{1}{3}(V_{球缺ABC} - V_{伪球缺ABC})$对应的几何体.

《数学通讯》问题征解第 145 题的解答

《数学通讯》问题征解栏刊登的第 145 题(黑龙江曹珍富提供)是:

设 a 是正整数,$k = 2^{a+2} - 2$,$\{u_n\}$ 是由下式定义的整数序列:$u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = ku_{n+1} - u_n, n = 0,1,2,\cdots$.求证:当 $n \geqslant 2$ 时,u_n 至少含有两个不同的素因子.

下面给出解答.

定理 1 $u_n = \frac{1}{\sqrt{k^2-4}}\left[\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^n\right]$.

定理 2 $u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2$.(用定理 1 可证)

定理 3 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时,$u_{2n-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{2n-i-2}^i k^{2n-2i-2}$,$u_{2n} = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{2n-i-1}^i k^{2n-2i-1}$.

证明 用数学归纳法证明这两式同时成立.

$n = 1$ 时成立.

假设 $n = m$ 时成立,即

$$u_{2m-1} = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i C_{2m-i-2}^i k^{2m-2i-2} \quad ①$$

$$u_{2m} = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i C_{2m-i-1}^i k^{2m-2i-1} \quad ②$$

得 $u_{2m+1} = ku_{2m} - u_{2m-1} =$

$$k\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i C_{2m-i-1}^i k^{2m-2i-1} - \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i C_{2m-i-2}^i k^{2m-2i-2} =$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i C_{2m-i-1}^i k^{2m-2i} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i C_{2m-i-1}^{i-1} k^{2m-2i} =$$

$$k^{2m} + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i C_{2m-i}^i k^{2m-2i} + (-1)^m =$$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_{2m-i}^i k^{2m-2i} \quad ③$$

$u_{2m+2} = ku_{2m+1} - u_{2m} =$

$$k\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_{2m-i}^{i}k^{2m-2i}-\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i C_{2m-i-1}^{i}k^{2m-2i-1}(\text{用③})=$$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_{2m-i}^{i}k^{2m-2i+1}+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i C_{2m-i}^{i-1}k^{2m-2i+1}=$$

$$k^{2m+1}+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i C_{2m-i+1}^{i}k^{2m-2i+1}=$$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_{2m-i+1}^{i}k^{2m-2i+1} \tag{④}$$

由③④知 $n=m+1$ 时也成立,所以定理3成立.

定理4 设 $n,a\in \mathbf{N}^*$, $k=2^{a+2}-2$,则:

(1) $2\nmid u_{2n-1}$, $2\mid u_{2n}$, $2\nmid u_{n+1}\pm u_n$.

(2) $k\mid u_{2n}$.

证明 由定理3,得

$$u_{2n-1}=k^2\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i C_{2n-i-2}^{i}k^{2n-2i-4}+(-1)^{n-1}, n\geqslant 2$$

因为 $2\mid k$,所以当 $n\geqslant 2$ 时, $2\nmid u_{2n-1}$. 当 $n=1$ 时,也有 $2\nmid u_{2n-1}$.

$$u_{2n}=k\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{2n-i-1}^{i}k^{2n-2i-2}$$

所以 $k\mid u_{2n}$,又 $2\mid k$,所以 $2\mid u_{2n}$.

因为 $n+1$ 与 n 一奇一偶,所以 u_{n+1} 与 u_n 也一奇一偶,得 $2\nmid u_{n+1}\pm u_n$.

定理5 $(u_{n+1},u_n)=1$.

证明 $(u_{n+1},u_n)=(ku_n-u_{n-1},u_n)=(u_n,u_{n-1})$,所以

$$(u_{n+1},u_n)=(u_1,u_0)=(1,0)=1$$

定理6 $u_{n+1}>u_n$.(用 $k=2^{a+2}-2$)

证明 $n=0$ 时成立.

假设 $n=m$ 时成立,即

$$u_{m+1}>u_m$$

$$u_{m+2}=ku_{m+1}-u_m>ku_{m+1}-u_{m+1}=$$

$$(k-1)u_{m+1}=(2^{a+2}-3)u_{m+1}>u_{m+1}$$

得 $m+1$ 时成立,所以定理6成立.

定理7 当 $n\geqslant 1$ 时, $u_{n+1}+u_n>u_{n+1}-u_n>1$.(用 $k=2^{a+2}-2$)

证明 用定理6可证 $u_n\geqslant 1$,所以

$$u_{n+1}+u_n>u_{n+1}-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=ku_n-u_{n-1}-u_n\geqslant(k-2)u_n=(2^{a+2}-4)u_n\geqslant 2^{a+2}-4>1$$

得定理7成立.

定理 8 当 $n \geqslant 1$ 时，u_{2n+1} 至少含有两个不同的素因子.

证明
$$(u_{n+1}+u_n, u_{n+1}-u_n) \mid (2u_{n+1}, 2u_n)$$
由定理 5，得
$$(2u_{n+1}, 2u_n) = 2(u_{n+1}, u_n) = 2$$
又由定理 4(1)，得 $2 \nmid u_{n+1} \pm u_n$，所以
$$(u_{n+1}+u_n, u_{n+1}-u_n) = 1$$
$u_{n+1}+u_n$ 与 $u_{n+1}-u_n$ 没有相同的素因子.

由定理 7 知，$u_{n+1}+u_n$ 与 $u_{n+1}-u_n$ 均有素因子，所以 $u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_{n+1}+u_n)(u_{n+1}-u_n)$ 至少含有两个不同的素因子.

定理 9 u_{2n} 至少含有两个不同的素因子.

证明 由定理 4(2)，得 $k \mid u_{2n}$，又 $k = 2(2^{a+1}-1)$，所以 u_{2n} 至少含有两个不同的素因子：2 及 $2^{a+1}-1$ 的任一素因子.

由定理 8,9 知，题 145 的结论成立.

《湖南数学通讯》中学数学问题2的解答

《湖南数学通讯》1995年第2期刊登的中学数学问题2是:

给定非负整数 n,试求出所有的整数 a,使得关于 x 的多项式 $x^{n+2}+(x+a)^{2n+1}$ 能被 x^2+x+a 整除.

下面给出此题的完整解答.为节省篇幅,省去了一些定理的证明.本文中的整除,均指关于 x 的多项式的整除.

定理1 (1) $x^2+x+1 \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}(n\in \mathbf{N})$.

(2) $x^2+x \mid x^{2k+2}+x^{4k+1}(k\in \mathbf{N})$.

证明 (1) 由 $x^3\equiv 1(\bmod x^2+x+1)$,得(当 $n\in \mathbf{N}^*$ 时)

$$\begin{aligned} x^{n+2}+(x+1)^{2n+1} &\equiv x^{n-1}\cdot 1+(x+1)(x^2+x+1+x)^n \equiv \\ & x^{n-1}+(x+1)x^n \equiv \\ & x^{n-1}(x^2+x+1)\equiv 0(\bmod x^2+x+1). \end{aligned}$$

得 $n\in \mathbf{N}^*$ 时,结论(1)成立.进而可得 $n\in \mathbf{N}$ 时,结论(1)也成立.

(2) 即 $x(x+1)\mid x^{2k+2}(1+x^{2k-1})$,易知成立.

定理2

$$\begin{aligned} (x+a)^{2n+1} = &(x^2+x+a)\sum_{k=0}^{2n-1}\Big[\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_{2n+k+1-i}^{i}a^i\Big]x^{2n-1-k} + \\ &\Big[\sum_{i=0}^{2n}(-1)^iC_{4n+1-i}^{i}a^i\Big]x + \\ &\sum_{i=0}^{2n}(-1)^iC_{4n-i}^{i}a^{i+1}(n\in \mathbf{N}^*) \end{aligned}$$

定理3

$$\begin{aligned} (1)x^{2k+2} = &(x^2+x+a)\Big\{\sum_{i=0}^{k}\Big[\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_{2i-j}^{j}a^j\Big]x^{2k-2i} - \\ &\sum_{i=0}^{k-1}\Big[\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_{2i+1-j}^{j}a^j\Big]x^{2k-2i-1}\Big\} - \\ &\Big[\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{2k+1-i}^{i}a^i\Big]x - \\ &\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{2k-i}^{i}a^{i+1}(k\in \mathbf{N}^*); \end{aligned}$$

$$(2)x^{2k+3} = (x^2+x+a)\Big\{\sum_{i=0}^{k}\Big[\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_{2i-j}^{j}a^j\Big]x^{2k+1-2i} -$$

$$\sum_{i=0}^{k}\left[\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j}C_{2i+1-j}^{j}a^{j}\right]x^{2k-2i}\Big\}+$$
$$\left[\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{i}C_{2k+2-i}^{i}a^{i}\right]x+$$
$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}C_{2k+1-i}^{i}a^{i+1}(k\in\mathbf{N})$$

证明 (1) 对 k 用数学归纳法可证.

(2) 用结论(1) 可证.

由定理 2,3,可得:

定理 4 (1) 若 $k\in\mathbf{N}^*$,则 $x^{2k+2}+(x+a)^{4k+1}$ 除以 x^2+x+a 的余式是

$$\left[\sum_{i=0}^{4k}(-1)^{i}C_{8k+1-i}^{i}a^{i}-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}C_{2k+1-i}^{i}a^{i}\right]x+$$
$$\left[\sum_{i=0}^{4k}(-1)^{i}C_{8k-i}^{i}a^{i+1}-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}C_{2k-i}^{i}a^{i+1}\right]$$

从而,得 $x^2+x+a\mid x^{2k+2}+(x+a)^{4k+1}$ 的充要条件是

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=k}^{4k-1}(-1)^{i}C_{8k-i}^{i+1}a^{i}+\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}(C_{8k-i}^{i+1}-C_{2k-i}^{i+1})a^{i}=0\\ \sum\limits_{i=k}^{4k-1}(-1)^{i}C_{8k-i-1}^{i+1}a^{i}+\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}(C_{8k-i-1}^{i+1}-C_{2k-i-1}^{i+1})a^{i}=0\end{cases}$$

或 $a=0$.

(2) 若 $k\in\mathbf{N}$,则 $x^{2k+3}+(x+a)^{4k+3}$ 除以 x^2+x+a 的余式是

$$\left[\sum_{i=0}^{4k+2}(-1)^{i}C_{8k+5-i}^{i}a^{i}+\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{i}C_{2k+2-i}^{i}a^{i}\right]x+$$
$$\left[\sum_{i=0}^{4k+2}(-1)^{i}C_{8k+4-i}^{i}a^{i+1}+\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}C_{2k+1-i}^{i}a^{i+1}\right]$$

从而,得 $x^2+x+a\mid x^{2k+3}+(x+a)^{4k+3}$ 的充要条件是

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=k+2}^{4k+2}(-1)^{i}C_{8k+5-i}^{i}a^{i}+\sum\limits_{i=0}^{k+1}(-1)^{i}(C_{8k+5-i}^{i}+C_{2k+2-i}^{i})a^{i}=0\\ \sum\limits_{i=k+1}^{4k+2}(-1)^{i}C_{8k+4-i}^{i}a^{i}+\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{i}(C_{8k+4-i}^{i}+C_{2k+1-i}^{i})a^{i}=0\end{cases} \qquad ①$$

定理 5 若 $k\in\mathbf{N}, a\in\mathbf{Q}$,则 $x^2+x+a\mid x^{2k+3}+(x+a)^{4k+3}$ 的充要条件是 $a=1$.

证明 由定理 1(1) 知,充分性成立.

必要性 即证满足 $x^2+x+a\mid x^{2k+3}+(x+a)^{4k+3}$ 的有理数 a 不能为 1 以外的数.用定理 4(2) 来证.

当 $k = 0$ 时,得 $3a^2 - 5a + 2 = a^2 - 3a + 2 = 0$,所以 $a = 1$.

当 $k = 1$ 时,① 即

$$a^6 - 21a^5 + 70a^4 - 84a^3 + 45a^2 - 13a + 2 = 0 \qquad ②$$

方程 ① 的各项符号正负相间,所以其根为正数;方程 ② 的首项系数为 1,所以其有理根为整数;方程 ② 的常数项为 2,所以其有理根 $a = 1$ 或 2.

若 $a = 2$,得 $8 \mid 45 \times 4 - 13 \times 2 + 2$,这不可能!所以 $a \neq 2$.

当 $k = 2$ 时,得

$$\sum_{i=3}^{10}(-1)^i C_{20-i}^{i} a^i + \sum_{i=0}^{2}(-1)^i (C_{20-i}^{i} + C_{5-i}^{i}) a^i = 0$$

$$a^{10} - \cdots + 156a^2 - 23a + 2 = 0$$

得有理根 $a = 1$ 或 2.若 $a = 2$,得 $8 \mid 156 \times 4 - 23 \times 2 + 2$,这不可能!所以 $a \neq 2$.

当 $k \geqslant 3$ 时,a 应为方程 ① 的有理根,所以 $a = 1$ 或 2.若 $a = 2$,得

$$\sum_{i=k+1}^{4k+2}(-1)^i C_{8k+4-i}^{i} 2^i + \sum_{i=3}^{k}(-1)^i (C_{8k+4-i}^{i} + C_{2k+1-i}^{i}) 2^i + 4(34k^2 + 9k + 2) - 2(10k + 3) + 2 = 0$$

所以 $8 \mid 4(34k^2 + 9k + 2) - 2(10k + 3) + 2$,$8 \mid -4$,这不可能!所以 $a \neq 2$.

必要性也成立.

定理 6 设 $k \in \mathbf{N}^*$,$a \neq 0$,$x^2 + x + a \mid x^{2k+2} + (x + a)^{4k+1}$,则当 $t = 0, 1, \cdots, k - 1$ 时,有以下两式均成立:

(1) $\displaystyle\sum_{i=k-t}^{4k-t-1}(-1)^i C_{8k-i-2t}^{i+1} a^i + \sum_{i=0}^{k-t-1}(-1)^i (C_{8k-i-2t}^{i+1} - C_{2k-i-2t}^{i+1}) a^i = 0$.

(2) $\displaystyle\sum_{i=k-t}^{4k-t-1}(-1)^i C_{8k-i-2t-1}^{i+1} a^i + \sum_{i=0}^{k-t-1}(-1)^i (C_{8k-i-2t-1}^{i+1} - C_{2k-i-2t-1}^{i+1}) a^i = 0$.

证明 用数学归纳法证明这两式同时成立.

由定理 4(1) 可得 $t = 0$ 时(1),(2) 均成立.

假设 t 时(1),(2) 均成立,再由 $a \neq 0$,得

$$\sum_{i=k-t}^{4k-t-1}(-1)^{i-1} C_{8k-i-2t-1}^{i} a^{i-1} + \sum_{i=1}^{k-t-1}(-1)^{i-1} (C_{8k-i-2t-1}^{i} - C_{2k-i-2t-1}^{i}) a^{i-1} = 0$$

$$\sum_{i=k-t-1}^{4k-t-2}(-1)^i C_{8k-i-2t-2}^{i+1} a^i + \sum_{i=0}^{k-t-2}(-1)^i (C_{8k-i-2t-2}^{i+1} - C_{2k-i-2t-2}^{i+1}) a^i = 0$$

$$\sum_{i=k-t}^{4k-t-1}(-1)^i C_{8k-i-2t-2}^{i+1} a^i + \sum_{i=0}^{k-t-1}(-1)^i (C_{8k-i-2t-2}^{i+1} - C_{2k-i-2t-2}^{i+1}) a^i = 0$$

$$\sum_{i=k-t-1}^{4k-t-2}(-1)^i C_{8k-i-2t-3}^{i+1} a^i + \sum_{i=0}^{k-t-2}(-1)^i (C_{8k-i-2t-3}^{i+1} - C_{2k-i-2t-3}^{i+1}) a^i = 0$$

从而可得(1),(2)均在 $t+1$ 时成立,所以(1),(2)均成立.

定理 7 若 $k\in\mathbf{N}^*$, $x^2+x+a\mid x^{2k+2}+(x+a)^{4k+1}$, 则 $\sum\limits_{i=0}^{3k-1}(-1)^iC_{6k-i-1}^{i}a^i=0$ 或 $a=0$.

证明 当 $a\neq 0$ 时,在定理 6 中取 $t=k-1$,得

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3k}(-1)^iC_{6k-i+2}^{i+1}a^i+6k=0\\ \sum\limits_{i=1}^{3k}(-1)^iC_{6k-i+1}^{i+1}a^i+6k=0\end{cases}$$

所以
$$\sum_{i=0}^{3k-1}(-1)^iC_{6k-i}^{i+1}a^i=0$$
$$\sum_{i=0}^{3k-1}(-1)^iC_{6k-i-1}^{i+1}a^i=0$$
$$\sum_{i=0}^{3k-1}(-1)^iC_{6k-i-1}^{i}a^i=0$$

定理 7 成立.

定理 8 若 $k\in\mathbf{N}^*$, $a\in\mathbf{Q}$,则 $x^2+x+a\mid x^{2k+2}+(x+a)^{4k+1}$ 的充要条件是 $a=1$ 或 0.

证明 由定理 1 知充分性成立.

必要性 因为定理7的结论中第一个方程的各项符号正负相间,首项系数的绝对值为 1,常数项为 1,所以其有理根 $a=1$,必要性成立.

由定理 5,8,得:

定理 9 若 $a\in\mathbf{Q}$,则 $x^2+x+a\mid x^{n+2}+(x+a)^{2n+1}$ 的充要条件是

(1) 当 $n=0$ 时, a 为任意有理数.

(2) 当 n 为正偶数时, $a=0$ 或 1.

(3) 当 n 为正奇数时, $a=1$.

定理 9 给出了本文开头问题的完整答案.

对一个问题的部分解答

问题　记$f(n,i)=7^{n-i}-9^{i-1}$,$1\leqslant i<j\leqslant n$,$2^k\parallel j-i$,$i,j,n,k\in\mathbf{N}^*$,设$2^u\parallel f(n,i)-f(n,j)$,求出$u$(对于任意已知的$k,i,j,n$).猜测:

(1) 当n奇,i,j奇时,$u=k+6$.

(2) 当n奇,i,j偶时,$u=k+4$.

(3) 当n偶,i,j奇时,$u=k+4$.

(4) 当n偶,i,j偶时,$u\geqslant k+7$.

(这里$2^k\parallel c$指$2^k\mid c$且$2^{k+1}\nmid c$;n奇指n为奇数,其余类同.)

以上猜测成立,证明如下.

设$j-i=2^ka$,$a\in\mathbf{N}^*$,a奇.

$$\begin{aligned}f(n,i)-f(n,j)=&(7^{n-i}-7^{n-j})+(9^{j-1}-9^{i-1})=\\&7^{n-j}(7^{2^ka}-1)+9^{i-1}(9^{2^ka}-1)=\\&2^{k+3}\left(7^{n-j}\cdot\frac{7-1}{2}\cdot\frac{7+1}{2^3}\cdot\prod_{l=1}^{k-1}\frac{7^{2^l}+1}{2}\cdot\frac{7^{2^ka-1}}{7^{2^k}-1}+\right.\\&\left.9^{i-1}\cdot\frac{9-1}{2^3}\cdot\frac{9+1}{2}\cdot\prod_{l=1}^{k-1}\frac{9^{2^l}+1}{2}\cdot\frac{9^{2^ka}-1}{9^{2^k}-1}\right)=\\&2^{k+3}\left(7^{n-j}\cdot3\prod_{l=1}^{k-1}\frac{7^{2^l}+1}{2}\cdot\frac{7^{2^k}a-1}{7^{2^k}-1}+\right.\\&\left.9^{i-1}\cdot5\prod_{l=1}^{k-1}\frac{9^{2^l}+1}{2}\cdot\frac{9^{2^k}a-1}{9^{2^k}-1}\right)\end{aligned}\qquad①$$

在式①中还约定:当$k=1$时,$\prod\limits_{l=1}^{k-1}\frac{7^{2^l}+1}{2}=\prod\limits_{l=1}^{k-1}\frac{9^{2^l}+1}{2}=1$.这样,当$k\in\mathbf{N}^*$时,式①均成立.

由$7^4\equiv1(\bmod 32)$,得

$$7^{2^l}=(7^4)^{2^{l-2}}\equiv1(\bmod 32)(l\geqslant2)$$

$$\frac{7^{2^l}+1}{2}\equiv1(\bmod 16)(l\geqslant2)$$

$$\prod_{l=1}^{k-1}\frac{7^{2^l+1}}{2}\equiv9(\bmod 16)(k\geqslant3)$$

可验证此式在 $k \geqslant 2$ 时也成立

$$\prod_{l=1}^{k-1} \frac{7^{2^l}+1}{2} \equiv 9 \pmod{16} \quad (k \geqslant 2) \tag{②}$$

由 $7^2 \equiv 1 \pmod{16}$，得

$$7^{2^k} \equiv 1 \pmod{16}$$

$$\frac{7^{2^k a}-1}{7^{2^k}-1} = 7^{2^k(a-1)} + 7^{2^k(a-2)} + \cdots + 7^{2^k} + 1 \equiv a \pmod{16} \tag{③}$$

由 ②③，得

$$7^{n-j} \cdot 3 \prod_{l=1}^{k-1} \frac{7^{2^k a}+1}{2} \cdot \frac{7^{2^k a}-1}{7^{2^k}-1} \equiv \begin{cases} 7^{n-j} \cdot 27a & (k \geqslant 2) \\ 7^{n-j} \cdot 3a & (k = 1) \end{cases} \pmod{16} \tag{④}$$

同理，有

$$9^{i-1} \cdot 5 \prod_{l=1}^{k-1} \frac{9^{2^k a}+1}{2} \cdot \frac{9^{2^k a}-1}{9^{2^k}-1} \equiv \begin{cases} 9^{i-1} \cdot 5a & (k = 1) \\ 9^{i-1} \cdot 45a & (k \geqslant 2) \end{cases} \pmod{16} \tag{⑤}$$

由 ①④⑤，得

$$\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+3}} \equiv \begin{cases} 7^{n-j} \cdot 3a + 9^{i-1} \cdot 5a & (k = 1) \\ -7^{n-j} \cdot 5a - 9^{i-1} \cdot 3a & (k \geqslant 2) \end{cases} \pmod{16} \tag{⑥}$$

$$\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+3}} \equiv 3a(7^{n-j} - 9^{i-1}) \pmod{8} \tag{⑦}$$

(1) 得 $n-j, i-1$ 偶.

由 $7^2 \equiv 1 \pmod{16}$，得 $7^{n-j} = (7^2)^{\frac{n-j}{2}} \equiv 1 \pmod{16}$，同理，有 $9^{i-1} \equiv 1 \pmod{16}$.

由式 ⑥，得

$$\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+3}} \equiv \pm 8a \equiv 8 \pmod{16}$$

$$\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+6}} \equiv 1 \pmod{2}$$

$$2^{k+6} \parallel f(n,i) - f(n,j)$$

所以 $u = k+6$，结论(1)成立.

(2)(3) 得 $n-j$ 奇.

由 $7 \equiv -1 \pmod{8}$，得 $7^{n-j} \equiv (-1)^{n-j} = -1 \pmod{8}$.

由 $9 \equiv 1 \pmod{8}$，得 $9^{i-1} \equiv 1 \pmod{8}$.

由式 ⑦，得 $\dfrac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+3}} \equiv 2a \pmod{8}$，所以

$$\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+4}} \equiv a \pmod{4} \tag{⑧}$$

由 a 奇,得 $2^{k+4} \parallel f(n,i)-f(n,j)$, $u=k+4$,所以结论(2)(3)均成立.并且式⑧是它们的加强.

(4)得 $n-j$ 偶, $i-1$ 奇,所以

$$7^{n-j} \equiv 1, 9^{i-1} \equiv 9 \pmod{16}$$

由式⑥,得 $\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+3}} \equiv 0 \pmod{16}$,所以 $2^{k+7} \mid f(n,i)-f(n,j)$, $u \geqslant k+7$.

这就证明了四条猜测均成立.

问题中还未求出 n 偶, i,j 偶时的结论.下面再给出关于此的部分结论.

得 $n-j$ 偶, $i-1$ 奇.

$$7^{n-j}=49^{\frac{n-j}{2}} \equiv \begin{cases}1 & (4 \mid n-j) \\ 17 & (2 \parallel n-j)\end{cases} \pmod{32} \tag{9}$$

当 $l=1$ 时, $\frac{7^{2^l}+1}{2} \equiv 25 \pmod{32}$;

当 $l=2$ 时, $\frac{7^{2^l}+1}{2} \equiv 17 \pmod{32}$;

当 $l \geqslant 3$ 时, $\frac{7^{2^l}+1}{2} \equiv 1 \pmod{32}$.

所以

$$\prod_{l=1}^{k-1} \frac{7^{2^l}+1}{2} \equiv \begin{cases}1 & (k=1) \\ 25 & (k=2) \\ 9 & (k \geqslant 3)\end{cases} \pmod{32} \tag{10}$$

$$\frac{7^{2^k a}-1}{7^{2^k}-1}=7^{2^k(a-1)}+7^{2^k(a-2)}+\cdots+7^{2^k}+1 \equiv$$

$$\begin{cases}17^{a-1}+17^{a-2}+\cdots+17+1 \equiv \begin{cases}a & (4 \mid a-1) \\ a+16 & (2 \parallel a-1)\end{cases} & (k=1) \\ a & (k \geqslant 2)\end{cases} \pmod{32} \tag{11}$$

只证:① 当 $a=4u+1$ ($u \in \mathbf{N}$,下同)时, $32 \mid \frac{17^a-1}{16}-a$;

② 当 $a=4u+3$ 时, $32 \mid \frac{17^a-1}{16}-a-16$.

即证:① $2^9 \mid 17^{4u+1}-1-16(4u+1)$;

② $2^9 \mid 17^{4u+3}-1-16(4u+19)$.

这可用数学归纳法证明.

由⑨⑩⑪,得

$$7^{n-j} \cdot 3\prod_{l=1}^{k-1} \frac{7^{2^l}+1}{2} \cdot \frac{7^{2^k a}-1}{7^{2^k}-1} \equiv$$

$$\begin{cases} 3a & (k=1,4\mid a-1,4\mid n-j) \\ 51a & (k=1,4\mid a-1,2\parallel n-j) \\ 3(a+16) & (k=1,2\parallel a-1,4\mid n-j) \\ 51(a+16) & (k=1,2\parallel a-1,2\parallel n-j) \\ 75a & (k=2,4\mid n-j) \\ 1275a & (k=2,2\parallel n-j) \\ 27a & (k\geqslant 3,4\mid n-j) \\ 459a & (k\geqslant 3,2\parallel n-j) \end{cases} \pmod{32} \quad ⑫$$

$$9^{i-1}\equiv\begin{cases}25 & (4\mid i)\\ 9 & (2\parallel i)\end{cases} \pmod{32} \quad ⑬$$

当 $l=1$ 时，$\frac{9^{2^l}+1}{2}\equiv 9 \pmod{32}$；

当 $l=2$ 时，$\frac{9^{2^l}+1}{2}\equiv 17 \pmod{32}$；

当 $l\geqslant 3$ 时，$\frac{9^{2^l}+1}{2}\equiv 1 \pmod{32}$.

所以
$$\prod_{l=1}^{k-1}\frac{9^{2^l}+1}{2}\equiv\begin{cases}1 & (k=1)\\ 9 & (k=2)\\ 25 & (k\geqslant 3)\end{cases} \pmod{32} \quad ⑭$$

$$\frac{9^{2^k a}-1}{9^{2^k}-1}=9^{2^k(a-1)}+9^{2^k(a-2)}+\cdots+9^{2^k}+1\equiv$$

$$\begin{cases}17^{a-1}+17^{a-2}+\cdots+17+1\equiv\begin{cases}a & (4\mid a-1)\\ a+16 & (2\parallel a-1)\end{cases} & (k=1)\\ a & (k\geqslant 2)\end{cases} \pmod{32} \quad ⑮$$

由⑬⑭⑮，得

$$9^{i-1}\cdot 5\prod_{l=1}^{k-1}\frac{9^{2^l}+1}{2}\cdot\frac{9^{2^k a}-1}{9^{2^k}-1}\equiv\begin{cases} 125a & (k=1,4\mid a-1,4\mid i) \\ 45a & (k=1,4\mid a-1,2\parallel i) \\ 125(a+16) & (k=1,2\parallel a-1,4\mid i) \\ 45(a+16) & (k=1,2\parallel a-1,2\parallel i) \\ 1125a & (k=2,4\mid i) \\ 405a & (k=2,2\parallel i) \\ 3125a & (k\geqslant 3,4\mid i) \\ 1125a & (k\geqslant 3,2\parallel i) \end{cases} \pmod{32}$$

⑯

由⑫⑯，得

当 $k=1,4\mid a-1,4\mid n-j,2\parallel i$；$k=1,4\mid a-1,2\parallel n-j,4\mid i$；$k=1,$

$2 \parallel a-1, 4 \mid n-j, 2 \parallel i; k=1, 2 \parallel a-1, 2 \parallel n-j, 4 \mid i; k=2, 4 \mid n-j, 4 \mid i; k=2, 2 \parallel n-j, 2 \parallel i; k \geqslant 3, 4 \mid n-j, 4 \mid i; k \geqslant 3, 2 \parallel n-j, 2 \parallel i$ 时

$$7^{n-j} \cdot 3\prod_{l=1}^{k-1} \frac{7^{2^l}+1}{2} \cdot \frac{7^{2^k a}-1}{7^{2^k}-1} + 9^{i-1} \cdot 5\prod_{l=1}^{k-1} \frac{9^{2^l}+1}{2} \cdot \frac{9^{2^k a}-1}{9^{2^k}-1} =$$

$$\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+3}} \equiv 16 \pmod{32}$$

$$\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+7}} \equiv 1 \pmod{2}$$

$2^{k+7} \parallel f(n,i)-f(n,j)$

在 ⑰ 的诸种情形,均有

$$u = k+7 \tag{18}$$

由 ⑫⑯,还可得 n,i,j 偶,除了 ⑰ 的情形,即

当 $k=1, 4 \mid a-1, 4 \mid n-j, 4 \mid i; k=1, 4 \mid a-1, 2 \parallel n-j, 2 \parallel i; k=1, 2 \parallel a-1, 4 \mid n-j, 4 \mid i; k=1, 2 \parallel a-1, 2 \parallel n-j, 2 \parallel i; k=2, 4 \mid n-j, 2 \parallel i; k=2, 2 \parallel n-j, 4 \mid i; k \geqslant 3, 4 \mid n-j, 2 \parallel i; k \geqslant 3, 2 \parallel n-j, 4 \mid i$ 时 ⑲

$$7^{n-j} \cdot 3\prod_{l=1}^{k-1} \frac{7^{2^l+1}}{2} \cdot \frac{7^{2^k a-1}}{7^{2^k}-1} + 9^{i-1} \cdot 5\prod_{l=1}^{k-1} \frac{9^{2^l+1}}{2} \cdot \frac{9^{2^k a-1}}{9^{2^k}-1} =$$

$$\frac{f(n,i)-f(n,j)}{2^{k+3}} \equiv 0 \pmod{32}$$

$$2^{k+8} \mid f(n,i)-f(n,j)$$

⑲ 的诸种情形,均有

$$u \geqslant k+8 \tag{20}$$

要想得到问题的完整解答,可以从结论 ⑳ 继续讨论下去,但这是复杂的,得到的结论也会很复杂,笔者猜测:

记 $f(n,i) = 7^{n-i} - 9^{i-1}, 1 \leqslant i < j \leqslant n, 2^k \parallel j-i$,则对于任意的 $k, r \in \mathbf{N}^*$,均存在偶数 i,j,n,使得 $2^{k+r} \mid f(n,i)-f(n,j)$.

数学应用



一道合理选址问题的推广

2001 年第 8 期《中学生数学(高中版)》第 19 页《合理选址问题的求解两例》一文(作者夏国华)的例 2 是一个有意义的问题:

如图 1,A 地产汽油,B 地的汽油需从产油地 A 运入,汽车自 A 地运汽油往 B 地,往返的油耗正好等于其满载汽油的吨数,故无法将汽油运至 B 地.为解决问题,在途中 C 地设一油库为中间站,先由往返于 A,C 间的汽车将油运至 C 地,再由往返于 C,B 间的汽车将油运至 B 地.问当 C 站设在何处时运油率(即 B 地收到的汽油量除以 A 地运出的汽油量)最大,最大值是多少?

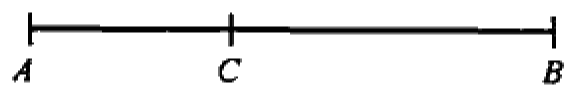


图 1

该文得到的答案是:C 站设在 A,B 两地的中点处时,运油率最大,其最大值是 25%.

本文将解答以上问题的推广问题:如图 2,若在以上问题中从 A 到 B 依次设 n 个中间站 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 时,问这些中间站设在何处时运油率最大,最大值是多少?

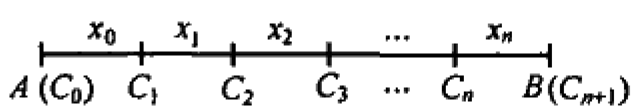


图 2

解 设 $AB = s$(AB 表示 A,B 间的路程,下同),把 A,B 两点又分别记作 C_0, C_{n+1},又设 $C_iC_{i+1} = x_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$,有 $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$,$x_i \geqslant 0$.

设每辆车的载油量为 1,则单位路程汽车耗油量为$\frac{1}{2s}$,每辆汽车自 C_0 运至 C_1(往返)的耗油量为:$2x_0 \cdot \frac{1}{2s} = \frac{x_0}{s}$,所以 1 车油自 C_0 运到 C_1 能剩余的油为 $1 - \frac{x_0}{s}$.

同理,1 车油自 C_1 运到 C_2 能剩余的油为 $1 - \frac{x_1}{s}$,1 车油自 C_2 运到 C_3 能剩余的油为 $1 - \frac{x_2}{s}, \cdots$,1 车油自 C_n 运到 C_{n+1} 能剩余的油为$1 - \frac{x_n}{s}$.

所以,运油率

$$p = (1-\frac{x_0}{s})(1-\frac{x_1}{s})(1-\frac{x_2}{s})\cdots(1-\frac{x_n}{s}),\text{即}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{s^{n+1}}(s-x_0)(s-x_1)(s-x_2)\cdots(s-x_n) \leqslant \\ &\frac{1}{s^{n+1}}\cdot[\frac{(s-x_0)+(s-x_1)+\cdots+(s-x_n)}{n+1}]^{n+1} = \\ &\frac{1}{s^{n+1}}\cdot(\frac{ns}{n+1})^{n+1} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \end{aligned}$$

得 $p \leqslant (\frac{n}{n+1})^{n+1}$(当且仅当 $x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号).

所以当 n 个中间站依次是线段 AB 的 n 等分点时运油率最大,其最大值是 $(\frac{n}{n+1})^{n+1}$.

注 可证数列$\{(\frac{n}{n+1})^{n+1}\}$是严格递增数列(因为可证$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$是严格递减数列),还可证$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^{n+1} = \frac{1}{e}$(e为自然对数的底数),所以有结论:中间站设得越多,可使运油率越大,但运油率 $p \in [\frac{1}{4},\frac{1}{e})$.

人生"算术"

人生要会算四笔账,是否会算,其结果大相径庭.

1 时间账

时间是成功人生最宝贵的财富.

古人在地上立竹竿,通过观察日影来计算时间."光阴"本指"日光的影子",它移动一寸就是"一寸光阴",历来有"不贵尺璧而重寸阴","大禹惜寸阴,陶侃惜分阴"之说,明人唐伯虎《七十词》曰:"人生七十古稀,我今七十为奇,前十年幼小,后十年衰老;中间只有五十年,一半又在夜里过了,算来只有二十五年在世,受尽多少奔波烦恼!"到七十岁时才"算账",为时已晚;停留在人生短促、命运坎坷、事业无成的慨叹上,格调不高,但其"惜时"之鉴不无可取之处.

左算右算,算得最细的是美国人,他们有两种算法,一是以 60 年计,共 21 900 天,其中睡眠 20 年,吃饭 6 年,穿衣梳洗 5 年,路途(含旅行)5 年,娱乐 8 年,生病 3 年,打电话 1 年,照镜子 70 天,擤鼻涕 10 天……;二是取耗时的平均值:看电视、上网等 13 年,内容六成为凶杀、色情等乱七八糟的东西,排队 1.5 年,因交通堵塞浪费时间 2.4 年,打电话聊天浪费时间 1 年,因对方无人接电话而空耗 0.5 年,赌博 1.8 年,参加竞选、投票、游行 3 年,找东西 1 年,看五花八门的广告 2 年,拆看邮寄广告 0.8 年,打官司 3 年,家庭争吵 1.2 年,总计无谓消费时间达 30 余年之久(每天以有效时间 8 小时计).真是"不算不知道,一算吓一跳!"不管哪种算法,均告诫人们惜时如金,不要虚掷光阴.

雷巴柯夫强调说:"时间是一个常数,但对勤奋者来说又是个变数,用'分'来计算时间的人比用'时'来计算时间的人,时间多 59 倍."诺贝尔经济学奖得主西蒙算了这样一笔账:每一门学问约含 5 万余条信息,按 1 分至 1 分半钟记忆一条信息,每周学习 40 小时计,一个有一定基础的人可以在 6 个月内掌握任何一门学问.这一算使我们在攀登时心中有"数",顿生"会当凌绝顶,一览众山小"之气概!

最会算时间账并付诸行动的有两个典型,一是宋代诗人陆游,他规定自己"日课诗一首",铁板钉钉,雷打不动,坚持下来,一生写了一万多首诗;还有一个是日本软件银行总裁孙正义,他在美国留学时规定自己"每天一项发明",其方

法很特别:每天从词典中任选3个词,组合一个“新东西”,他发明的“可以发声的多国语言翻译机”以1亿日元卖给日本夏普公司,孙正义说“每天一项发明”是他成功的“秘诀”.看来成功属于会算又会做的人.

2 幸福账

幸福是理想人生的向往.

历来有“事能知足心常乐,人到无求品自高”的联语,睿智者将其演绎为一道算式:幸福程度 = 目标实现值 ÷ 目标期望值.显然,目标期望值越高.幸福程度越低;目标期望值越低,幸福程度越高,幸福是一种感觉,不管你的拥有是多是少,你感觉幸福就是幸福.

人生之旅难免挫折,这又需要另外“算式”.林语堂先生认为:“现实 - 梦想 = 禽兽;现实 + 梦想 = 心痛;现实 + 梦想 + 幽默 = 智慧.”其意思是,人若仅满足于今天的享受而无明天的梦想,则与动物无异;若是梦想做一件事(如生意)结果遇到挫折而失败(如破产),当然心痛;在现实的支持下,用幽默感把梦想调和起来,才是真正的智慧,例如在现实与梦想发生冲突时,如果幽他一默,便会少去许多烦恼.

还有一种“算”法也颇耐人寻味:健康是“1”,名誉、金钱、地位、知识、爱情、友情等都是“1”后排列的“0”,有了“1”,这个数就很大;没有“1”(即失去了健康),后面的名誉、金钱等再多也是“0”,有人进一步计算:“健康长寿 = (情绪稳定 + 合理营养 + 生活规律) ÷ (懒惰 + 酒 + 烟).”分母越大,分数的值越小,怎能不细细算计?

3 事业账

事业是无悔人生的追求.

诗人说,青年是艺术的,一件一件地创作;中年是工程的,一座一座地建筑;老年是历史的,一页一页地翻阅.青年时不“创作”,中年时不“建筑”,人生史册空空如也,到老年“翻阅”时,定悔之莫及,获得国际中学生奥林匹克化学竞赛金牌的汪深的“创作”公式是:(刻苦学习 + 适当娱乐) × 不断进取 + 不论成功与失败 = 无悔的人生.这道“子公式”是根据两道“母公式”列出的:

(1) 成功 = 艰苦努力 + 正确方向 + 少说空话(爱因斯坦);

(2) 天才 = 1% 的灵感 + 99% 的血汗(爱迪生).

常常有这样的情况,同一所学校的学生在校时差别不是很大,可是毕业后,10年20年下来就天差地别了,其原因何在?一教授列出“10 - 9 = ?”这个算式并作讲解,令人茅塞顿开.

他以打保龄球为喻，每局10个球，每一个球甲得10分乙得9分，其差距决不是“1”，因为得10分的要加下一个球的得分；如果下一个球又得了10分，总共是20分；如果每个球都打10分，一局总共是300分.这也许太难，但高手得270，280分的常有.如果像乙那样每个球都少1分，一局最多只能得90分；10与9的差距就变成了270，280与90的差距.在校时两个人是10分与9分之差，毕业后甲依然10分10分地干，乙依然9分9分地干，时间一长，岂不是与上述打保龄球的结局一样？

4 德行账

德行是完善人生之品位.

冰心说：“一个人应该像一朵花，花有色、香、味，人有才、情、趣，三者不可缺一.”与此“花”论相映成趣的是丰子恺的“鼎”论：“圆满的人格像一个鼎，真、善、美好比鼎之三足.对一个人而言，美在皮肉，善在经脉，真是骨骼，三者支撑起一个大写的人.”“花”论明示人生的三个要素，“鼎”论阐述人生的三个支柱，均切中肯綮；至于关于女性的“明细账”，个中韵味，亦颇耐人细品.

婚姻是永恒的主题，也应恰当地“核算”.有人说，婚姻不是“$1+1=2$”，而是“$0.5+0.5=1$”，这一算法是颇具匠心的：两个“1”的简单相加，显然不及两个“半球”合为“一”体，这是家庭美德方面的.个人品德方面也应会“算”，例如一个人对自己应有正确的估计，托尔斯泰的“算式”是：“一个人的价值 = 实际才能 ÷ 自我估计.”自我估计越高，一个人的实际价值越低，不言而喻.

最后让我们引用乔羽的《算盘歌》作结语：“下面的当一，上面的当五，一盘小小算珠，把世界算得清清楚楚，哪家贪赃枉法，哪家洁白清苦，俺叫你心中有个数，三下五去二，二一添作五，天有几多风云，人有几多祸福，君知否——这世界缺不了加减乘除.”是的，不管你是否愿意，人生“算术”总是“缺不了”的，让我们提前预算，并不时“掐指一算”，迎接人生辉煌的“决算”.

用计算风格学证明“作者是谁”

1 《红楼梦》是否一人所作

《红楼梦》成书迄今已逾200年，作为中国最重要的小说之一，它不仅感动了中国人，也得到其他国家的人的重视与喜爱，《红楼梦》有各种不同的版本，数十种续书，流传到世界各国，被翻译成各种文字，透过不同的文字翻译，感动了不同民族的人民.

长期以来，人们普遍认为曹雪芹只写了《红楼梦》的前80回，后40回是高鹗续写，但数学统计进人文学领域后，这个定论遭到了计算机的质疑. 1981年，首届国际《红楼梦》研究会在美国召开，美国威斯康星大学讲师陈炳藻独树一帜，宣读了题为《从词汇上的统计论〈红楼梦〉作者的问题》的论文，首次借助计算机进行《红楼梦》研究，轰动了国际红学界. 陈炳藻从字、词出现的频率入手，通过计算机进行统计、处理、分析，对《红楼梦》后40回系高鹗所作这一流行看法提出异议，认为120回均系曹雪芹所作.

语体风格是人们在语言文字表达活动中的个人言语特征，是人格在语言文字活动中的某种体现. 这种风格可以在一定程序上通过数量特征来刻画. 例如，句长和词长可以代表作者造词句的风格，当然，反映作者风格的不是单个词的词长和单个句子的句长，而是以一定数量的语料为基础的平均句长和平均词长；此外，字、词在作品中出现的频率也是个人风格的体现. 利用计算机计算一部作品或作者平均词长和平均句长，对作品或作者使用的字、词、句的频率进行统计研究，从而了解作者的风格，这被称之为计算风格学. 计算风格学现在在社会科学领域成为一门饶有趣味的学科，尤其判断作者真伪，考证作者疑难方面更是大显身手[1][2].

2 让佚名作者现身

“作者考证”有时是一个很困难的问题，计算风格学可被应用来解决这种问题，我们看两个例子.

出现于16世纪90年代的一部五幕剧《爱德华三世》，表现了14世纪英王爱德华三世统治时期勇武的骑士精神，但该剧作者究竟是谁，戏剧界争论了几百年. 不久前，通过电脑对该剧的语言风格进行分析，莎翁作品的权威机构 ——

阿顿公司正式确认[3],《爱德华三世》是莎士比亚的一部早期作品.莎剧专家说,这部作品本身所表现出的深刻人性、博大精深和文辞语言的华丽无可辩驳地"同莎士比亚自己的声音"证明了它的来源.

1964年,美国统计学家摩斯泰勒和瑕莱斯考证了12篇署名"联邦主义者"的文章作者,可能的作者是两个人,一个是美国开国政治家汉密尔顿,另一位是美国第四任总统麦迪逊.究竟是哪一位呢?统计学家在进行分析时发现汉密尔顿和麦迪逊在已有著作中的平均句长几乎完全相同,这使得这一能反映写作风格特征的数据此时失效了.于是统计学家转而从用词习惯上来找出这两位作者的有区别性的风格特征,最后终于找到了两位作者在虚词的使用上有明显的不同,汉密尔顿已有的18篇文章中,有14篇使用了"enough"一词,而麦迪逊在他的14篇文章中根本未使用"enough"一词.汉密尔顿喜欢用"while",而麦迪逊总是用"whilst".汉密尔顿喜欢用"upon",而麦迪逊很少用.然后,再把两位可能的作者的上述风格特征指标,与未知的12篇署名"联邦主义者"的文章中表现出来的相应的风格特征进行比较,如果发现那位署名"联邦主义者"的作者就是美国第四任总统麦迪逊.这样就了结了这一考据学上长期悬而未决的公案.两位统计学家所使用的数学方法也得到了学术界的认可.

3 《静静的顿河》是不是抄袭

《静静的顿河》是一部既磅礴壮观又委婉细腻、扣人心弦的史诗性长篇小说,是当代世界文学中流传最广泛、读者最多的名著之一.他的作者肖洛霍夫因此获得1965年诺贝尔文学奖.但小说出版后就有人说这本书是肖洛霍夫从一位名不见经传的哥萨克作家克留柯夫那里抄袭来的.俄国流亡在国外的一些作家如索尔仁尼琴、麦德维杰等,认为《静静的顿河》的大部分内容是抄袭哥萨克作家克留柯夫的作品.理由是该书第一卷出版时,肖洛霍夫年纪尚轻,并无生活经历;另外,他以后未能写出具有同样文学价值的作品.肖洛霍夫充其量只是合作者罢了.

为了弄清楚谁是《静静的顿河》的真正作者,捷泽等学者采用计算风格学的方法进行考证.具体办法是把《静静的顿河》四卷本同肖洛霍夫、克留柯夫这两人的其他在作者问题上没有疑义的作品都用计算机进行分析,获得可靠的数据,并加以比较,以期澄清疑问,得出谁是真正作者的结论.

捷泽等学者从《静静的顿河》中随机地挑选出2 000个句子,再从肖洛霍夫、克留柯夫的各一篇小说中随机地挑选500个句子,得到3组样本,3 000个句子,输入计算机进行处理,处理的步骤如下:

(1) 首先计算句子的平均长度,结果3组样本十分接近.于是再按不同的长度细分成若干组,对3组样本中对应的句子组进行比较,发现肖洛霍夫的小说与《静静的顿河》比较吻合,而克留柯夫的小说与《静静的顿河》相距甚远.

(2) 进行词类统计分析.从3组样本中各取出10 000个单词,结果发现,除代词外,有6类词肖洛霍夫的小说都与《静静的顿河》一致,而克留柯夫的小说则与之不一致.

(3) 考察处在句子中的不同位置的词类状况,俄语的词类句子中的不同位置可以很好地表现文体的风格特点,特别是句子开头的两个词和句子结尾的3个词往往可以起到区分文体风格的作用,捷泽等学者统计了3组样本中句子开头的词类和句子结尾的词类,发现肖洛霍夫的小说与《静静的顿河》十分接近,而克留柯夫的小说则与之有相当大的距离.

(4) 进行句子结构的分析.统计了3组样本中句子的最常用格式,结果发现,肖洛霍夫的小说与《静静的顿河》的最常见句式都是"介词 + 体词"起始的句子,而克留柯夫的小说中最常见句式则是以"主词 + 动词"起始的句子.

(5) 统计了3组样本中频率最高的15种开始句子的结构,发现肖洛霍夫小说中有14种结构与《静静的顿河》相符,而克留柯夫的小说中只有5种出现在《静静的顿河》中.

(6) 统计了3组样本中频率最高的15种结尾句子的结构,发现肖洛霍夫的小说中15种结构与《静静的顿河》完全相符,而克留柯夫的小说中结尾句子的结构与《静静的顿河》完全不符.

根据以上6个方面的统计结果与分析,捷泽等人已可以下结论:《静静的顿河》的真正作者是肖洛霍夫.然而,捷泽等人对于这样一部世界名著,这样一个世界文学界的重大疑案,采取了十分谨慎的态度,为了精益求精,他们在更大规模的基础上进行研究,最终确定《静静的顿河》确实是肖洛霍夫的作品,他在写作时或许参考过克留柯夫的手稿.后来,原苏联文学研究者从另外一些方面又进一步证实了肖洛霍夫是《静静的顿河》的真正作者.

计算风格学不仅能考证作者,还作者一个清白,在更广阔的范围内,通过对不同时期的文学家作品的统计计算,还可以反映一个时代的文化风格变迁.曾有人对20位德语作者的22部著作的平均词长和平均句长进行过计算,从而发现了德语书面语言的句子有变短的趋势[1][2].

参考文献

[1] 毕全忠.数学 —— 撬起未来的杠杆[N].人民日报,1997-7-9(3).
[2] 徐传胜.概率论与红楼梦[J].数学通讯,2005(1):47.
[3] 鲁秋枫.作者是谁?让数学来证明[J].大科技,2004(4):17-18.

概率帮了盟军

在第二次世界大战中，盟军为了和德国法西斯作战，需要将大量军需物品穿过大西洋运到各个战场．可是，在1943年以前，负责运送物资的英美船队常常受到德国潜艇的袭击，损失惨重．当时，英美两国限于实力，无力增派更多的护航舰，一时间，德军的“潜艇战”搞得盟军焦头烂额，海上运输成了令人头疼的问题，在这进退两难之际，有位美国海军将领专门请教了几位数学家．

数学家运用概率论分析后发现，运输船队与敌军潜艇相遇是一个随机事件，即船队是否被袭击，取决于航行过程中是否与敌潜艇相遇，而与敌潜艇相遇是有可能发生，又有可能不发生的．从数学角度来看，它具有一定的规律：

（1）一定数量的船只，编队规模越小，批次就越多；批次越多，与敌潜艇相遇的概率越大．

（2）一旦与敌潜艇相遇，船队的规模越小，每艘船被击中的可能性越大．

这是因为德军潜艇的数量不是很多，潜艇所载弹药有限，每次袭击，不论船队规模多大，被击沉的船的数目基本相等．假如运输船的总量为100艘，按每队20艘船编队，就要编成5队，若按每队10艘船编队，就要编成10队，两种编队方式与敌潜艇相遇的可能性之比为5 : 10，即1 : 2．假设每次遭到敌潜艇袭击损失5艘运输船，那么上述两种编队方式中每艘船被击中的可能性之比为$\frac{5}{20}:\frac{5}{10}=1:2$．两者结合起来看，两种编队方式中每艘运输船与敌潜艇相遇并被击沉的可能性之比为1 : 4．这说明，100艘运输船，编成5队比编成10队的危险性小．

美国海军接受了数学家的建议，改进了运输船由各个港口分散起航的做法，命令船队在指定海域集合，再集体通过危险海区，然后各自驶向预定港口．奇迹出现了，盟军船队遭袭击被击沉的概率由原来的25%降低为1%，大大减少了损失，保证了战略物资的及时供应．

时间就是金钱
——算一算你的一分钟值多少钱

时间就是金钱,可你知道你的时间到底值多少钱吗?英国一位教授日前发明了一个公式,能够帮助人们精确地计算出时间的价值.

这个公式是

$$V=\frac{\frac{w(100-t)}{100}}{c}$$

其中 V 代表 1 小时的价值,w 是一个人的时薪,t 是税率,c 是当地生活花费(目前,这一公式的使用还仅局限于英国).

据此公式,对英国男人而言,一分钟的价值平均超过 10 便士(合 14 美分),女人则值 8 便士(合 12 美分).

知道了自己每小时的价值,你就能决定到底是自己做饭呢还是叫外卖?出门坐公交车呢还是"打的"?比如一个在伦敦工作的 A 教授,每年的工资是 25 000 英镑(约36 570 美元),那么他 1 小时的价值是 6.44 英镑(合 9.42 美元).必须强调的是,这是 A 教授任何 1 小时的价值,而不是只指其工作时间的一小时.

A 教授做一顿晚饭要花掉约 10 英镑的时间,加上原材料以及饭后洗洗涮涮的时间,他自己做一顿晚饭要比叫"外卖"贵得多,所以自己做饭不合算;同样,A 教授出门坐出租比坐公交车要合算;他刷牙要用 32 便士的时间,可是找任何人替他刷都要花比这更多的钱,所以还是他自己刷牙合算.

一般说来,如果你的工作技术含量比较低,你每小时的价值也会较低,选择自己做饭和坐公交车就比较合适.

现在,如果有人对你说:"对不起,我能占用你 5 分钟吗?"在答应之前,你可要三思而行,看看 5 分钟对你的损失有多大.

参考文献

[1] 书怀.时间就是金钱[N].青年参考,2002-6-12(4).

烧焦的遗嘱

在美国,大侦探梅森是个名声显赫、家喻户晓的人物,他的探案集被普遍收藏.公众认为他目光如电,明察秋毫,能够洞悉一切阴谋诡计.梅森何以有这样大的本事?这与他爱好数学,用数学来砥砺心智分不开.用他自己的话来说便是:"数学是块磨刀石.我的大脑好像一把快刀,不磨就会变钝的."

有一次,梅森被当事人请来办一桩棘手的案子.曾经当过得克萨斯州州长的百万富翁布朗先生不幸死于一场电线老化而引起的大火.这完全是一个偶发事件,没有凶犯,也没有他人受伤.然而,伤脑筋的是,布朗先生唯一的一张遗嘱被烧焦了,字迹难以辨认.该遗嘱一无副本,二无复印件.不过,布朗先生在生前曾多次对他的律师及亲友们讲过,他的继承人为数众多,百人以上,千人以上,全部遗产要平均分配,各人所得之款一模一样.为此,遗嘱里写着一个长长的除法竖式(图1).

不幸的是,在这个除法算式中,只有商数的第二位数字可以辨认出是7.在显微镜下,可以看出除法已经进行到底,而且正好是整除,即余数是0.

或许对一般人来说.这样微不足道的线索并没有什么用处.经过缜密思索与无懈可击的推理,梅森发现被除数正好是布朗先生的遗产总值(单位是美元),而除数等于继承人的总数,说明他解决了这个"无头案".

```
            × 7 × × ×
× × × ) × × × × × × × ×   …… 第一行
        × × × ×            …… 第二行
        ----------------
            × × ×          …… 第三行
            × × ×          …… 第四行
        ----------------
            × × × ×        …… 第五行
              × × ×        …… 第六行
        ----------------
                × × × ×    …… 第七行
                × × × ×    …… 第八行
                -------
```

图1

那么,梅森是怎样进行逻辑推理的呢?

美国数学家格雷汉(Graham)曾用这个问题来测试一些人的智力.为了算出正确结果,大家各显神通,所用的手法也大有差别,有的人采取了十几个步骤,占用好几页的篇幅.其实,要完全解开这个谜,只要3步就行了.

(1) 商数的第四个数字肯定为0.因为在算式中可以看到,被除数的最后两个数字被同时落下来了.

(2) 商数的第一个数字与最后一个数字都比商的第三个数字大,因为它们

与除数的积是 4 位数，而后者仅是 3 位数. 那它比第二位数字 7 是大还是小呢? 容易看出，第四行与第六行都是 3 位数，而第三和第四行的差是三位数，第五和第六行的差只是两位数(从被除数相应位置上直接落下来的数字不算)，这就非常有力地证明了，第六行必大于第四行，于是可以肯定，商的第三位数字必定比 7 大. 综合起来看，商的首位数与末位数必等于 9，而商的第三位数字为 8. 即商为 97 809.

(3) 除数的 8 倍只是三位数，所以除数不能大于 124. 第七、八行一样(否则就意味着不是整除)，除法如果是 123 或比之更小，第七行的前两位数也必然得不到 11，所以除数必为 124.

现在，商数与除数都已求得，我们就可得出完整的除法算式.

```
          97809
     ________
124 ) 12128316
      1116
      ____
        968
        868
        ____
        1003
         992
         ____
          1116
          1116
          ____
             0
```

梅森的推理令人心悦诚服，他得到了一大笔酬金，并把这些钱全部捐给了儿童慈善机构.

推铅球的最佳抛射角应小于 45°

推铅球运动起源于公元前的投掷石块比赛，后普及发展为最早的投掷项目之一，公元 1896 年在雅典举行的第一届奥运会上，男子铅球列为正式的比赛项目，创造了 11.22 米的纪录. 在 1984 年伦敦举行的第 14 届奥运会上，女子铅球也列为正式项目，创造了 13.75 米的纪录.

推铅球的规则是：运动员要在直径为 21.35 米的圆形投掷场地进行投掷动作，从 1975 年起规定铅球的质量为 7.26 千克.

投掷方法也在不断改革：古老的上步推球或垫步推球改为侧向滑步推球、背向滑步推球、旋转推球等. 近半个世纪以来，成绩有很大提高，男子铅球纪录提高了 4 米，女子铅球纪录提高了 6 米，成绩的进步，除投掷方法的改进外，还有运用数学、物理知识的科学计算.

通常认为：以初速度 v_0、抛射角 $\alpha(0° < \alpha < 90°)$ 推出的铅球在不计空气阻力时的运动属于斜抛运动(图 1)，其运动轨迹的参数方程为(以下 x，y 分别表示铅球在任意时刻 t 时飞行的水平距离和铅直高度，g 为重力加速度)

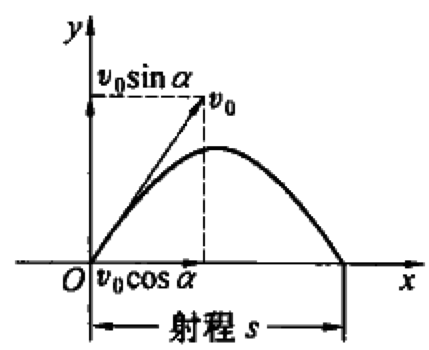


图 1

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha \cdot t \\ y = v_0\sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

由此可得铅球的射程为

$$s = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

此公式说明，铅球的射程 s 与初速度 v_0 及抛射角 α 均有关，当 v_0 一定时，当且仅当 $\alpha = 45°$ 时射程 s 最大.

本文却认为：推铅球的最佳抛射角应小于 45°.

推出的铅球在不计空气阻力时的运动轨迹应如图 2 所示，推铅球时有一个出手高度 $h(h > 0)$，推铅球时出手高而落点低，用 t_0 表示铅球运行到落点时的飞行时间，则

$$\begin{cases} -h = v_0\sin\alpha \cdot t_0 - \dfrac{1}{2}gt_0^2 \\ s = v_0\cos\alpha \cdot t_0 \end{cases}$$

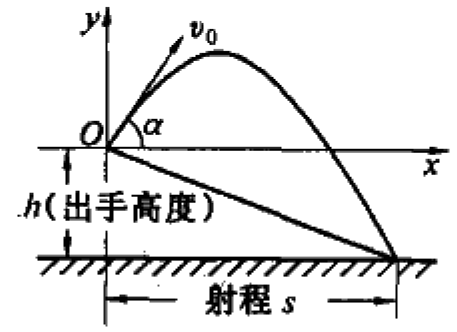


图 2

得 $gs^2\tan^2\alpha - 2v_0^2 s\tan\alpha + gs^2 - 2v_0^2 h = 0$

因为这个关于"$\tan\alpha$"的一元二次方程有实数解，所以

$$\Delta = 4s^2(v_0^4 - g^2s^2 + 2gv_0^2h) \geqslant 0$$

又 $s > 0$,所以

$$s \leqslant \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

进而可得,当且仅当 $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2gh}{v_0^2} + 1}}$,即 $\alpha = \operatorname{arccot}\sqrt{\dfrac{2gh}{v_0^2} + 1}$ 时,s 取最大值 $\dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$,所以在图 2 中,最佳抛射角应为 $\operatorname{arccot}\sqrt{\dfrac{2gh}{v_0^2} + 1}$,它显然小于 45°.

爱好打篮球的同学还可思考下面的问题.

如图 3,以初速度 v_0、抛射角 α 投出的篮球(篮筐比出手高度高 h),欲使射程 s 最远,求最佳抛射角($v_0^2 > 2gh$).

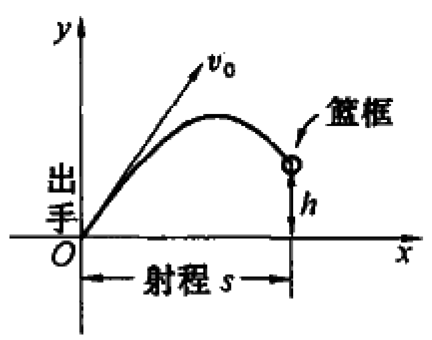


图 3

答案 最佳抛射角为 $\operatorname{arccot}\sqrt{1 - \dfrac{2gh}{v_0^2}}$(它显然大于 45°),最大射程为 $\dfrac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh}$.

设想图 3 中的坐标原点是大炮口,篮筐是射击目标,为增加隐蔽性,应使射程 s 越远越好,所以上述最佳抛射角在军事上也是有用的.

数学应用三文

1 数字的美学

一位心理学教授做了一个有趣的实验,他让研究生们分别到街头去问路人要钱.他们都用统一的说法:“我需要79分,你愿意帮助我吗?”结果,每个路人都慷慨解囊,有的甚至超过学生要的数字.

原来关键是“79”这个数字,它之所以有效,是因为它掌握了人们潜意识里对数字的认识和感受.一般乞丐会要两毛五、五毛或“零钱”,但不会用这样具体而奇怪的数目.正因为具体,它制造了一种“真实”的错觉:让人觉得开口要钱的人不是“职业乞丐”,而是出于真正、迫切的需要——可能为了凑足一张回家的车票,或打一次紧急的长途电话.

脍炙人口的《一千零一夜》,根据当代学者的说法,最早的版本可能是9世纪的集子,原名《一千夜》,到了12世纪才改成《一千零一夜》.多出的“一”,好比为完满的“一千”开了个闸门,故事自此源源不断地流出来.它启发读者的想象力,暗示女主角的困境将永无尽头,“一”字之差,实有画龙点睛之妙.

2 如何计算星期几

历史上的某一天是星期几?未来的某一天是星期几?关于这些问题,有很多计算公式,其中最著名的是蔡勒(Zeller)公式

$$w = y + \left[\frac{y}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] - 2c + [2.6(m+1)] + d - 1$$

公式中的符号含义如下:w 被7除所得的余数就是所求的星期几;y 为公元年份的后两位数;c 为公元年份的后两位数前面的数;m 为月份(但 $3 \leqslant m \leqslant 14$,即某一年的1,2月,要换算成上一年的13,14月,比如2003年1月1日要看做2002年的13月1日来计算);d 为日数.“[ ]”表示取整,即 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

以“2049年10月1日(100周年国庆)是星期几”为例,用蔡勒(Zeller)公式计算,过程如下

$$w = 49 + \left[\frac{49}{4}\right] + \left[\frac{20}{4}\right] - 2 \times 20 + [2.6 \times (10+1)] + 1 - 1 = 54$$

又 54 被 7 除余 5,所以 2049 年 10 月 1 日是星期五.

3 参赛应用题题 34 的完整解答

《数学通讯》2001 年第 13 期的参赛应用题选登题 34 的解答中漏掉了一种情形:只堆放两层,且各层分别是 122,123 桶.可见下面的完整解答:

设最上层堆放 a_1 桶(自然数 $a_1 \geqslant 1$),共堆放 n 层(自然数 $n > 1$),由等差数列的前 n 项和公式(这里 $d = 1$),得

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1) = 245$$

$$n(2a_1 + n - 1) = 490 = 2 \times 5 \times 7^2$$

可得
$$n < 2a_1 + n - 1$$

所以
$$n < \sqrt{490}$$

得
$$1 < n \leqslant 22$$

又 n 是 490 的约数,所以 $n = 2,5,7,10,14$,从而可给出全部解答为 5 种.

参赛应用题选登

题 31　在北半球某地有一间房子面向正南，假定房檐离地面高 3 m，窗台高 80 cm（窗高暂不考虑）. 如果冬天太阳最低时，正午是 31°，夏天太阳最高时，正午是 78°. 应把房檐设计多宽，可使夏天的阳光不会由窗户进入屋内，而在冬天阳光可照进屋里最多？

解　我们画出本题的示意图（图 1）.

在直角 $\triangle ABC$ 中，设 $AB = x$（以下单位均为 cm）. $\angle ABC = 90°$，$BC = 300 - 80 = 220$，所以 $x = 220\cot 78° \approx 46.8$(cm).

为了求 y，我们由点 A 向地面 ED 引垂线，设垂足为 F，则在 $\triangle AEF$ 中，$AF = 300$，$\angle AFE = 90°$，$\angle E = 31°$，所以 $y + 46.8 = 300\cot 31°$，得 $y \approx 452.5$(cm).

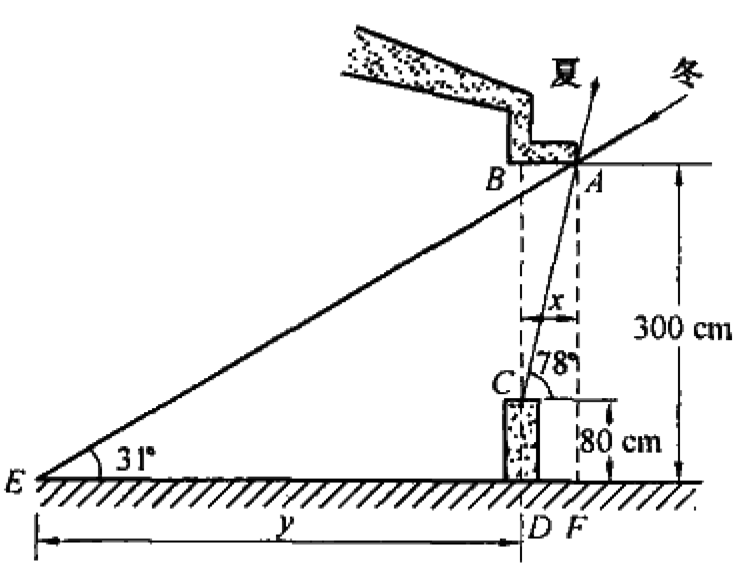


图 1

把房檐的宽度设计为 46.8 cm，就可保证夏天的阳光不会由窗户照进屋内，而冬天里阳光照进屋里最多.

背景材料　中国广大农村还在建造图 1 所示的平房，考虑本题述及的内容来设计屋檐的宽度是很有益处的. 如果北半球的一间房子面向正北，不妨在夏至的正午，看看阳光照在这间房的房檐下什么地方，并记下太阳高度角；又在冬至那天正午，再看阳光照进屋里有多深，也记录下太阳高度角，也可研究这间房的窗户从阳光照射的角度讲设计的是否合理.

题 33　如图 2，设甲楼坐落在正南正北方向，楼高 $AB = 16$ m，又要在甲楼的后面盖一座乙楼 CD. 已知冬天太阳最低时的高度为 32°，问：

(1) 若两楼相距 $BD = 20$ m，则甲楼的影子落在乙楼上有多高？

(2) 如果甲楼的影子不会落在乙楼上，那么两楼之间的距离 BD 至少是多少米？

解　(1) 如图 2，过点 E 作 $EF \perp AB$，垂足为 F. 在 $\triangle AEF$ 中，$\angle AEF = 32°$，

$\angle AFE = 90°$, $EF = BD = 20$ m,所以

$$AF = 20\tan 32° \approx 12.5(\text{m})$$

$$ED = 16 - 12.5 = 3.5(\text{m})$$

即甲楼的影子落在乙楼上有 3.5 m 高.

(2) 在直角 $\triangle ABD$ 中,有 $\angle ADB = 32°$,得

$$BD = 16\cot 32° \approx 25.6(\text{m}).$$

说明两楼之间的距离至少是 25.6 m 时,甲楼的影子才不会落在乙楼上.

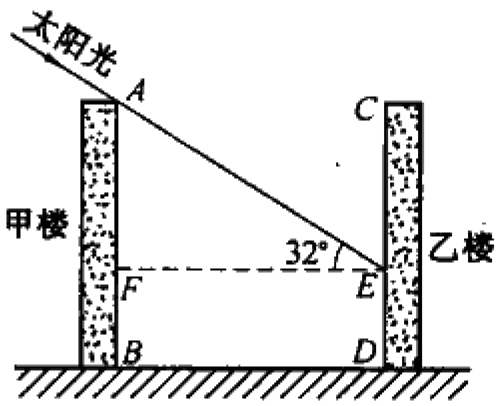


图 2

背景材料 由本例说明,在城市建设高楼大厦时,邻楼之间的间距不应过小:这样可使楼内获得尽量多的阳光照射,空隙地带可多植一些花草树木,并且城内的房屋、交通都不是太拥挤,这些方面都应当尽早颁布有关法律,起码城建设计部门应尽早考虑这些问题.

题 36 如图 3,一过路人在河岸边行走,当走到点 A 时,突然听到河中点 B 一落水儿童高喊"救命".假设过路人在岸上短跑速度为 0.3 km/min,而在水中的游泳速度为 0.1 km/min. 试问:过路人应该从哪一点入水,才能以最短的时间赶到落水地点?

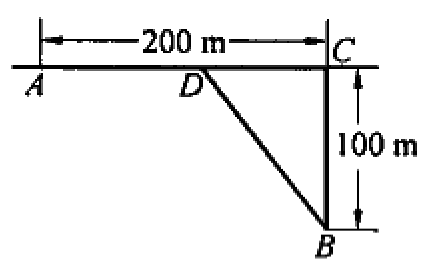


图 3

解 如图 1,假设从点 D 入水,设 $AD = a$ km, $CD = (0.2 - a)$km,则过路人行完路程 ADB 所需的时间为(单位:min)

$$t = \frac{a}{0.3} + \frac{\sqrt{(0.2 - a)^2 + 0.1^2}}{0.1} = \frac{10}{3}a + \sqrt{100a^2 - 40a + 5}$$

可得

$$\left(t - \frac{10}{3}a\right)^2 = 100a^2 - 40a + 5$$

$$800a^2 + (60t - 360)a + (45 - 9t^2) = 0$$

因为 $a \in \mathbf{R}$,所以

$$\Delta = (60t - 360)^2 - 4 \times 800(45 - 9t^2) \geqslant 0$$

又 $t > 0$,所以

$$t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} + 1)$$

又当 $t = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} + 1)$(min) 时, $a = \frac{8 - \sqrt{2}}{40}$(km).

即过路人应该从图 3 中的点 D(即 $AD = \frac{8 - \sqrt{2}}{40}(\text{km}) \approx 165$ m) 入水,才能以最短的时间赶到落水地点.

背景材料 在炎热的夏季,我们这里的农村中学经常出现学生被水溺死的安全事故,很多时候都出现了题中所述情形.往往由于过路人没有选好入水点而导致悲剧发生(这位过路人好似是尽了最大的努力),过路人往往会从点 A 或点 C 入水.

若从点 A 入水,赶到点 B 所需时间为

$$t_1=\frac{\sqrt{0.2^2+0.1^2}}{0.1}\approx 2\ \text{min}14\ \text{s}$$

若从点 C 入水,赶到点 B 所需时间为

$$t_2=\frac{0.2}{0.3}+\frac{0.1}{0.1}=1\ \text{min}40\ \text{s}$$

而我们计算出 $t\approx 1\ \text{min}25\ \text{s}$.

早到几秒钟,对于救人也甚为宝贵.

新编应用题选登

题 50 铁路沿线竖有许多标杆,刻记着离开某城市的距离.某人在运行的列车上看到窗外有一根标杆掠过,上面刻着一个两位数;一个小时之后,他又看到一根标杆从窗外一闪而过,上面也刻着一个两位数,而且数码与第一次见到的一样,只是次序颠倒了.又过了一个小时之后,他看到了第三根标杆,上面刻着一个三位数,中间一个数字是0,并且去掉这0后正好是第一次看到的那个两位数(在此期间,列车一直是匀速运行),问三根标杆上各刻有什么数字,列车的速度是多少?

解 可设这个人三次看到的数分别是

$$\overline{xy}=10x+y,\overline{yx}=10y+x,\overline{x0y}=100x+y$$

其中 x,y 只能取自然数 $1,2,3,\cdots,9$.

由于列车匀速行驶,且每次见到标杆都相隔一小时,所以上述三个自然数依次成等差数列,由其性质可得

$$[(10x+y)+(100x+y)]=2(10y+x)$$

$$y=6x.$$

由 x,y 的限制条件,得 $x=1,y=6$.

所以三根标杆上的数字分别是16,61,106,列车的速度是45 km/h.

背景材料 2001年暑假,笔者赴武汉参加省级数学骨干教师培训,8月15日乘武汉至十堰的列车回家,因为这趟车是夜车,所以就有题中所述的情景.笔者对初等数学尤其是整数性质有些爱好,因而编拟了此题,供读者欣赏.

题 53 某县位于沙漠地带,人与自然长期进行顽强的斗争.到2000年底,全县的绿化率已达30%(被绿化的部分叫绿洲).从2001年开始,每年将出现这样的局面:原有沙漠面积的16%被栽上树,改造为绿洲,同时原有绿洲面积的4%又被侵蚀为沙漠.问至少需要经过多少年的绿化,才能使全县绿化率超过60%(结果由四舍五入取整数)?

解 设全县面积为1,而2000年底绿洲面积为 $a_1=\frac{3}{10}$,设经过 n 年后绿洲面积为 a_{n+1}.

设2000年底沙漠面积为 b_1,经过 n 年后沙漠面积为 b_{n+1},则

$$a_1+b_1=1,a_n+b_n=1$$

依题意，a_{n+1} 由两部分组成，一部分是原有的绿洲 a_n 减去被侵蚀部分 $\frac{4}{100}a_n$ 的剩余面积 $\frac{96}{100}a_n$；另一部分是新绿化的面积 $\frac{16}{100}b_n$，所以

$$a_{n+1}=\frac{96}{100}a_n+\frac{16}{100}b_n=\frac{96}{100}a_n+\frac{16}{100}(1-a_n)=$$
$$\frac{4}{5}a_n+\frac{4}{25}$$

进而有

$$a_{n+1}-\frac{4}{5}=\frac{4}{5}(a_n-\frac{4}{5})$$

所以 $$a_{n+1}-\frac{4}{5}=(a_1-\frac{4}{5})(\frac{4}{5})^n=-\frac{1}{2}(\frac{4}{5})^n$$

即 $$a_{n+1}=\frac{4}{5}-\frac{1}{2}(\frac{4}{5})^n$$

为使 n 年后绿化率超过 60%，则

$$a_n\leqslant 60\%<a_{n+1}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{2}(\frac{4}{5})^{n-1}\leqslant 0.6<\frac{4}{5}-\frac{1}{2}(\frac{4}{5})^n$$

$$(\frac{4}{5})^{n-1}\geqslant\frac{2}{5}>(\frac{4}{5})^n$$

$$n-1\leqslant\frac{\lg 0.4}{\lg 0.8}<n$$

可得 $$4.1<n\leqslant 5.2$$

至少需要 5 年才能使全县绿化率超过 60%.

背景材料 人类自始至终都在同沙漠进行顽强的斗争，在党中央提出的“西部大开发”的号角声中，更应注意沙漠绿化问题，在治理沙漠过程中，还应考虑沙漠变为绿洲，绿洲又变为沙漠的反复性问题(因而沙漠绿化是长久性问题)，本题提供了解决这一问题的数学模型.

题 55 在一页书上所印的文字要占 S cm²，上下页边空白处要留 a cm 宽，左右要留 b cm 宽. 若只注意节约纸张，则以如何尺寸的篇幅最为有利?

解 设书页的高为 x cm，宽为 y cm，则书页的面积为 $S_1=xy$ cm². 因为

$$(x-2a)(y-2b)=S$$

所以 $$y=\frac{S}{x-2a}+2b$$

得 $$S_1=\frac{Sx}{x-2a}+2bx(2a<x)$$

下面求 S_1 的最小值. 可将 S_1 变形为

$$S_1 = S + 4ab + \frac{2aS}{x-2a} + 2b(x-2a) \geqslant$$
$$S + 4ab + 2\sqrt{\frac{2aS}{x-2a}\cdot 2b(x-2a)} =$$
$$S + 4ab + 4\sqrt{abS}$$

其中当且仅当$\frac{2aS}{x-2a} = 2b(x-2a)$,即 $x = 2a + \sqrt{\frac{aS}{b}}$ 时,S_1 取最小值 $S + 4ab + 4\sqrt{abS}$.

进而可得，所求书页的高为 $x = \left(2a + \sqrt{\frac{aS}{b}}\right)$cm，宽为 $y = \left(2b + \sqrt{\frac{bS}{a}}\right)$cm.

背景材料 文化知识的传播离不开书籍,所以印刷厂在印书设计版面时除应考虑美观大方、方便实用外,还应考虑节省纸张的问题.本题从一个方面解决了这个问题.

题 75 有一旗杆高 12 m,从它的顶端挂下 2 条长 13 m 的绳子,拉紧绳子,把它的下端放在地平面两点,而这两点和旗杆的脚不在同一条直线上,如果这两点和旗杆脚的距离都是 5 m,请问旗杆和地面垂直吗?并证明你的结论.

解 旗杆与地面垂直.证明如下:

如图 1,在 $\triangle POA$ 中,$PO = 12$ m,$PA = 13$ m,$OA = 5$ m,有 $OA^2 + PO^2 = PA^2$,所以 $\angle POA = 90°$,同理 $\angle POB = 90°$,得 $PO \perp OA$,$PO \perp OB$.

又 O,A,B 不在一直线上,由线面垂直的判定定理可得:$PO \perp$ 地面.

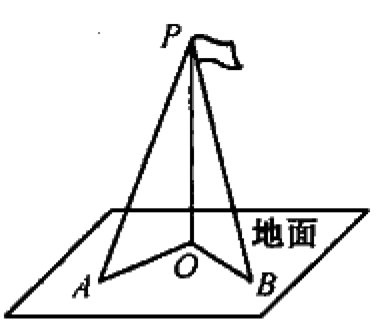


图 1

背景材料 本题的素材来源于一学生在学习立体几何知识后提出的一个研究性课题:该学生认为,我们每周一要举行庄严的升国旗仪式,体会到了国旗的庄重,我也产生了用所学知识来判断一下旗杆与地面是否垂直的想法.在没有任何测角仪器的情形下,图 1 的方法简便可行,其中 PO,PA,PB 的长度可由影长解决,OA,OB 的长度可直接测量.

题 80 一列火车自 A 城驶向 B 城,沿途有 n 个车站(包括起点 A 和终点 B)车上有一邮政车厢,每停靠一站便要卸下前面各站发往该站的邮袋各一个.同时又要装上该站发往后面各站的邮袋各一个,设从第 $k(k = 1,2,3,\cdots,n)$ 站出发时,邮政车厢内共有邮袋 a_k 个$(k = 1,2,3,\cdots,n)$.试求:

(1) 数列$\{a_k\}$ 的通项公式.

(2) k 为何值时，a_k 最大？并求出 a_k 的最大值.

解 (1)

$$a_1 = n - 1$$

$$a_2 = (n-1) + (n-2) - 1$$

$$a_3 = (n-1) + (n-2) + (n-3) - 1 - 2$$

$$\vdots$$

$$a_k = (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-k) - [1 + 2 + \cdots + (k-1)] = kn - k^2 (k = 1, 2, \cdots, n)$$

(2)
$$a_k = -\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4}.$$

若 n 为偶数，则当且仅当 $k = \frac{n}{2}$ 时，a_k 取最大值 $\frac{n^2}{4}$；若 n 为奇数，则当且仅当 $k = \frac{n-1}{2}$ 或 $\frac{n+1}{2}$ 时，a_k 取最大值 $\frac{n^2-1}{4}$.

背景材料 本题是运用数列知识解决生活中的实际问题，本题的结论可解决邮政车厢的大小问题.

题82 某人从 A 地乘出租车到 B 地，有两种方案.第一种方案：租用起步价10元，每千米为1.2元的汽车；第二种方案：租用起步价8元，每千米为1.4元的汽车.按出租车管理条例，在起步价内，不同型号的车行驶的里程是相等的，则从经济角度出发，此人从 A 地到 B 地应选择哪一种方案？

解 设 A 地到 B 地的路程为 s km，起步价内车辆行驶的里程是 s_0 km.

显然，当 $s \leqslant s_0$ 时，应选择第二种方案.

当 $s > s_0$ 时，比较第一种方案应付的车费 $10 + 1.2(s - s_0)$ 与第二种方案应付的车费 $8 + 1.4(s - s_0)$ 的大小：

当 $0 < s - s_0 < 10$ 时，应选第二种方案；

当 $s - s_0 = 10$ 时，选两种方案均可；

当 $s - s_0 > 10$ 时，应选第一种方案.

综上所述，所求答案为：

① 当 $s - s_0 < 10$ 时，应选第二种方案；

② 当 $s - s_0 = 10$ 时，选两种方案均可；

③ 当 $s - s_0 > 10$ 时，应选第一种方案.

背景材料 改革开放带来了人民生活水平的巨大提高，出门“打的”.坐出租车也不是我们广大农村的新鲜事，但考虑一下乘车费用也是自然的.本题就是此背景下的一道应用题.本题数量关系比较隐含，还用到了数学中的函数知识及较浅显的物理知识.

应用题新编选登

题1 某车间有10台同类型的机床,每台机床配备的电动机功率为10 kW,已知每台机床工作时,平均每小时实际开动12 min,且开动与否是相互独立的.

(1) 现因当地电力供应紧张,供电部门只提供50 kW的电力,这10台机床能够正常工作的概率为多大?

(2) 在(1)的条件下,一个工作班的8 h内,不能正常工作的时间约是多少?

解 (1) 设10台机床中实际开动的机床数为随机变量ξ,由于车床类型相同,且机床的开动与否相互独立,因此$\xi \sim B(10,p)$.其中p是每台机床开动的概率,由题意$p=\frac{12}{60}=0.2$,所以$P(\xi=k)=C_{10}^{k}\times 0.2^{k}\times 0.8^{10-k}(k=0,1,\cdots,10)$.

50 kW电力可同时供给5台机床开动,因而10台机床同时开动的台数不超过5台时都可以正常工作.这一事件的概率为

$$P(\xi\leqslant 5)=C_{10}^{0}\times 0.8^{10}+C_{10}^{1}\times 0.2\times 0.8^{9}+C_{10}^{2}\times 0.2^{2}\times 0.8^{8}+ C_{10}^{3}\times 0.2^{3}\times 0.8^{7}+C_{10}^{4}\times 0.2^{4}\times 0.8^{6}+C_{10}^{5}\times 0.2^{5}\times 0.8^{5}\approx 0.994$$

(2) 由(1)知,在电力供应为50 kW的条件下,机床不能正常工作的概率约为0.006,从而在一个工作班的8 h内,不能正常工作的时间大约是$8\times 60\times 0.006\approx 2.88$(min),这说明,10台机床的工作基本上不受电力供应紧张的影响.

背景材料 编此题时正值气候炎热,电力供应紧张之际.通过以上例子说明:供电部门通过统计计算后限电是正确的决策,而拉闸断电是不妥当的.

题2 一个有140名职工的合资企业投资生产甲、乙两种不同产品,2000年该企业生产的甲产品创外汇32万元,乙产品创外汇216万元,以后每年甲产品所创外汇以2.25倍的速度递增,而生产乙产品的机器由于老化的原因,每年创外汇为上年的$\frac{2}{3}$.这个企业只要年人均创外汇达3万元就可以列入国家重点企业.若以2000年为第一年,问:

(1) 从哪一年开始,甲产品年创外汇超过乙产品年创外汇($\lg 2=0.3010$,$\lg 3=0.4771$)?

(2) 该企业哪一年所创外汇最少?该年甲、乙两种产品各创外汇多少万元?

(3) 该企业到2003年能否进入国家重点企业?

解 (1) 设第 n 年甲产品创外汇 a_n 万元，乙产品创外汇 b_n 万元，则

$$a_n = 32 \times 2.25^{n-1} = 32(\frac{3}{2})^{2n-2}, b_n = 216(\frac{2}{3})^{n-1}$$

若 $a_n > b_n$，则

$$32(\frac{3}{2})^{2n-2} > 216(\frac{2}{3})^{n-1}.$$

即

$$(\frac{3}{2})^{5-3n} < \frac{1}{3}$$

$$5 - 3n < \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} = \frac{-\lg 3}{\lg 3 - \lg 2}, n > 2.57$$

又 $n \in \mathbf{N}^*$，所以 $n \geqslant 3$.

从第 3 年开始即 2002 年甲产品所创外汇就可以超过乙产品所创外汇.

(2) 设该企业第 n 年创外汇 y_n 万元，则

$$y_n = a_n + b_n = 32(\frac{3}{2})^{2n-2} + 216(\frac{2}{3})^{n-1} =$$

$$32(\frac{3}{2})^{2n-2} + 108(\frac{3}{2})^{1-n} + 108(\frac{3}{2})^{1-n} \geqslant$$

$$3\sqrt[3]{32(\frac{3}{2})^{2n-2} \cdot 108(\frac{3}{2})^{1-n} \cdot 108(\frac{3}{2})^{1-n}} = 216$$

当且仅当 $32(\frac{3}{2})^{2n-2} = 108(\frac{3}{2})^{1-n}$，即 $n = 2$ 时取“=”.

即 2001 年创外汇最少为 216 万元，这年甲产品创外汇 72 万元，乙产品创外汇 144 万元.

(3)2003 年即第 4 年，该企业创汇

$$y_4 = a_4 + b_4 = 32(\frac{3}{2})^6 + 216(\frac{2}{3})^3 =$$

$$428.5 > 140 \times 3$$

所以 2003 年该企业能进入国家重点企业.

背景资料 该题是由数列知识编拟的一道实际应用问题.

伏尔泰拉与生物数学

2002年夏季,我国东海、南海、渤海以及鄱阳湖、长江等水域,先后实施了为期3 ~ 5个月的休渔."休渔期" 的提出,是近现代科学研究的一项成果.最早是在意大利,第一次世界大战期间,生物学家达柯纳研究了亚得里海北部海湾渔业生产的情况.他发现,这一时期食肉大鱼占捕获量的百分比急剧上升,而供人食用的鱼占总捕获量的百分比骤然下降.战争年代,渔业萧条,捕量减少,食肉大鱼固然有更多的鱼可食,因而繁殖得快,而食用鱼也应得到繁殖,为何捕获量会下降呢?人们已经有了无休止地滥捕会使食用鱼供应不上的体验,而漫长时间的休渔为何也导致食用鱼供应不足呢?达柯纳将这个令他疑惑不解的问题向他的同胞、数学家伏尔泰拉(1830—1940) 请教,伏尔泰拉是意大利的一流学者,曾在泛函分析的抽象理论方面作出过突出的贡献,是积分方程一般理论的创立者.他接受这一课题后,兴致勃勃地前往那不勒斯海军检查站作实地考察,研究了各类鱼种增殖与减少的规律,提出人类应主动调整捕鱼期,控制鱼类相生相克的增殖速度,达到有足够的食用鱼源源不断供应市场的目的.伏尔泰拉以这一课题为契机,略去一些次要的影响因素,进行必要的简化和假设,建立数学模型,引用微分方程式,解后得出了大体与实际相符合的结论,由此发现鱼群的繁殖具有周期性,略加修正就可用于指导渔业生产,"休渔期" 由此而来.

之后的实践表明,这一原理也适用于生态平衡,环境保护、人口控制、疾病防治等,被科学界命名为"伏尔泰拉原理".20世纪30年代,伏尔泰拉经过系统整理,出版了《生存竞争中的数学原理》一书,系统记述了数学向生物学渗透的成果,促成了一门崭新的边缘学科 —— 生物数学的诞生.1974年,联合国教科文组织编辑的学科分类目录中,将生物数学作为一门独立学科与现代生物学中的生物化学、生物物理学并列,"生物数学" 又称为"数学生物学".

即将来临的数字时代

在这变化日新月异的时代，媒体把所有惊心动魄的词语都给了“信息文明”和“数字时代”.有专家预言，数字时代即将来临，数字技术所产生的产品将陆续出现在我们的周围，它将会改变人们的工作方式甚至生活习惯.其实，数字技术早已进入我国，并得到了推广与应用.如全自动家用电器、IC 卡、电脑、DVD、自动提款机、打印机、新兴的数字电视、数字影院、CDMA 等，这一系列的数字产品都已经成为了我们生活的一部分.当洗衣机不再用手控制时，数字技术让我们感觉到简捷方便；当取钱不用再去排队、填单子并奔波到指定的银行时，数字技术让我们感受到更高的效率；当异地邮件不再翘首企盼时，数字技术让人们感觉到零距离的接触.数字技术的魅力还将不断地影响、改变我们的生活方式，带给我们更多的惊喜.

时下数字影院这个名词频频出现在媒体上，大大小小的报道一篇又一篇.数字电影还没看到，它的概念已被炒火了.其实中国的数字影院为数并不多，电影院还是原来的电影院，只不过放映的设备改变了，以前放映机里播放的是原声胶片，而现在放映机里存储的是数字信号.这种信号是由卫星站传送到电影院，它最大的优点就是同步于全球，有了数字影院，只要电影院有足够的资金买到播映权，我们就能与国外同步看上大片.

“数字图书馆”也是近年来才出现的名词，它代表的是一门全新的科学技术，是多媒体数字化的信息资源.这种资源将通过数字技术达到人人共享，不用去图书馆，只要你身边有一台能上网的电脑，就可以十分方便地查看你所需要的书籍或资料.中国数字图书馆工程建设的核心是：以中文信息为主的各种信息资源.而它的建设将会促进与之相关的计算技术、网络技术、通信技术和多媒体技术等高新技术的迅速发展.目前，历时两年的数字图书馆工程建设终于进入了实质阶段，数字图书馆离我们越来越近了.

以上种种举例，只体现了一个事实，数字时代已经来临，它正潜移默化的影响着我们的生活，相信用不了多久你将享受到数字生活，体验到它们所带来的每一份就惊喜！

早期的航空事业与数学

冯·卡门(1881—1963)是美籍匈牙利数学家、近代空气动力学奠基人之一.冯·卡门青年时代赴德国留学期间,一个偶然机会观看了美国人威尔伯·莱特在巴黎所作的飞行表演.威尔伯和他的弟弟奥威尔·莱特是飞机的发明人,继1903年制成第一架飞机并试飞成功之后,于1908年威尔伯只身到巴黎将改进了的第二架飞机向公众作了飞行表演,取得了持续飞行2小时24分的巨大成功.冯·卡门为这次极为壮观的表演振奋不已,更为莱特兄弟献身航空事业的百折不挠精神所感动,深感随着科学技术的发展,人们的视野已从陆地、海洋移向天空,油然产生献身航空事业的念头.

科学的道路崎岖不平,充满着矛盾、斗争乃至牺牲.就在威尔伯在巴黎作出一系列技艺高超的表演,赢得欧洲公众喝彩的同时,胞弟奥威尔在纽约也在作飞行表演,一名好奇的观众不顾危险,苦苦要求搭乘飞机上天.不幸的是搭乘人在空难中丧生,奥威尔摔断了一条腿和两根肋骨.处在襁褓阶段的航空事业,机毁人亡的事故也不时从各国频频传出.冯·卡门意识到,只有把航空事业纳入科学轨道,才得以使这种牺牲减少到最低限度.例如,飞机设计应做好部位安排,即各部件、发动机、燃油置人适当部位.那次事故的教训是:搭乘人不仅增加了飞机的起飞质量,而且改变了飞机的重心位置,致使操纵困难,造成飞机下旋坠落的空难.由于燃油消耗引起重心位置的移动,因此油箱的置放应尽可能靠近重心.于是重心的计算列为飞机草图设计中一个必不可少的步骤.

在冯·卡门的功绩中,较为突出的是攻克超音速飞行中一系列的理论和实践的新课题.当飞行速度较接近音速时,飞机与声波几乎跑得一样快,气流来不及跑开而堆积在飞机前面,形成一道"墙",称为"声波墙",这时机翼、尾翼产生颤震,操纵失控.如何克服"音障"成为20世纪三四十年代困扰航空界的新课题.40年代中期,先后有19名飞行员在超音速试飞中丧生,以致有人发出"超音速飞行不可能实现"的断言.为从理论上回答突破"音障"的可能性,冯·卡门以偏微分方程、级数论、微幅振动、积分方程为工具,创立高速空气动力学.配合实验研究,回答了超音速飞行的可能性问题,得出机身头部采用尖针状,机翼用大后掠角或三角形,使冲击波前后压力、流速、密度等气流参数的变化尽可能小,终于攻克了难关,降服了"音障".1947年,超音速试飞取得了首次成功,航空工

业也彻底结束了以往靠试试改改摸索着干的格局. 正如马克思所说:"一门科学只有成功地运用数学,才算达到真正完善的地步."

1957年,苏联的人造卫星先于美国上了天,航天时代开始了. 这在美国引起极大震动,决策者组织了调查,发现苏联在尖端技术领域取得领先地位,得益于他们的教育与科技发展比较匹配. 例如,大学教育由于重视了基本课程,培养的人才能很好的处理"专"与"博"的关系,他们基础扎实,既懂专业,又善于根据科学技术的发展需要,四面出击,广种杂收,从而在尖端技术领域涌现出一支能建立数学与工程技术之间联系的、号称"数学工程师"的队伍. 对此,白宫有关人士认为,要想迎头赶上,就必须培养更多的能追踪世界先进水平的人才,为倡导培养"数学工程师"队伍,美国于1963年首次颁发"国家科学勋章",这第一枚勋章由肯尼迪总统亲手授予了加州理工学院航空系教授冯·卡门.

笔尖下的行星

1781年,英国天文学家赫歇尔用望远镜发现了天王星.在研究天王星的运行轨迹时,人们发现实际观察的轨迹与根据理论推算出来的轨迹不符合,这是为什么呢?当时就有人预言,在天王星外面可能还存在一颗尚未被发现的新行星,可是,在无边无际的天空,到哪里去寻找这颗新行星呢?64年后的1845年,英国剑桥大学数学系学生亚当斯运用力学原理、微积分等数学工具,进行了一系列艰难的计算,算出了这颗新行星的轨迹.他把计算结果寄给了英国格林尼治天文台台长艾里,可惜没有引起重视,艾里也没有用望远镜去寻找这颗新行星.

1846年,法国巴黎天文台青年科学家勒威耶计算了由几十个方程组成的方程组,再次独立地算出了这颗新行星的轨迹,这年的9月18日,勒威耶写信给当时拥有详细星图的柏林天文台的伽勒.他在信中写道:"请您把天文望远镜指向黄经326°外的宝瓶座内的黄道上的一点,您将在离此点约1°的区域内发现一颗圆而明显的新行星."伽勒于9月23日夜间,就在与所指点相差52′的地方,发现了这颗新行星,人们给它取名为海王星.

这颗行星的发现,完全是用数学工具、根据力学原理计算出来的,因此,人们称海王星为"笔尖下的行星",数学是科学的仆人,又是自然科学的皇后,正如马克思所说:"一门科学,只有运用了数学,才算达到真正完善的地步."

高三数学《数学应用》水平测试

一、选择题(答案唯一)

1. 某人在某处测量一塔顶的仰角为30°,当他朝塔的方向走了30 m,又测量此塔顶的仰角为60°,则塔高为(　　).

A. 30 m　　B. 15 m　　C. $15\sqrt{3}$ m　　D. $10\sqrt{3}$ m

2. 已知定义在$[-1,1]$上的函数$y=f(x)$的值域为$[-2,0]$,则函数$y=f(\cos\sqrt{x})$的值域为(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $[-3,-1]$　　C. $[-2,0]$　　D. 不能确定

3. 已知函数$y=f(x)$是一个以4为最小正周期的奇函数,则$f(2)=$(　　).

A. 0　　B. -4　　C. 4　　D. 不能确定

4. 商店有一架两臂不等长的天平,某顾客要买2 kg的糖果,售货员将1 kg的砝码放于左盘,放一些糖果使天平平衡后将糖果给顾客,再将1 kg的砝码放于右盘,放一些糖果于左盘使天平平衡后将糖果给顾客,这样给顾客两次的糖果和(　　).

A. 等于2 kg　　B. 少于2 kg　　C. 多于2 kg　　D. 不一定

5. 首项系数为1的二次函数$y=f(x)$在$x=1$处的切线与x轴平行,则(　　).

A. $f(\arcsin\frac{1}{3})>f(\arcsin\frac{2}{3})$　　B. $f(\arcsin\frac{1}{3})=f(\arcsin\frac{2}{3})$

C. $f(\arcsin\frac{1}{3})<f(\arcsin\frac{2}{3})$　　D. $f(\arcsin\frac{1}{3})$与$f(\arcsin\frac{2}{3})$的大小不能确定

6. 关于x的不等式$ax-b>0$的解集为$(1,+\infty)$,则关于x的不等式$\frac{ax+b}{x-2}>0$的解集为(　　).

A. $(-1,2)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(1,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

7. 图1是一个正方体纸盒的展开图,若把1,2,3,4,5,6分别填入小正方形后,按虚线折成正方体,则所得正方体相对面上两个数的和都相等的概率是(　　).

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{15}$

C. $\frac{1}{60}$　　D. $\frac{1}{120}$

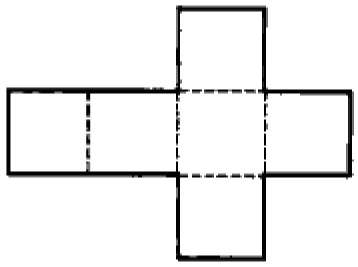


图 1

8. 设有如下三个命题.

甲: $m \cap l = A$; $m, l \subset \alpha$; $m, l \not\subset \beta$.

乙: 直线 m, l 中至少有一条与平面 β 相交.

丙: 平面 α 与平面 β 相交.

当甲成立时,乙是丙的(　　).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. $\triangle ABC$ 中, $3\sin A + 4\cos B = 6$, $3\cos A + 4\sin B = 1$, 则 $\angle C$ 的大小为(　　).

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{5}{6}\pi$　　C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$　　D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2}{3}\pi$

10. 等体积的球和正方体,它们的表面积的大小关系是(　　).

A. $S_{球} > S_{正方体}$　　B. $S_{球} < S_{正方体}$

C. $S_{球} = S_{正方体}$　　D. $S_{球} = 2S_{正方体}$

11. 若连结双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与其共轭双曲线的四个顶点构成面积为 S_1 的四边形,连结四个焦点构成面积为 S_2 的四边形,则 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为(　　).

A. 4　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

12. 若干个正方体形状的积木按如图 2 所示摆成塔形,上面正方体下底面的四个顶点是下面相邻正方体的上底面各边的中点,最下面的正方体的棱长为 1,平放于桌面上,如果所有正方体能直接看到的表面积超过 7,则正方体的个数至少是(　　).

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 6

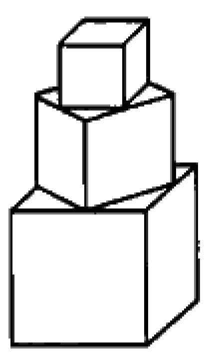


图 2

二、填空题

13. 若指数函数 $f(x) = a^x (x \in \mathbf{R})$ 的部分对应值如下表所示.

x	-2	0	2
$f(x)$	0.694	1	1.44

则不等式 $f^{-1}(|x-1|)<0$ 的解集为________.

14. 若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则称向量"$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$"为"向量积"，其长度 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\sin\theta|$. 今已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$ ________.

15. 已知点 $P(2,-3)$，$Q(3,2)$，直线 $ax+y+2=0$ 与线段 PQ 相交，则实数 a 的取值范围是________.

16. 若在所给条件下，数列 $\{a_n\}$ 的每一项的值都能唯一确定，则称该数列是"确定的"，在下列各组条件下，有哪些数列是"确定的"？对应的序号为________.

①$\{a_n\}$ 是等差数列，$S_1=a$，$S_2=b$.（这里 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，a，b 为实常数，下同）

②$\{a_n\}$ 是等差数列，$S_1=a$，$S_{10}=b$.

③$\{a_n\}$ 是等比数列，$S_1=a$，$S_2=b$.

④$\{a_n\}$ 是等比数列，$S_1=a$，$a_3=b$.

⑤$\{a_n\}$ 满足 $a_{2n+2}=a_{2n}+a$，$a_{2n+1}=a_{2n-1}+b$，$(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=c$

三、解答题

17. 一养鱼专业户设计了如图3所示的鱼池. 若过道宽为 a，则成品鱼的身长最小为多少时，才不能进入未成品鱼池？（设成品鱼的身长与弯曲后的弦长的比为 $\sqrt{2}:1$）.

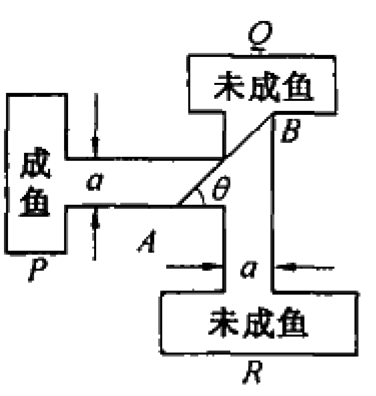


图 3

18. 在人寿保险业中，要重视某一年龄的投保人的死亡率，经随机抽样统计，得到某城市任意一个投保人能活到75岁的概率为0.60，试求：

(1) 3个投保人都能活到75岁的概率.

(2) 3个投保人中只有1人能活到75岁的概率.

(3) 3个投保人中至少有1人能活到75岁的概率.（结果精确到0.01）

19. 在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 的中心，E，F 分别是 CC_1，AD 的中点，求：

(1) OE 与 D_1F 所成的角.

(2) 面 OEB 与面 CD_1F 所成锐二面角的大小.

20. 随着我国加入WTO，某企业决定从甲、乙两种产品中选择一种进行投

资生产,打入国际市场.已知投资生产这两种产品的有关数据如下表所示(单位:万美元).

项目 类别	年固定成本	每件产品成本	每件产品销售价	每年最多生产的件数
甲产品	30	a	10	200
乙产品	50	8	18	120

其中,年固定成本与生产的件数无关,a 为常数,且 $4 \leqslant a \leqslant 8$.另外,年销售 x 件乙产品时需上交 $0.05x^2$ 万美元的特别关税.

(1) 写出该厂分别投资生产甲、乙两种产品的年利润 y_1, y_2 与生产相应产品的件数 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 之间的函数关系式.

(2) 分别求出投资生产这两种产品的最大年利润.

(3) 如何决定投资可获最大年利润.

21. 一条斜率为 1 的直线 l 与离心率为$\sqrt{3}$ 的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 交于 P, Q 两点,直线 l 与 y 轴交于点 R,且$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -3, \overrightarrow{PQ} = 4\overrightarrow{RQ}$,求直线与双曲线的方程.

参考答案

一、1 ~ 5 CCACA　6 ~ 10 BBCAB　11 ~ 12 CB

二、13. $(0,1) \cup (1,2)$　14. 3　15. $\left[-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$　16. ①②③

三、17. 解:设鱼身弯曲后的弦 AB 与过道的夹角为 θ,则

$$AB = \frac{a}{\sin\theta} + \frac{a}{\cos\theta}$$

问题归纳为求 $y = y(\theta) = \dfrac{a}{\sin\theta} + \dfrac{a}{\cos\theta}\left(\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ 的最小值.

$y' = a\left(-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)$,由 $y' = 0$,得 $\tan\theta = 1$.

所以 $\theta = 45°$ 是唯一极值点,易知 $y_{\min} = 2\sqrt{2}a$,从而成品鱼身长最小为 $4a$ 才不能进入未成品鱼池.(本题也可用均值不等式来解)

18. 解:(1) $p_1 = 0.6^3 \approx 0.22$.

(2) $p_2 = C_3^1 \times 0.6 \times (1 - 0.6)^2 \approx 0.29$.

(3) $p = 1 - (1 - 0.6)^3 \approx 0.94$.

19. 解:(1) 取 C_1D_1 中点 G_1,连结 G_1O, G_1E,则 $FD_1 /\!/ G_1O$,$\angle G_1OE$ 为 OE 与 D_1F 所成的角,由余弦定理得 $\cos\angle G_1OE = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$,所以 $\angle G_1OE =$

$\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$ 或 $\angle G_1OE=\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(2) 如图4,二面角 $C-MN-D$,在面 COE 中,作 $CG\perp OE$ 于 G,由 $OC\perp BD$(CG 在底面上的射影),所以 $CG\perp BD$,故 $CG\perp$ 面 DBE,在面 DBE 中,作 $GH\perp MN$ 交 MN 于 H,连结 CH,则 $\angle CHG$ 为所求二面角.

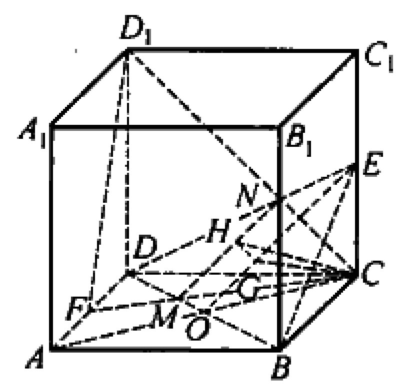


图4

在 $\triangle COE$ 中,$CG\cdot OE=OC\cdot EC$,所以 $CG=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,在 $\triangle DBE$ 中,$OM=\frac{MD}{2}$,$EN=\frac{ND}{2}$,所以 $MN\ /\!/\ OE$,所以 $HG=OM$.

又 $OM=OD-DM=OB-\frac{MB}{2}=OB-\frac{OB+OM}{2}$,所以 $HG=OM=\frac{OB}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,$\tan\angle CHG=\sqrt{3}$,$\angle CHG=\frac{\pi}{3}$.

注:本题也可建立以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线为 x,y,z 轴的空间直角坐标系求解.

20. 解:(1) $y_1=(10-a)x-30$,$x\leqslant 200$,且 $x\in\mathbf{N}^*$.

$y_2=-0.05x^2+10x-50$,$x\leqslant 120$,且 $x\in\mathbf{N}^*$.

(2) $y_{1最大}=1970-200a$,$y_{2最大}=450$.

(3) 令 $1970-200a=450$,得 $a=7.6$.

当 $4\leqslant a<7.6$ 时,投资甲产品;当 $7.6<a\leqslant 8$ 时,投资乙产品;当 $a=7.6$ 时,投资甲、乙两产品均可.

21. 解:由 $3=e^2=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2$ 得 $b^2=2a^2$,双曲线方程设为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2a^2}=1 \qquad ①$$

设直线 l 的方程为 $y=x+m$,代入①整理得

$$x^2-2mx-(m^2+2a^2)=0$$

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则

$$x_1+x_2=2m,x_1x_2=-m^2-2a^2$$

又 $y_1y_2=(x_1+m)(x_2+m)=2(m^2-a^2)$,所以

$$-3=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=m^2-4a^2$$

所以 $$4a^2-m^2-3=0 \qquad ②$$

因为 $\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{RQ}$,所以点 R 分 $\overrightarrow{PQ}$ 所成的比为3,设点 $R(0,m)$,则

$$m=\frac{y_1+3y_2}{1+3}=\frac{x_1+m+3(x_2+m)}{4}=\frac{x_1+3x_2}{4}+m$$

所以
$$x_1=-3x_2$$

代入 $x_1+x_2=2m$ 得

$$x_2=-m,x_1=3m$$

代入 $x_1x_2=-m^2-2a^2$,得

$$-3m^2=-m^2-2a^2$$

所以
$$m^2=a^2$$

代入②得

$$a^2=1$$

从而 $m=\pm 1$,所以直线 l 的方程为 $y=x\pm 1$,双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

介绍书号、刊号的校验码

书号的全称是"中国标准书号",也称"ISBN 号",它由标识符 ISBN 和 13 位数字(分为 5 段)组成,在每本书封底的定价旁边或条形码、版权页上,我们都能见到它的身影,它是图书的身份证.例如,笔者的第一本专著《初等数学研究(I)》已由哈尔滨工业大学出版社于 2008 年 9 月正式出版发行(16 开本,正文 677 页,833 千字),其书号是 ISBN 978-7-5603-2733-4.

我们该如何识别一个书号的真假呢? 下面介绍一个简单的方法.

书号的最后一位数字称为校验码,它是由 13 位数字书号的前 12 位数字经过一种计算得到的,其功能就在于对书号是否正确进行检验.举例说明如下:

13 位数字书号	ISBN 978-7-5603-2733-4											
取前 12 位数字	9	7	8	7	5	6	0	3	2	7	3	3
每个数字分别同 1,3 相乘	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
乘得的积	9	21	8	21	5	18	0	9	2	21	3	9
12 个乘积的和	126											
和被 10 除所得的余数	6											
用 10 减去余数得出校验码	4											

需要提醒注意的是,2007 年 1 月 1 日前国内出版的图书书号只有 10 位数字(分为 4 段,与 13 为数字的书号相比,少了"978"这一段),其校验码的算法有所不同,仍举例说明如下:

10 位数字书号	ISBN 7-5414-2711-x								
取前 9 位数字	7	5	4	1	4	2	7	1	1
每个数字分别同 10~2 中的某个数相乘	10	9	8	7	6	5	4	3	2
乘得的积	70	45	32	7	24	10	28	3	2
9 个乘积的和	221								
和被 11 除所得的余数	1								
用 11 减去余数得出校验码	x(在罗马数字中用 x 表示 10)								

值得一提的是,ISBN 7-5414-2711-x 是我的笔友张在明教授编著的《中学数学解题探索》(2006 年 8 月晨光出版社)的书号,张教授 1936 年出生于四川,1959 年云南大学毕业后分配到云南通海教高中 20 年,1979 年又调入玉溪师专(今玉溪师范学院)教数学分析,1996 年光荣退休.从 1980 年至今,张教授在国内外刊物上共发表论文 150 篇,特别是在 2002 年不幸染上恶疾后,在化疗之余仍继续解题探索,撰写文章,这正好验证了鲁迅先生的一句名言:"倘能生存,我当然仍要学习."这种精神值得我们教育工作者、各位学者永远好好学习!

如果一本图书的书号的最后一位数字(即校验码)与我们用上述方法算出来的数字不符,那么这本图书一定是非法图书.

下面再来说说刊号及其真假的简单识别.

刊号的全称是"中国标准连续出版物号",它由"国际标准连续出版物号"(也称国际刊号,ISSN 号)和"国内统一连续出版物号"(也称国内刊号,CN 号)两部分组成,例如,《数学通报》的刊号为 $\frac{\text{ISSN 0583 - 1458}}{\text{CN 11 - 2254/O1}}$,其中 ISSN 0583-1458 就是国际刊号,CN 11-2254/O1 就是国内刊号.刊号的真假也有类似的简单识别方法.

8 位数字的国际刊号的最后一位数字就是校验码,算法如下:

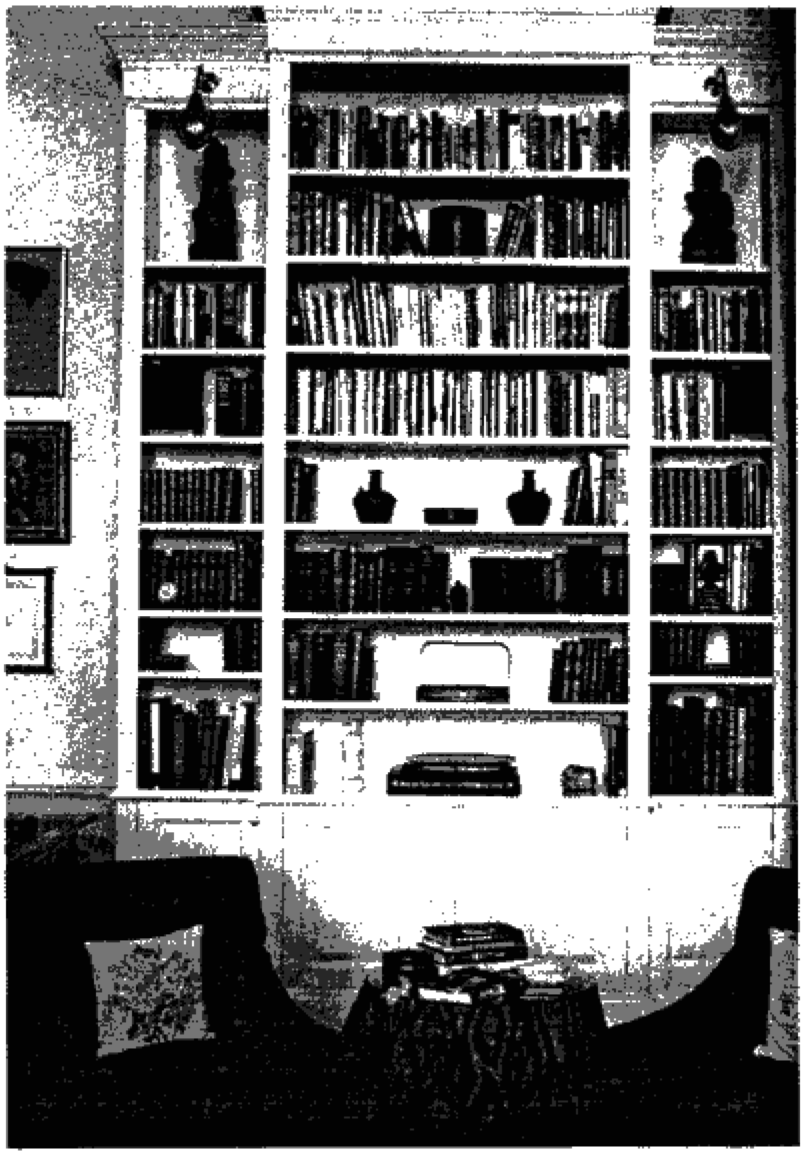
8 位数字国际刊号	ISSN 0583-1458						
取前 7 位数字	0	5	8	3	1	4	5
每个数字分别同 8~2 中的某个数相乘	8	7	6	5	4	3	2
乘得的积	0	35	48	15	4	12	10
7 个乘积的和	124						
和被 11 除所得的余数	3						
用 11 减去余数得出校验码	8						

如果一本期刊的国际刊号的最后一位数字(即校验码)与我们用上述方法算出来的数字不符,那么这本期刊一定是非法期刊.

参考文献

[1] 刘祖希.书刊中的数学[J].数学通报,2008(11):61-62.

数学试题



排列、组合和二项式定理趣题

1 象棋比赛

例 1 某一国际象棋比赛中有两人因被查出服用违禁药品而被取消继续比赛的资格.已知他们每人只比赛了 3 局,而且相互之间没有赛过,比赛全部结束后,在总结报告中指出一共进行了 84 次对局.问当初这届比赛共有多少人参加?

解 设当初参赛者共有$(n+2)$人,由题意有 $C_n^2+6=84$,即 $n^2-n-156=0$,解得 $n=13$.

故比赛开始时,参加的选手共有 15 人.

2 棋盘式街道

例 2 某城市的街道,东西方向的有 6 条,南北方向的有 5 条,试问从西南角的点 A 走到东北角的点 B,只能走最短路,有多少种不同走法?(城市街道布局如图 1 所示)

解 走最短路的话,一定包括 9 段,其中 4 段取西东方向,5 段取南北方向,所以可归结为 9 个不同元素中取 4 个(或 5 个)元素的组合数,得不同的走法有 $C_9^4=C_9^5=126$ 种.

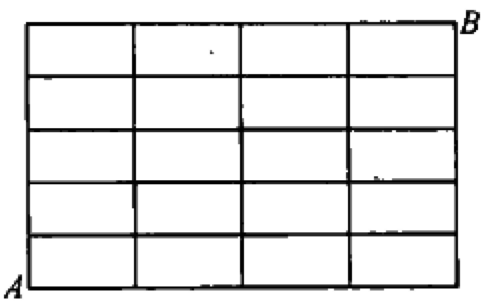


图 1

原题也可改编成:

将 4 斤桂圆与 5 斤红枣分别送给 9 户人家,每户 1 斤,共有多少种不同的送法?

显然这是一个组合问题,把桂圆送给张家与把红枣送给张家当然不可相提并论.可是桂圆一旦分好后,剩下来的人家当然就是拿红枣了,故而共有 $C_9^4=C_9^5=126$ 种.

例 3 试问:在$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}$的展开式中有多少项是有理数?

解 通项 $T_{r+1}=C_{100}^r(\sqrt{2})^{100-r}(\sqrt[3]{3})^r=C_{100}^r\times 2^{50-\frac{r}{2}}\times 3^{\frac{r}{3}}$.

T_{r+1} 是有理数的充要条件为 $50-\frac{r}{2}$ 及$\frac{r}{3}$ 均是自然数,即 r 是6的倍数,又 r 在0与100之间(包括0和100),所以 r 应取0,6,12,…,96,即 r 的取值有17个,所以有理项共有17项.

3 等差数列的二项式系数

例4 在$(x+y)^{23}$展开式中有连续3项的系数成等差数列,请求出这3个系数.

解 设这3个系数是 $C_{23}^{k},C_{23}^{k+1},C_{23}^{k+2}$,得 $2C_{23}^{k+1}=C_{23}^{k}+C_{23}^{k+2}$,即

$$\frac{2\times 23!}{(k+1)!(22-k)!}=\frac{23!}{k!(23-k)!}+\frac{23!}{(k+2)!(21-k)!}$$

两边都乘以$\frac{(k+2)!(23-k)!}{23!}$,得

$$2(k+2)(23-k)=(k+1)(k+2)+(23-k)(22-k)$$

解得 $k=8$ 或 13.

所求三个系数为 $C_{23}^{8},C_{23}^{9},C_{23}^{10}$ 或 $C_{23}^{13},C_{23}^{14},C_{23}^{15}$.

4 常数立奇功

例5 计算:$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$.

解

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=C_n^0+C_n^1\frac{1}{x}+C_n^2\left(\frac{1}{x}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{x}\right)^n$$

当这两个式子相乘时,右端的常数项正好是$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$.

而左端为$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$.

因此,所求的和就是$(1+x)^{2n}$的展开式中 x^n 项的系数 C_{2n}^{n}.

排列组合、二项式定理同步测试题

一、选择题(答案唯一)

1.5人排一个5天的值日表,每天排一人值日,每人可以排多天或不排,但相邻两天不能排同一人,值日表排法的总数为(　　).

A.120　　B.324　　C.720　　D.1 280

2.一次考试中,要求考生从试卷上的9个题目中选6个进行答题,要求至少包含前5个题目中的3个,则考生答题的不同选法的种数是(　　).

A.40　　B.74　　C.84　　D.200

3.以三棱柱的6个顶点中的4个顶点为顶点的三棱锥有(　　).

A.18个　　B.15个　　C.12个　　D.9个

4.从一架钢琴挑出的10个音键中,分别选择3个,4个,5个,…,10个键同时按下,可发出和弦,若有一个音键不同,则发出不同的和弦,则这样的不同的和弦种数是(　　).

A.512　　B.968　　C.1 013　　D.1 024

5.如果$(x+x\sqrt{x})^n$的展开式中所有奇数项的系数和等于512,则展开式的中间项是(　　).

A.$C_{10}^{6}x^{8}$　　B.$C_{10}^{5}x^{7}\sqrt{x}$　　C.$C_{8}^{4}x^{6}$　　D.$C_{11}^{6}x^{8}\sqrt{x}$

6.有15只灯,要求关掉6只,且相邻的灯不能关掉,两端的灯不关掉,则不同的关灯方法有(　　).

A.28种　　B.84种　　C.180种　　D.360种

7.若n是奇数,则$7^n+C_n^1 7^{n-1}+C_n^2 7^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}7$被9除的余数是(　　).

A.0　　B.2　　C.7　　D.8

8.在$(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{2\,005}$的展开式中,$x^3$的系数等于(　　).

A.$C_{2\,005}^{4}$　　B.$C_{2\,006}^{4}$　　C.$C_{2\,005}^{3}$　　D.$C_{2\,006}^{3}$

9.若$x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*$,定义:$M_x^n=x(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n-1)$,例如:$M_{-5}^{5}=(-5)(-4)(-3)(-2)(-1)=-120$,则有关函数$f(x)=xM_{x-9}^{19}$的正确描述为(　　).

A. $f(x)=f(-x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$

B. $f(-x)=-f(x)$ 且 $f(x)\neq f(-x)$

C. $f(-x)=f(-x)$ 且 $f(-x)=-f(x)$

D. $f(x)\neq f(-x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$

10. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$,定义从 A 到 B 的映射 $f(x)$,满足 $x^2+xf(x)+f(x)$ 的奇数,则这样的映射个数为( ).

A. 3^3　　B. 3^2　　C. 7　　D. 6

11. 已知 $\sum\limits_{i=m}^{n}a_i=a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n$(其中 $m,n\in\mathbf{N}$,且 $m<n$),若 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i(3-x)^i=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 等于( ).

A. -2　　B. 0

C. $(-1)^n$　　D. n 为偶数时为 0, n 为奇数时为 -2

12. 有甲、乙、丙、丁 4 种不同的种子分别在 3 块不同的土地试种,每块土地必须且只能试种 1 种种子,而甲必须选入,那么不同的试种方案有( ).

A. A_4^3 种　　B. $C_3^2A_3^3$ 种　　C. $C_4^3C_3^1$ 种　　D. $A_4^3A_3^3$ 种

二、填空题

13. 设 $f(x)=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x+1$,则 $f(x)$ 的反数 $f^{-1}(x)=$ ________.

14. 如果 $a_1(x-1)^4+a_2(x-1)^3+a_3(x-1)^2+a_4(x-1)+a_5=x^4$,那么 $a_2-a_3+a_4=$ ________.

15. 一栋 7 层的楼房备有电梯,在一楼有甲、乙、丙三人进了电梯,则满足有且只有一人要上 7 楼,且甲不在 2 楼下电梯的所有可能情况种数有________.

16. 已知 $(x+1)^6(ax-1)^2$ 的展开式中, x^3 的系数是 56,则实数 a 的值为________.

三、解答题

17. 已知 $\left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)^n$ 展开式中的倒数第 3 项的系数为 45,求:

(1) 含 x^3 的项.

(2) 系数最大的项.

18. 将 7 个小球任意放入 4 个不同的盒子中,每个盒子都不空.

(1) 若 7 个小球相同,共有多少种不同的放法?

(2) 若 7 个小球互不相同,共有多少种不同的放法?

19. 7 名学生站成一排,下列情况有多少种不同排法?

(1) 甲、乙必须排在一起.

(2) 甲不在排头,乙不在排尾.

(3) 甲、乙、丙互不相邻.

(8) 甲、乙之间必须隔一人.

20. 用数字 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的四位数.

(1) 有多少个四位偶数?

(2) 若按从小到大排列,3 024 是第几个数?

(3) 组成的所有四位数的和是多少?

21. 求证:对一切 $n \in \mathbf{N}^*$,都有 $2 \leqslant (1+\frac{1}{n})^n < 3$.

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,且 $g(x) = C_n^0 \cdot f(\frac{0}{n})x^0(1-x)^n + C_n^1 f(\frac{1}{n})x(1-x)^{n-1} + C_n^2 f(\frac{2}{n})x^2(1-x)^{n-2} + \cdots + C_n^n f(\frac{n}{n})x^n(1-x)^0$.

(1) 若 $f(x) = 1$,求 $g(x)$.

(2) 若 $f(x) = x$,求 $g(x)$.

参考答案

一、

1. D(提示:分五步,$5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1\ 280$.)

2. B(提示:分三类,$C_5^3C_4^3 + C_5^4C_4^2 + C_5^5C_4^1 = 74$.)

3. C(提示:$C_6^4 - 3 = 12$.)

4. B(提示:分 8 类,$C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + \cdots + C_{10}^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^{10} - (C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2) = 2^{10} - (1 + 10 + 45) = 968$.)

5. B(提示:因为 $2^{n-1} = 512$,所以 $n = 10$,中间项为 $T_6 = C_{10}^5 x^5(\sqrt{x})^5 = C_{10}^5 x^7\sqrt{x}$.)

6. A(提示:将 9 只不关的灯排成一排,将关掉的 6 只灯插入 9 只不关的灯的 8 个间隙中的 6 个空隙中,得 $C_8^6 = 28$(种).)

7. C(提示:原式 $= (7+1)^n - 1 = (9-1)^2 - 1 = 9k - 2 = 9k' + 7$($k$ 和 k' 均为正整数).)

8. B(提示: 原式 $= \dfrac{(1+x)^3[1-(1+x)^{2\,003}]}{1-(1+x)} = \dfrac{-(1+x)^3 + (1+x)^{2\,006}}{x}$,即求 $(1+x)^{2\,006}$ 展开式中 x^4 的系数,为 $C_{2\,006}^4$.)

9. A(提示:$f(x) = x(x-9)(x-8)\cdot\cdots\cdot(x-9+19-1) = x^2(x^2-1)\cdot(x^2-4)\cdot\cdots\cdot(x^2-81)$.)

10. C(提示:由 $x^2 + (x+1)f(x)$ 为奇数知,若 x 为奇数,则 $f(x)$ 为 B 中任意数;若 x 为偶数,则 $f(x)$ 为 B 中的奇数,故 $2 \times 3 + 1 \times 1 = 7$.)

11. D(提示:$f(x)=[1-(3-x)]^n=(x-2)^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,所以 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=f(1)=(-1)^n$. 且 $a_0=1$,所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=(-1)^n-1$.)

12. B(提示:将3块不同的土地看成3个位置,由条件甲必须坐一个位置,剩下的两个可以从乙、丙、丁3种不同的种子选两个来坐,最后再将这三个位置进行全排列得 $C_3^2A_3^3$.)

二、13. $\sqrt[5]{x-2}+1(x\in\mathbf{R})$(提示:因为 $f(x)=(x-1)^5+2$,所以 $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x-2}+1$.)

14. 2(提示:比较等式两边 x^4 的系数,得 $a_1=1$.令 $x=1$,得 $a_5=1$;令 $x=0$,得 $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0$,所以 $a_2-a_3+a_4=2$.)

15. 65(提示:分二类.第一类,甲上7楼,有 5^2 种;第二类,甲不上7楼,且不在2楼下,有 $4\times2\times5$ 种,故有 $5^2+4\times2\times5=65$(种).)

16. -1 或 6(提示:$(x+1)^6(ax-1)^2=(x^6+C_6^1x^5+C_6^2x^4+C_6^3x^3+C_6^4x^2+C_6^5\cdot x+1)(a^2x^2-2ax+1)$. x^3 项的系数为 $C_6^3\cdot1+C_6^4(-2a)+C_6^5\cdot a^2=56$,即 $a^2-5a-6=0$,所以 $a=-1$ 或 $a=6$.)

三、17. 解:(1) 由题设知 $C_n^{n-2}=45$,即 $C_n^2=45$,所以 $n=10$,则

$$T_{r+1}=C_{10}^r(x^{-\frac{1}{4}})^{10-r}\cdot(x^{\frac{2}{3}})^r=C_{10}^rx^{\frac{11r-30}{12}}=3$$

令 $\frac{11r-30}{12}=3$,得 $r=6$,所以含 x^3 的项为

$$T_7=C_{10}^6x^3=C_{10}^4x^3=210x^3$$

(2) 系数最大的项为中间项,即

$$T_6=C_{10}^5x^{\frac{55-30}{12}}=252x^{\frac{25}{12}}$$

18. (1) 解法1:因为 $7=1+1+1+4=1+1+2+3=1+2+2+2$,所以分三类,共有分法 $C_4^1+A_4^2+C_4^1=20$(种).

解法2:(隔板法) 将7个小球排成一排,插入3块隔板,故共有分法 $C_6^3=20$(种).

(2) 因为 $7=1+1+1+4=1+1+2+3=1+2+2+2$,

所以共有分法 $C_7^4A_4^4+C_7^2C_5^3C_2^1C_1^1+C_7^2C_5^2C_3^3C_1^1=6\,510$(种)

19. 解:(1)(捆绑法) 先将甲、乙看成一人与其余的作全排列有 A_6^6 种,然后甲、乙换位有2种,所以不同排法共有 $2A_6^6=1\,440$(种).

(2)(间接法) 甲在排头或乙在排尾的排法有 $2A_6^6$ 种,其中都包含甲在排头且乙在排尾的情形,由整体排异得合条件的不同排法有 $A_7^7-2A_6^6+A_5^5=$

3 720(种).

(3)(插空法)先让甲、乙、丙去插入其余4名同学及两端产生的5个空位中有 A_5^3,再将4名同学排列有 A_4^4 种,由乘法原理得共有 $A_5^3A_4^4 = 1\ 440$(种).

(4)(捆绑法)先从其余5人中选1人放在甲、乙之间有5种选法,甲、乙换位有2种,再把这三人看成一个整体与其余4人做全排列有 A_5^5 种,由乘法原理得共有 $5A_5^5 \times 2 = 1\ 200$(种).

20. 解:(1)若无条件限制,总排列数为 A_5^4,其中不符合条件的有两类:①0在千位,有 A_4^3 种,②1,3在个位,有 $A_2^1A_3^1A_3^2$,则四位偶数有 $A_5^4 - A_4^3 - A_2^1A_3^1A_3^2 = 60$(个).

(2)(分类法)由低位到高位逐级分为:①千位为1或2时,有 $A_2^1A_4^3$ 个.②千位是3时,百位可排0,1或2.当百位排0,1时,有 $A_2^1A_3^2$ 个.当百位排2时,比3 204小的仅有3 201,故比3 204小的四位数共有 $A_2^1A_4^3 + A_2^1A_3^2 + 1 = 61$(个),3 204是第62个数.

(3)共可组成 $A_5^1A_5^3 = 300$ 个无重复数字的四位数:个位数字是1的四位数有 $A_4^1A_4^2 = 48$(个),同理,个位数字是2,3,4,5的四位数有48个,所以个位和为 $A_4^1A_4^2(1+2+3+4+5)$,同样十位数和百位数上的数是1,2,3,4,5的四位数也有 $A_4^1A_4^2 = 48$(个),这些数的和为 $A_4^1A_4^2(1+2+3+4+5)\times(10+100)$,千位数上的数是1,2,3,4,5各有 A_5^3 个,这些数的和为 $A_5^3(1+2+3+4+5)\times 1\ 000$,故所有这300个数的和为

$$A_5^3(1+2+3+4+5)\times 1\ 000 + A_4^1A_4^2(1+2+3+4+5)\times(1+10+100) = 979\ 920$$

21. 证明:由二项式定理知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + C_n^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} + \cdots$$

所以
$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} <$$
$$2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} =$$
$$2 + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) =$$
$$3 - \frac{1}{n} < 3$$

当且仅当 $n = 1$ 时,$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2$;

当且仅当 $n \geqslant 2$ 时,$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

22.解:(1) 因为 $f(x)=1$,所以

$$f(\frac{0}{n})=f(\frac{1}{n})=\cdots=f(\frac{n}{n})=1$$

所以
$$g(x)=C_n^0x^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^nx^n(1-x)^0=(1-x+x)^n=1$$

又 0^0 无意义,所以 $g(x)=1$,且 $x\in\mathbf{R},x\neq0,x\neq1$.

(2) 因为 $f(x)=x$;所以 $f(\frac{k}{n})=\frac{k}{n}(k=0,1,2,\cdots,n)$,所以

$$g(x)=C_n^0\cdot\frac{0}{n}\cdot x^0(1-x)^n+C_n^1\cdot\frac{1}{n}x^1(1-x)^{n-1}+C_n^2\cdot\frac{2}{n}x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^n\frac{n}{n}x^n$$

因为

$$\frac{r}{n}C_n^r=\frac{r}{n}\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!}=C_{n-1}^{r-1}$$

所以
$$g(x)=0+C_{n-1}^0x(1-x)^{n-1}+C_{n-1}^1x^2(1-x)^{n-2}+C_{n-1}^2x^3\cdot(1-x)^{n-3}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}x^n=x[C_n^0(1-x)^{n-1}+C_{n-1}^1x(1-x)^{n-2}+C_{n-1}^2\cdot x^2(1-x)^{n-3}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}]=x(1-x+x)^{n-1}=x$$

所以 $g(x)=x$,且 $x\in\mathbf{R},x\neq0,x\neq1$.

综合题新编选登

题104 已知直线 $l_i:x-y+c_i=0,(i=1,2,\cdots,n),\sqrt{2}=c_1<c_2<\cdots<c_n$,直线 l_{j-1} 与 l_j 的距离为$j(j=2,3,\cdots,n)$.

(1) 求 c_n.

(2) 求数列$\{\frac{1}{c_n}\}$的前几项和 T_n 及$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

(3) 求直线 l_n 与 x 轴,y 轴围成图形的面积.

(4) 求证:直线 l_n,l_{n-1} 及 x 轴,y 轴围成图形的面积是 $n^3(n\geqslant 2)$.

(5) 求数列$\{n^3\}$的前 n 项和.

解 (1) 如图1,直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 均在原点的同侧,它们的斜率均为 1.

因为原点(0,0)到直线 $l_1:x-y+c_1=0(c_1=\sqrt{2})$ 的距离为1,所以由题意得原点到直线 $l_n:x-y+c_n=0$ 的距离为

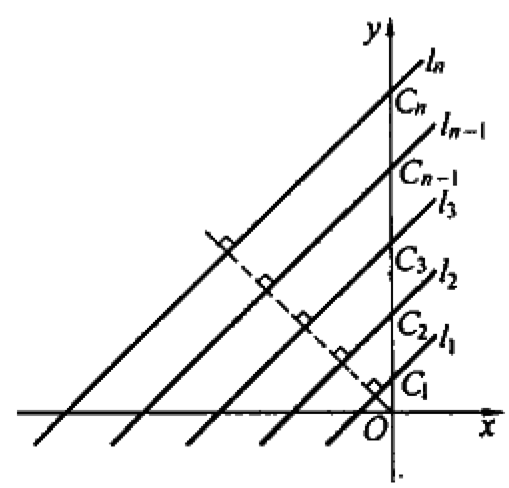


图 1

$$\frac{c_n}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

所以
$$c_n=\frac{\sqrt{2}}{2}n(n+1)$$

(2) 因为$\frac{1}{c_n}=\frac{\sqrt{2}}{n(n+1)}=\sqrt{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$,所以

$$T_n=\sqrt{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=\sqrt{2}(1-\frac{1}{n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\sqrt{2}$$

(3) 直线 $l_n:x-y+c_n=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 $-c_n$ 和 c_n,所以所求三角形的面积为

$$S_n=\frac{1}{2}c_n^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(4) 如图 1,有直线 l_n, l_{n-1} 及 x 轴,y 轴围成图形的面积是

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4}(n-1)^2n^2 = n^3$$

(5)$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 1^3 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \cdots + (S_n - S_{n-1})$(用结论 4) $=$

$$1^3 - S_1 + S_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

试题背景 本题是笔者由数列及直线方程知识编拟的一道综合题.

知识能力要求 (1) 理解直线方程及有关概念,会求截距,点到直线的距离.

(2) 会用裂项法求数列的前 n 项和,会求数列的极限.

难度系数 0.60.

题 136 函数 $f(x)$ 对一切实数 x,y 均有 $f(x+y) - f(y) = x(x+2y+1)$ 成立,且 $f(1) = 0$.

(1) 求 $f(0)$.

(2) 求 $f(x)$.

(3) 当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时,$f(x) + 2 < \log_a x$ 恒成立,试求 a 的取值范围.

解 (1) 令 $x = 1, y = 0$ 便可求出 $f(0) = -2$.

(2) 令 $y = 0$,可得 $f(x) = x^2 + x - 2$.

(3)$f(x) + 2 < \log_a x$,即

$$x^2 + x < \log_a x$$

因为 $x \in (0, \frac{1}{2})$,所以 $x^2 + x > 0$;当 $a > 1$ 时 $\log_a x < 0$,说明 $a > 1$ 不合题意,得 $0 < a < 1$.

设 $h(x) = x^2 + x - \log_a x (0 < x < \frac{1}{2}, 0 < a < 1)$,题意即 $h(x) < 0$ 恒成立.

因为 $h'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x\ln a} > 0$ 恒成立,所以 $h(x)$ 是增函数,得 $h(x) < h(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \log_a \frac{1}{2} \cdot h(x) < 0$ 恒成立 $\Rightarrow \frac{3}{4} - \log_a \frac{1}{2} \leqslant 0$ 恒成立,得 a 的取值范围是 $[2^{-\frac{4}{3}}, +\infty)$.

试题背景 本题是笔者在高三复习"函数"一章时编拟的一道关于抽象函数的综合题.

知识能力要求 会用赋值法解抽象函数的简单问题;会用导数判断函数的增减性进而解某些特殊的超越不等式.

难度系数　0.50.

题 141　设关于 x 的一元二次方程 $2x^2-ax-2=0$ 的两根为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，函数 $f(x)=\dfrac{4x-a}{x^2+1}$.

(1) 求 $f(\alpha)+f(\beta)$ 的值.

(2) 求证：$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数.

(3) 当 a 为何值时，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值与最小值之差最小？

解　$\alpha+\beta=\dfrac{a}{2}$，$\alpha\beta=-1$.

(1)
$$f(\alpha)+f(\beta)=\frac{4\alpha-a}{\alpha^2+1}+\frac{4\beta-a}{\beta^2+1}=$$
$$\frac{4(\alpha\beta+1)(\alpha+\beta)-a[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2]}{(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta+1}=$$
$$\frac{-a(\frac{a^2}{4}+4)}{\frac{a^2}{4}+4}=-a$$

(2) 设 $\alpha\leqslant x_1<x_2\leqslant\beta$，得
$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{4+a(x_1+x_2)-4x_1x_2}{({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)}(x_1-x_2)$$
$$4+a(x_1+x_2)-4x_1x_2=-4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)(x_1+x_2)-4x_1x_2=$$
$$2[(x_1-\beta)(\alpha-x_2)+(x_1-\alpha)(\beta-x_2)]>0$$

又 $x_1-x_2<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是增函数.（注：用导数也可证得结论(2).）

(3) 由(2)知，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最小值是 $f(\alpha)$，最大值是 $f(\beta)$，则
$$f(\beta)-f(\alpha)=\frac{4+a(\alpha+\beta)-4\alpha\beta}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}(\beta-\alpha)=$$
$$\frac{4+\frac{a^2}{2}+4}{4+\frac{a^2}{4}}\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}=$$
$$2\sqrt{\frac{a^2}{4}+4}=\sqrt{a^2+16}$$

所以，当且仅当 $a=0$ 时，$f(\beta)-f(\alpha)$ 取到最小值.

试题背景　在数学复习备考中，很多师生只重视思维方法、解题技巧等方面的训练，忽视了正确结果的计算，为纠正此种不良倾向，笔者编拟了此题.

知识能力要求　会证明函数的单调性，化简函数的表达式，并会求出函数

的最值,会用韦达定理解题,会准确进行式的化算及恒等变形.

难度系数 0.35.

题193 如图2,曲线 $y=\sqrt{x}$ 上的点 $P_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 与 x 轴正半轴上的点 Q_i 及原点 O 构成一系列正三角形 $P_iQ_{i-1}Q_i$(记 Q_0 为 O),记 $a_n=|Q_nQ_{n-1}|$.

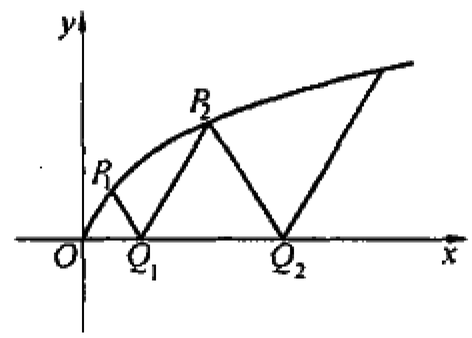


图2

(1) 求 a_1 的值.

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.

(3) 求证:当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{1}{a_n^{\ 2}}+\frac{1}{a_{n+1}^{\ 2}}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}^{\ 2}}<\frac{3}{2}$.

解 (1) 可设 $P_1(t^2,t)(t>0)$,得 $k_{OP_1}=\frac{1}{t}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$,$P_1(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$. $a_1=|Q_1Q_0|=|OQ_1|=|OP_1|=\frac{2}{3}$.

(2) 设 $P_n(t_n^{\ 2},t_n)$,得直线 P_nQ_{n-1} 的方程为 $y-t_n=\sqrt{3}(x-t_n^{\ 2})$,$Q_{n-1}(t_n^{\ 2}-\frac{t_n}{\sqrt{3}},0)$,

直线 P_nQ_n 的方程为 $y-t_n=-\sqrt{3}(x-t_n^{\ 2})$,$Q_n(t_n^{\ 2}+\frac{t_n}{\sqrt{3}},0)$,所以也有 $Q_{n-1}(t_{n-1}^{\ 2}+\frac{t_{n-1}}{\sqrt{3}},0)$,得

$$t_n^{\ 2}-\frac{t_n}{\sqrt{3}}=t_{n-1}^{\ 2}+\frac{t_{n-1}}{\sqrt{3}}$$

由 $t_n>0$,得

$$t_n-t_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

所以
$$t_n=t_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(n-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}n$$

$$Q_n(\frac{1}{3}n(n+1),0),Q_{n-1}(\frac{1}{3}n(n-1),0)$$

$$a_n=|Q_nQ_{n-1}|=\frac{2}{3}n$$

(3) 证法1:当 $n\geqslant 2$ 时,

左边 $=\frac{9}{4}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]<$

$$\frac{9}{4}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}\right]=$$

$$\frac{9}{4}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]=$$

$$\frac{9}{4}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right]=$$

$$\frac{9}{4}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n}\right]\leqslant$$

$$\frac{9}{4}\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\times 2}\right]=\frac{9}{8}<\frac{3}{2}$$

证法 2:易证$\frac{n^2}{(2n+1)^2}+\frac{n^2}{(2n+2)^2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1$,所以

$$\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}-\frac{1}{n^2}<0$$

记 $c_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$,得

$$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+2)^2}-\frac{1}{n^2}<0$$

$$c_n>c_{n+1}$$

所以

$$c_n\leqslant c_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}=\frac{61}{144}$$

$$\frac{1}{a_n{}^2}+\frac{1}{a_{n+1}{}^2}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}{}^2}=\frac{9}{4}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=$$

$$\frac{9}{4}c_n\leqslant\frac{9}{4}\times\frac{61}{144}=\frac{61}{64}<\frac{3}{2}$$

由证法 2 知,还可将不等式右边的"$<\frac{3}{2}$"改为"$\leqslant\frac{61}{64}$",并且这是最佳改进.

试题背景 本题融圆锥曲线、直线方程、两点间距离公式、数列、不等式于一体,有较大难度.

知识能力要求 熟练掌握圆锥曲线方程的有关知识,会求各种形式的直线方程,用递推公式求数列的通项公式,用放缩法或单调性证明与数列有关的不等式.

难度系数 0.50.

题 130 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{R})$.当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 取极大值$\frac{2}{3}$,且函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于点$(-1,0)$对称.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式.

(2) 试在函数 $y=f(x)$ 的图象上求两点,使以这两点为切点的切线互相垂直,且切点的横坐标都在 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 上.

(3) 设 $x_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}, y_m=\dfrac{\sqrt{2}(1-3^m)}{3^m}(m,n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: $|f(x_n)-f(y_m)|<\dfrac{4}{3}$.

解 (1) 将 $y=f(x+1)$ 的图象向右平移一个单位,得 $y=f(x)$ 的图象,所以得 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称,即 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(x)=a_1x^3+a_3x$.

由题意,得

$$\begin{cases} f'(-1)=3a_1+a_3=0 \\ f(-1)=-a_1-a_3=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{3} \\ a_3=-1 \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$$

可以检验 $f(x)$ 满足题意:当 $x=-1$ 时, $f(x)$ 取极大值 $\dfrac{2}{3}$.

所以,所求 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$.

(2) $f'(x)=x^2-1$. 设所求两点为 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))(x_1,x_2\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}])$, 得

$$f'(x_1)\cdot f'(x_2)=(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1$$

因为 $x_1^2-1, x_2^2-1\in[-1,1]$, 所以

$$\begin{cases} x_1^2-1=-1 \\ x_2^2-1=1 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x_1^2-1=1 \\ x_2^2-1=-1 \end{cases}$$

即 $(x_1,x_2)=(0,\pm\sqrt{2})$, 或 $(\pm\sqrt{2},0)$

从而可得所求两点的坐标分别为: $(0,0),(\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{3})$; 或者 $(0,0),(-\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{3})$.

(3) 易知 $x_n \in [\frac{1}{2},1)$，当 $x \in [\frac{1}{2},1)$ 时 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1)$ 上递减，得 $f(x_n) \in (f(1),f(\frac{1}{2})]$，即 $f(x_n) \in (-\frac{2}{3},-\frac{11}{24}]$.

易知 $y_m \in (-\sqrt{2},-\frac{2}{3}\sqrt{2})$，用导数可求得 $f(y_m) \in (f(-\sqrt{2}),f(-1)]$，即 $f(y_m) \in (\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3}]$，所以

$$|f(x_n)-f(y_m)| = f(y_m)-f(x_n) < \frac{2}{3}-(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$$

试题背景 本题是一道函数综合题，涉及导数、极值；奇偶性、对称性、图象平移；单调性、最值、不等式；解析几何的斜率等内容.

知识能力要求 求函数的导数及用导数的几何意义求切线斜率；用函数图象的平移、对称性、奇偶性解题；用导数求函数的值域；用变量的取值范围求不定方程的解.

难度系数 0.40.

题 140 已知集合 M 是同时满足下列三个性质的函数 $f(x)$ 的全体：

①$f(x)$ 的图象是连续的；

②$f(x)$ 在其定义域上是单调函数；

③ 在 $f(x)$ 的定义域内存在闭区间 $[a,b]$，使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值是 $\frac{a}{2}$，且最大值是 $\frac{b}{2}$.

请解答以下问题：

(1) 判断函数 $g(x)=-x^3$ 是否属于集合 M?并说明理由.若是，请找出满足 ③ 的闭区间 $[a,b]$.

(2) 若函数 $h(x)=\sqrt{x-1}+t \in M$，求实数 t 的取值范围.

解 (1) 显然 $g(x)$ 满足 ①，②.若 $g(x)$ 存在满足 ③ 的闭区间 $[a,b]$，则 $x \in [a,b]$ 时，$g(x) \in [g(b),g(a)]$，且 $[g(b),g(a)] = [\frac{a}{2},\frac{b}{2}]$，所以

$$\begin{cases} g(b) = -b^3 = \dfrac{a}{2} \\ g(a) = -a^3 = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

再由 $a<b$，可解得 $[a,b] = [-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

由此也知 $g(x)$ 满足 ③，所以 $g(x) \in M$.

(2) 易知 $h(x)$ 满足 ①，②，所以 $h(x) \in M \Leftrightarrow h(x)$ 满足 ③，即 $x \in [a,b]$

时，$h(x)\in[h(a),h(b)]=[\frac{a}{2},\frac{b}{2}]$，得

$$\begin{cases}h(a)=\sqrt{a-1}+t=\dfrac{a}{2}\\ h(b)=\sqrt{b-1}+t=\dfrac{b}{2}\end{cases}$$

即方程$\sqrt{x-1}+t=\frac{x}{2}$有两个不同的解，也即方程$\sqrt{x-1}=\frac{x}{2}-t$有两个不同的解，也即函数$y=\sqrt{x-1}$，$y=\frac{x}{2}-t$有两个不同的交点.

如图3，若直线$y=\frac{x}{2}-t$过点$(1,0)$时，直线为$y=\frac{1}{2}(x-1)$，与y轴的交点是$(0,-\frac{1}{2})$.

若直线$y=\frac{x}{2}-t$与抛物线$y=\sqrt{x-1}$相切时，由$\Delta=0$可求得$t=0$，此时直线为$y=\frac{x}{2}$，它与y轴的交点是$(0,0)$.

直线$y=\frac{x}{2}-t$与y轴的交点是$(0,-t)$.

由题意，得$-\frac{1}{2}\leqslant -t<0$，所求$t$的取值范围是$(0,\frac{1}{2}]$.

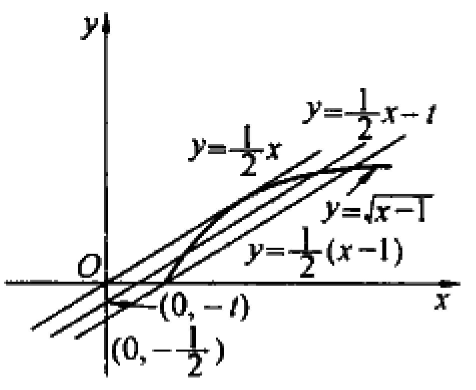


图3

试题背景　本题是由各种复习资料中流传很广的“闭函数”问题改编成的一道新题.

知识能力要求　有较高的审题能力(理解并运用创新题型的题意解题)；解决元素与集合之间关系的问题；有解方程组等一定的计算能力；用数形结合思想求方程解的个数问题进而求出参数的取值范围.

难度估计　0.55.

题151　设$\{a_n\}$是等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，$S_n$表示$\{b_n\}$的前$n$项和. 若$\{a_n\}$满足$3a_5=8a_{12}>0$，则$n$为何值时$S_n$取最大值?

解　设$\{a_n\}$的公差为d，由$3a_5=8a_{12}>0$，得

$$3(a_1+4d)=8(a_1+11d)>0$$

得

$$a_1=-\frac{76}{5}d,d<0$$

则

$$a_n=a_1+(n-1)d=(n-16\frac{1}{5})d$$

$$b_n = (n - 16\frac{1}{5})(n - 15\frac{1}{5})(n - 14\frac{1}{5})d^3$$

设 $c_n = \frac{b_n}{d^3} = (n - 16\frac{1}{5})(n - 15\frac{1}{5})(n - 14\frac{1}{5})$，则$\{c_n\}$的前 n 项和 $T_n = \frac{S_n}{d^3}$.

因为 $d < 0$，所以当且仅当 T_n 取最小值时 S_n 取最大值.

当 $n = 1,2,\cdots,14$ 时，$c_n < 0$；

$c_{15} = \frac{24}{125}$；$c_{16} = -\frac{36}{125}$；

当 $n \geqslant 17$ 时，$c_n > 0$.

所以 T_{16} 最小，S_{16} 最大，即当且仅当 $n = 16$ 时 S_n 取最大值.

试题背景 本题是数列方面的一道综合题. 涉及等差数列的通项公式，各量之间的关系；数列的前 n 项和 S_n 的最值的处理技巧.

知识能力要求 用通项公式处理等差数列的诸元素之间的关系；充分运用两个数列之间的关系解决数列问题(即等价转化).

难度系数 0.60.

题 171 设函数 $f(x)$ 的定义域、值域均为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，且对于任意的 $x \in \mathbf{R}$，均有 $f(x) + f^{-1}(x) < \frac{5}{2}x$，定义数列$\{a_n\}$，$a_0 = 8$，$a_1 = 10$，$a_n = f(a_{n-1})(n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证：$a_{n+1} + a_{n-1} < \frac{5}{2}a_n(n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 设 $b_n = a_{n+1} - 2a_n(n \in \mathbf{N}^*)$，求证：$b_n < -6 \times 2^{-n}(n \in \mathbf{N}^*)$.

(3) 是否存在常数 A，B 同时满足：

① 当 $n = 0,1$ 时，$a_n = \frac{A \cdot 4^n + B}{2^n}$；

② 当 $n \geqslant 2$($n \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_n < \frac{A \cdot 4^n + B}{2^n}$).

如果存在，求出 A，B 的值；如果不存在，说明理由.

证明 (1) $a_{n+1} + a_{n-1} = f(a_n) + f^{-1}(a_n) < \frac{5}{2}a_n$.

(2) 由(1)，得

$$a_{n+1} - 2a_n < \frac{1}{2}(a_n - 2a_{n-1})$$

即

$$b_n < \frac{1}{2}b_{n-1}$$

进而，得

$$b_n < \frac{1}{2}b_{n-1} < (\frac{1}{2})^2 b_{n-2} < \cdots < (\frac{1}{2})^n b_0$$

而 $b_0 = a_1 - 2a_0 = -6$,所以

$$b_n < -6 \times 2^{-n}$$

(3) 若存在满足条件 ①,② 的 A,B,由 ①,得

$$\begin{cases} a_0 = A + B = 8 \\ a_1 = \dfrac{4A + B}{2} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 4 \\ B = 4 \end{cases}$$

下证 $A = B = 4$ 满足 ②,即证

$$2^n a_n < 4^{n+1} + 4$$

由(2),得

$$2^{n+1}a_{n+1} - 4 \cdot 2^n a_n + 12 < 0$$

设 $2^n a_n = u_n$,得

$$u_{n+1} < 4u_n - 12$$

即

$$u_{n+1} - 4 < 4(u_n - 4)$$

进而,得

$$u_n - 4 < 4(u_{n-1} - 4) < 4^2(u_{n-2} - 4) < \cdots < 4^n(u_0 - 4)$$

而 $u_0 = 2^0 a_0 = 8$,所以

$$u_n - 4 < 4^{n+1}$$

即

$$2^n a_n < 4^{n+1} + 4$$

即 $A = B = 4$ 满足 ②,所以存在 $A = B = 4$ 满足 ①,②.

试题背景 本题是一道函数、数列、不等式的综合题,基于等差、等比数列,而处理的技巧远高于它们.

知识能力要求 理解、运用函数、反函数的概念解题;能熟练把递推关系式 $a_{n+1} = pa_n + q$,$a_{n+1} < pa_n + q$ 转化为等比数列的问题求解,能用数学归纳法、迭代法等方法解决递推中的不等式问题;运用数列知识解决相关的存在性问题.

难度系数 0.45.

题 179 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 a,公差为 b;等比数列$\{b_n\}$的首项为 b,公比为 a,其中 $a,b \in \mathbf{N}$,且 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3$.

(1) 求 a 的值.

(2) 若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,总存在 $m \in \mathbf{N}^*$,使 $a_m + 3 = b_n$ 成立,求 b 的

值.

(3) 在(2)中,记$\{c_n\}$是所有$\{a_n\}$中满足$a_m+3=b_n(m\in\mathbf{N}^*)$的项从小到大依次组成的数列,又记$S_n$和$T_n$分别为$\{c_n\}$,$\{a_n\}$的前$n$项和,试比较$S_n$,$T_n$的大小.

解 (1) 可得$a_n=a+b(n-1)$,$b_n=ba^{n-1}$,$a<b<a+b<ab<a+2b$.

在等比数列中$b\in\mathbf{N}$,即$b\in\mathbf{N}^*$,再由$ab>b$,得$a>1$,即$a\geqslant 2$,又$b>a$,所以$b\geqslant 3$.

由$ab<a+2b$,得$b(a-2)<a$.

若$a>2$,得$b<\frac{a}{a-2}$,又$a<b$,所以$a<\frac{a}{a-2}$,$a<3$,得$2<a<3$,这与$a\in\mathbf{N}$矛盾,所以$a=2$.

(2) 由$a=2$,对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$,均存在$m\in\mathbf{N}^*$,使得$b(m-1)+5=b\cdot 2^{n-1}$.由数的整除,得b是5的约数,又$b\geqslant 3$,所以$b=5$,且$b=5$时,$m=2^{n-1}$满足题意.

(3) 由(2)的解法,得

$$c_n=a_m=a_{2^{n-1}}=5\times 2^{n-1}-3$$

$$a_n=5n-3$$

因为易证$2^{n-1}\geqslant n$(当且仅当$n=1$时取等号),所以$S_n\geqslant T_n$(当且仅当$n=1$时取等号).

试题背景 这是一道关于数列、不等式及数的整除性质的一道新编综合题.

知识能力要求 ① 理解、运用等差(比)数列的通项公式及前n项和公式解决相关问题;② 把握不等式的性质及“夹逼方法”求整数的值;③ 用数的整除性质(约数、倍数)求整数的值;④ 通过项的大小比较前n项和的大小.

难度系数 0.50.

新题征展

1 题组新编

1.如图1,某人从 A 出发沿道路逆时针行走再回到 A,且所走过的路线是一个矩形,则不同的走法有________种;若从 B 出发按同样的要求回到 B,则不同的走法有________种.

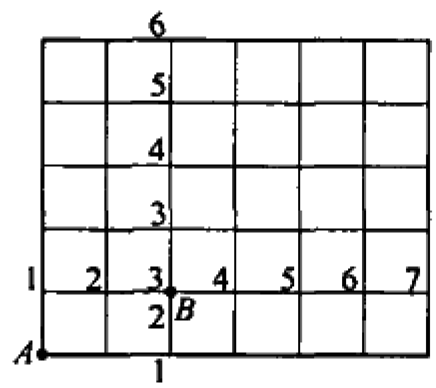


图1

解 (1)易知以 A 为顶点的矩形为 $6\times 5=30$ 个,而一种矩形对应唯一的一种走法,所以填"30".

(2)从 B 出发的走法分三种情形:

①B 为矩形顶点时,有 $6\times 5=30$ 种走法;

②B 在横边上(不为矩形的顶点)时,有 $(C_2^1\cdot C_4^1)\cdot C_5^1=40$ 种走法;

③B 在纵边上(不为矩形的顶点)时,有 $C_6^1\cdot(C_1^1\cdot C_4^1)=24$ 种走法.

总之,有 $30+40+24=94$ 种走法,填"94".

2.已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, $xyz(x+y+z)=1$.

(1)求证: $(x+y)(y+z)\geqslant 2$.

(2)求 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 的最小值.

解 (1)
$$(x+y)(y+z)=xz+y(x+y+z)\geqslant 2\sqrt{xz\cdot y(x+y+z)}=2$$

故
$$(x+y)(y+z)\geqslant 2$$

(2)由 $xyz(x+y+z)=x^2yz+xyz(y+z)=1$ 得
$$x^2+x(y+z)=\frac{1}{yz}$$

所以
$$(x+y)(y+z)(z+x)=[x^2+x(y+z)+yz](y+z)=$$
$$(\frac{1}{yz}+yz)(y+z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+y^2z+yz^2=$$
$$3\cdot\frac{1}{3z}+3\cdot\frac{1}{3y}+y^2z+yz^2\geqslant$$
$$8\cdot\sqrt[8]{(\frac{1}{3y})^3(\frac{1}{3z})^3\cdot y^2z\cdot yz^2}=\frac{8}{3}\sqrt[4]{3}$$

即$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant\frac{8}{3}\sqrt[4]{3}$,可求得当且仅当$x=y=z=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$时取等号,所以所求最小值为$\frac{8}{3}\sqrt[4]{3}$.

3. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,且满足以下条件:① 对任意$x\in\mathbf{R}$,有$f(x)>0$;② 对任意$x,y\in\mathbf{R}$,有$f(xy)=[f(x)]^y$;③$f(\frac{1}{3})>1$.

(1) 求$f(0)$的值.

(2) 求证:$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数.

(3) 若$a>b>c>0$,且$b^2=ac$,求证:$f(a)+f(c)>2f(b)$.

解　(1) 令$x=\frac{1}{3},y=0$,得

$$f(0)=[f(\frac{1}{3})]^0=1$$

(2)$f(1)=f(\frac{1}{3}\times 3)=[(\frac{1}{3})]^3>1$.

且$f(x)=f(1\cdot x)=[f(1)]^x$,则$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数.

(3)$f(a)=[f(1)]^a,f(b)=[f(1)]^b,f(c)=[f(1)]^c$,则

$$f(a)+f(c)=[f(1)]^a+[f(1)]^c>\sqrt[2]{[f(1)]^{a+c}}>2\cdot\sqrt{[f(1)]^{2\sqrt{ac}}}=$$

$$2\cdot\sqrt{[f(1)]^{2b}}=2\cdot[f(1)]^b=2f(b)$$

故

$$f(a)+f(c)>2f(b)$$

4. 指出下列方程所表示的轨迹:

(1) $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\frac{\sqrt{2}}{5}|3x+4y-25|$.

(2) $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\frac{1}{5}|3x+4y-25|$.

(3) $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\frac{1}{6}|3x+4y-25|$.

(4) $\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}}{|3x+4y-25|}=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

(5) $\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}}{|3x+4y-25|}=\frac{1}{5}$.

(6) $\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}}{|3x+4y-25|}=\frac{1}{6}$.

解　取点$F(4,3)$和直线$l:3x+4y-25=0$.

(1) 轨迹是以F为焦点、l为相应准线、离心率为$\sqrt{2}$的双曲线.

(2) 轨迹是以F为焦点、l为准线的抛物线.

(3) 轨迹是以 F 为焦点、l 为相应准线、离心率为$\frac{5}{6}$ 的椭圆.

(4) 注意点 $A(3,4)$ 在直线 l 上,所以轨迹为过点 A 且与l 的夹角为 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的两条相交直线(去掉点 A).

(5) 轨迹为过点 $A(3,4)$ 且垂直于 l 的直线(去掉点 A)$4x-3y=0(x\neq3)$.

(6) 轨迹不存在.

5.(1) 把 6 个不同的球放入 3 个不同的盒中,每盒不空,共有_______种放法.

(2) 把6个不同的球放入3个相同的盒中,每盒不空,共有_______种放法.

(3) 有 3 个相同的盒子可供放入 6 个不同的球,共有_______种放法.

(4) 把 6 个相同的球放入 3 个不同的盒中且无空盒,共有_______种放法.

(5) 把16个相同的球放入3个不同的盒 A,B,C 中,这三个盒中的球分别不少于 3 个,9 个,1 个,共有_______种放法.

解 (1)540 (2)90 (3)122 (4)10 (5)10

提示 (1) 放法有"1+1+4","1+2+3","2+2+2" 三种类型,于是共有 $C_6^4\cdot A_3^3+C_6^3C_3^2\cdot A_3^3+C_6^2C_4^2C_2^2=540$(种).

(2) 借用(1) 的结论得到,共有放法$\frac{C_6^4\cdot A_3^3+C_6^3C_3^2\cdot A_3^3+C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=90$(种).

(3) 可把球放入 1 个、2 个、3 个盒子,分这三类情形共有放法 $1+\left(C_6^5+C_6^2C_4^4+\frac{C_6^3C_3^3}{A_2^2}\right)+90=122$(种).

(4)(隔板法). 从并排的6个球之间的5个空隙中选出2个各插入一个隔板共有 $C_5^2=10$ 种方法,所以所求答案为 10.

(5) 先在盒 A,B,C 中分别放进2个、8个、0个球,用去了 10个球,剩下 6个球. 再用(4) 的放法即可,所以所求答案为 10.

6. 设 PQ 是抛物线$y^2=2px(p>0)$ 上过焦点 F 的一条弦,l 是抛物线的准线,则下列命题正确的序号是_______.(把正确命题的序号全写上)

① 以 PF 为直径的圆与 y 轴相切;

② 以 QF 为直径的圆与 y 轴相切;

③ 以 PQ 为直径的圆与准线 l 相切;

④ 以 PF 为直径的圆与 y 轴相交;

⑤ 以 QF 为直径的圆与 y 轴相交.

解 设 PF 的中点为N,作 $NN'\perp y$ 轴,垂足为 N';作 $PP'\perp y$ 轴于P' 且交 l 于P'',则

$$2|NN'|=|PP'|+|OF|=|PP''|-|P'P''|+|OF|=$$
$$|PP''|=|PF|$$

所以 $\angle PN'F=90°$,① 正确.

同理 ②③ 也正确,④⑤ 错误,故填 ①②③.

7.(1)$1!\times1+2!\times2+3!\times3+\cdots+66!\times66$ 被 2 010 除的余数等于______.

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}\right\}$ 的前 n 项和.

解 (1)2 009

因为 $n!\times n=-n!+(n+1)!$,所以

$$1!\times1+2!\times2+3!\times3+\cdots+66!\times66=-1!+2!-2!+3!-3!+4!-\cdots-66!+67!=67!-1=2\,010\left(\frac{67!}{67\times30}-1\right)+2\,009$$

被 2 010 除的余数等于 2 009.

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+2)!}$

由于

$$a_n=\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{1}{n!(n+2)}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

则数列 $\left\{\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}\right\}$ 的前 n 项和为

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$$

8.(1) 已知 $y\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)\geqslant x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$$

(2) 设 a,b,c 为不全相等的正数,求证

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}>a+b+c$$

(3) 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$$

(4) 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}$$

(5) 若正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$,求证

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)\geqslant 64$$

解 (1) $\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)=\frac{1}{2}(x+y)\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)+\left(y+\frac{1}{4}\right)\right]\geqslant \sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$

(2) 由均值不等式得

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geqslant 2c,\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant 2a,\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\geqslant 2b$$

相加后可得结论.

(3) 由均值不等式得

$$\frac{4a^2}{b+c}+(b+c)\geqslant 4a,\frac{4b^2}{c+a}+(c+a)\geqslant 4b,\frac{4c^2}{a+b}+(a+b)\geqslant 4c$$

相加即得欲证.

(4) 设 $a+b=r,b+c=s,c+a=t$,则

$$a=\frac{r-s+t}{2},b=\frac{r+s-t}{2},c=\frac{-r+s+t}{2}$$

其中,$r,s,t\in \mathbf{R}^+$. 这样,只需用均值不等式证明不等式 $\frac{s+t}{r}+\frac{t+r}{s}+\frac{r+s}{t}\geqslant 6$ 即可.

(5) 运用两次均值不等式得到

$$\frac{1}{a}+1=\frac{b+c}{a}+2\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}+2\geqslant 4\sqrt{\frac{\sqrt{ab}}{a}}$$

同理有 $\frac{1}{b}+1\geqslant 4\sqrt{\frac{\sqrt{ca}}{b}},\frac{1}{c}+1\geqslant 4\sqrt{\frac{\sqrt{ab}}{c}}$.相乘便可得结论.

9.计算.

(1) $\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$.

(2) $\sin 10°\sin 50°\sin 70°$.

解 (1) 构造对偶式

$$A=\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$$
$$B=\cos^2 20°+\sin^2 80°-\sqrt{3}\cos 20°\sin 80°$$

则
$$\begin{cases}A+B=2-\sqrt{3}\sin 60°=\frac{1}{2}\\ A-B=\cos 160°-\cos 40°+\sqrt{3}\sin 100°=0\end{cases}$$

所以 $A=B=\frac{1}{4}$,即原式 $=\frac{1}{4}$.

(2) 构造 x 的对偶式

$$x = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$$
$$y = \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$$

则 $xy = \sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin 50^\circ \cos 50^\circ \sin 70^\circ \cos 70^\circ = \frac{1}{8}\sin 20^\circ \sin 100^\circ \sin 140^\circ =$

$$\frac{1}{8}\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{1}{8}y$$

又因为 $y \neq 0$,所以 $x = \frac{1}{8}$,即原式 $= \frac{1}{8}$.

10.(1) 双曲线 $C:4x^2 - 64y^2 = 1$ 上是否存在两点关于直线 $l: y = 2x + m$ 对称?若存在就求出 m 的取值范围,否则就说明理由.

(2) 双曲线 $C: x^2 - 4y^2 = 16$ 上是否存在两点关于直线 $l: y = kx + 4$ 对称?若存在就求出 m 的取值范围,否则就说明理由.

(3) 双曲线 $C: x^2 - my^2 = m$ 上是否存在两点关于直线 $l: y = 2x - 1$ 对称?若存在就求出 m 的取值范围,否则就说明理由.

解 (1) 设双曲线 C 上存在两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 关于直线 l 对称,线段 P_1P_2 的中点为 $M(x_0, y_0)$,则

$$x_1 + x_2 = 2x_0, y_1 + y_2 = 2y_0$$

代点得 $\quad 4x_1^2 - 64y_1^2 = 1, 4x_2^2 - 64y_2^2 = 1$

相减可得 $\quad x_1 + x_2 = 16(y_1 + y_2) \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

即就是 $\quad x_0 = 16y_0 k_{P_1P_2}$

又因为 $k_{P_1P_2} = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2}(P_1P_2 \perp l)$,所以

$$x_0 + 8y_0 = 0$$

再结合 $y_0 = 2x_0 + m$,解二元二次方程组可得点 M 的坐标 $(x_0, y_0) = \left(-\frac{8}{17}m, \frac{m}{17}\right)$.

因为双曲线渐近线的斜率为 $\pm\frac{1}{4}$,而直线 l 的斜率 $k = 2 > \left|\pm\frac{1}{4}\right|$,所以线段 P_1P_2 的中点 $M\left(-\frac{8}{17}m, \frac{m}{17}\right)$ 在双曲线 C 的左侧或右侧,则

$$4x_0^2 - 64y_0^2 = 4\left(-\frac{8}{17}m\right)^2 - 64\left(\frac{m}{17}\right)^2 > 1$$

解得 $m < -\frac{17}{24}\sqrt{3}$ 或 $m > \frac{17}{24}\sqrt{3}$.

所以存在两点符合题意,且实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{17}{24}\sqrt{3}\right) \cup \left(\frac{17}{24}\sqrt{3}, +\infty\right)$.

(2)…(方法同上),存在两点符合题意,且实数 m 的取值范围是

$$(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{4}{29}\sqrt{29},0\right)\cup\left(0,\frac{4}{29}\sqrt{29}\right)\cup(2,+\infty).$$

(3) 设双曲线 C 上存在两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 关于直线 l 对称,线段 P_1P_2 的中点为 $M(x_0,y_0)$.

…(方法同上),求得中点 M 的坐标 $(x_0,y_0)=\left(\frac{m}{2m+2},-\frac{1}{m+1}\right)$,其中 $m>0$.

当直线 l 的斜率 $k=2<\frac{1}{\sqrt{m}}$,即 $0<m<\frac{1}{4}$ 时,中点 $M\left(\frac{m}{2m+2},-\frac{1}{m+1}\right)$ 在双曲线两支的中域,则

$$x_0^2-my_0^2=\left(\frac{m}{2m+2}\right)^2-m\left(-\frac{1}{m+1}\right)^2<m$$

解得 $m\in\mathbf{R}$,此时 $0<m<\frac{1}{4}$;

当直线 l 的斜率 $k=2>\frac{1}{\sqrt{m}}$,即 $m>\frac{1}{4}$ 时,中点 $M\left(\frac{m}{2m+2},-\frac{1}{m+1}\right)$ 在双曲线的左侧或右侧,则

$$x_0^2-my_0^2=\left(\frac{m}{2m+2}\right)^2-m\left(-\frac{1}{m+1}\right)^2>m$$

解得 $m\in\varnothing$,此时 $m\in\varnothing$.

总之,存在两点符合题意,且实数 m 的取值范围是 $(0,\frac{1}{4})$.

2 藏题新掘

1. 已知集合 $M=\{f(x)\mid f(x)+f(x+2)=f(x+1)\}$,$g(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$,判断 $g(x)$ 与 M 之间的关系,并说明理由.

解 $g(x)+g(x+2)=\sin\frac{\pi}{3}x+\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{2}{3}\pi)=\cdots=$

$$\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}(x+1)=g(x+1)$$

所以
$$g(x)\in M$$

2. 由函数 $y=2\sin3x(\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5}{6}\pi)$ 与 $y=2(x\in\mathbf{R})$ 的图象围成封闭图形的面积是(　　).

A. $\frac{2}{3}\pi$　　B. π　　C. $\frac{4}{3}\pi$　　D. $\frac{5}{3}\pi$

解　由图2及对称性,可割补算得.选C.

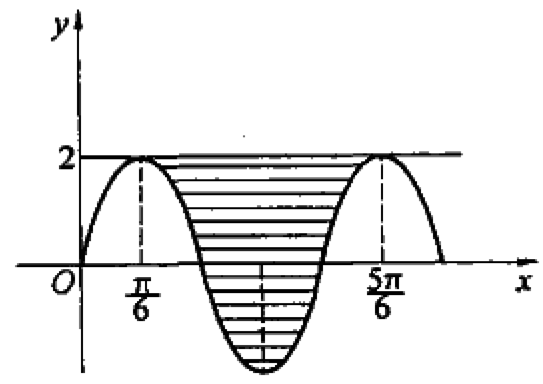


图2

3. 若方程$(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{3}}$有解$x_0$,则$x_0$属于以下区间中的(　　).

A. $(0,\frac{1}{3})$　　B. $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

C. $(\frac{1}{2},1)$　　D. $(1,2)$

解　将原方程两边立方,变形得$x \cdot 8^x - 1 = 0$.

易知$x_0 > 0$.由于$f(x) = x \cdot 8^x - 1$在$(0,+\infty)$内是增函数,且$f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} < 0$,$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2} - 1 > 0$,所以$f(x)$在$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$内恰有一根.选B.

4. 已知一个长方体的长、宽、高之和是1,表面积是$\frac{16}{27}$,求这个长方体体积的最大值.

解　设该长方体从一个顶点出发的三条棱长分别是x,y,z,得

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2(xy + yz + zx) = \frac{16}{27} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y + z = 1 - x \\ yz = \frac{8}{27} - x(1 - x) \end{cases}$$

则y,z是关于A的一元二次方程

$$A^2 - (1 - x)A + [\frac{8}{27} - x(1 - x)] = 0$$

的两个正根,所以

$$\begin{cases} \Delta = (1 - x)^2 - 4[\frac{8}{27} - x(1 - x)] \geqslant 0 \\ 1 - x > 0 \\ \frac{8}{27} - x(1 - x) > 0 \end{cases}$$

解得$\frac{1}{9} \leqslant x \leqslant \frac{5}{9}$,已求$yz = \frac{8}{27} - x(1 - x)$,则

$$V = V(x) = xyz = x^3 - x^2 + \frac{8}{27}x(\frac{1}{9} \leqslant x \leqslant \frac{5}{9})$$

则 $V'(x)=3x^2-2x+\frac{8}{27}$. 令 $V'(x)=0$,解得 $x=\frac{2}{9}$ 或 $\frac{4}{9}$.

又 $V(\frac{1}{9})=V(\frac{4}{9})=\frac{16}{729}$, $V(\frac{2}{9})=V(\frac{5}{9})=\frac{20}{729}$,所以当且仅当 $(x,y,z)=(\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{5}{9})$, $(\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{2}{9})$,或 $(\frac{5}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9})$ 时, V 取到最大值 $\frac{20}{729}$.

答:这个长方体体积的最大值是 $\frac{20}{729}$.

5. 若动点 $P(x,y)$ 以等角速度 ω 在单位圆周上逆时针运动,则点 $Q(-2xy,y^2-x^2)$ 的运动方式是( ).

A. 以角速度 ω 在单位圆上顺时针运动

B. 以角速度 2ω 在单位圆上顺时针运动

C. 以角速度 ω 在单位圆上逆时针运动

D. 以角速度 2ω 在单位圆上逆时针运动

解 由条件得, $x=\cos\omega t$, $y=\sin\omega t$,其中 $\omega>0$,则

$$-2xy=-\sin 2\omega t=\cos(-2\omega t+\frac{3}{2}\pi)$$

$$y^2-x^2=-\cos 2\omega t=\sin(-2\omega t+\frac{3}{2}\pi)$$

所以,点 Q 以角速度 2ω 在单位圆上顺时针运动,选 B.

6. 若不等式 $x^2-2mx+2m+1>0$ 对 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的实数恒成立,则实数 m 的取值范围是________.

解 依题意得,不等式 $x^2+1>2m(x-1)$ 恒成立 $(0\leqslant x<1)$,即 $2m>\frac{m^2+1}{x-1}$ 恒成立 $(0\leqslant x<1)$.

设 $t=-x+1$,其中 $0<t\leqslant 1$,则不等式 $2-2m<t+\frac{2}{t}$ 恒成立 $(0<t\leqslant 1)$,则

$$2-2m<(t+\frac{2}{t})_{\min}(0<t\leqslant 1)$$

又因为 $g(t)=t+\frac{2}{t}$ 在 $(0,1]$ 上是减函数,所以

$$2-2m<g(1)=3$$

得 $m>-\frac{1}{2}$,所以,实数 m 的取值范围是 $(-\frac{1}{2},+\infty)$.

7. 求函数 $f(x)=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{2-\sin x}+\sqrt{3+\sin x}+\sqrt{3-\sin x}$ 的最大值.

解 设 $\boldsymbol{a}_1=(\sqrt{1+\sin x},\sqrt{1-\sin x})$, $\boldsymbol{a}_2=(\sqrt{1-\sin x},\sqrt{1+\sin x})$,

$a_3=(\sqrt{2+\sin x},\sqrt{2-\sin x})$，$a_4=(\sqrt{2-\sin x},\sqrt{2+\sin x})$，$a_5=(\sqrt{3+\sin x},\sqrt{3-\sin x})$，$a_6=(\sqrt{3-\sin x},\sqrt{3+\sin x})$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(f(x),f(x))$，则

$$|a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6|=f(x)\cdot\sqrt{2}$$

则

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|=2(\sqrt{2}+2+\sqrt{6})\geqslant f(x)\cdot\sqrt{2}$$

则 $$f(x)\leqslant 2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

其中，当且仅当

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}=\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}=\frac{\sqrt{2+\sin x}}{\sqrt{2-\sin x}}=\frac{\sqrt{2-\sin x}}{\sqrt{2+\sin x}}=\frac{\sqrt{3+\sin x}}{\sqrt{3-\sin x}}=\frac{\sqrt{3-\sin x}}{\sqrt{3+\sin x}}$$

即 $\sin x=0$ 亦即 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 时取等号)，所以，$f(x)$ 的所求最大值为 $2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

8.设 $n\in\mathbf{N},n\geqslant 2$，求证

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>1+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

解 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=1+(2^n-1)=1+(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})=$

$$1+\frac{1}{2}[(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+(2^{n-1}+\cdots+2^2+2+1)]=$$

$$1+\frac{1}{2}[(1+2^{n-1})+(2+2^{n-2})+\cdots+(2^{n-1}+1)]>$$

$$1+n\cdot\sqrt{2^{n-1}}\cdot n=1+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

所以 $$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>1+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

9.已知 $a,b,c\in\mathbf{R},a+b+c=1$，求证：$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\leqslant\frac{27}{10}$.

解 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则

$$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},f'(\frac{1}{3})=-\frac{27}{50}$$

于是，函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的图象以点 $(\frac{1}{3},\frac{9}{10})$ 为切点的切线方程为

$$y-\frac{9}{10}=-\frac{27}{50}(x-\frac{1}{3})$$

即
$$y=-\frac{27}{50}x+\frac{27}{25}$$

根据在局部范围内"以直代曲"的思想,结合本题要证的结论是"$\leqslant$"的形式,不妨猜想

$$\frac{1}{1+x^2}\leqslant\frac{27}{25}-\frac{27}{50}x(0<x<1) \quad ①$$

(当且仅当 $x=\frac{1}{3}$ 时取等号)

要证 ① 成立,即只要证

$$27x^3-54x^2+27x-4\leqslant 0(0<x<1)$$

即
$$(x-\frac{1}{3})^2(x-\frac{4}{3})\leqslant 0(0<x<1) \quad ②$$

(当且仅当 $x=\frac{1}{3}$ 时取等号)

由于式 ② 恒成立,所以式 ① 成立.再在式 ① 中分别令 $x=a,b,c$,相加就可得到原不等式正确.

10.在三棱锥 $P-ABC$ 中,有 $PA=BC,PB=AC,PC=AB$,三个侧面与底面所成的二面角分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,则 $\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3=$ ________.

解 设点 P 在底面 ABC 上的射影为点 O,则

$$\cos\alpha_1=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle PAB}},\cos\alpha_2=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle PBC}},\cos\alpha_3=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle PAC}}$$

可证 $\triangle APB\cong\triangle CBP\cong\triangle PAC\cong\triangle BCA$,通分得 $\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3=1$,填"1".

11.已知实数 x,y 满足 $4x^2+6xy+9y^2+2x-12y+6=0$,求 $S=4x^2-9y^2+8x+18y-5$ 的取值范围.

解 $[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$

令 $x=u+h,y=v+k$,代入条件等式得

$$4u^2+6uv+9v^2+(8h+6k+2)u+(6h+18k-12)v+4h^2+6hk+9k^2+2h-12k+6=0$$

再令 $8h+6k+2=6h+18k-12=0$,解得

$$h=-1,k=1$$

此时条件等式化为 $4u^2+6uv+9v^2=1$,也就是

$$4(u+\frac{3}{4}v)^2+\frac{27}{4}v^2=1$$

再用三角换元法可求得答案为$[-\frac{2}{3}\sqrt{3},\frac{2}{3}\sqrt{3}]$.

另解 对 $4x^2+6xy+9y^2+2x-12y+6=0$ 配方得

$$(x+1)^2+3(x+y)^2+6(y-1)^2=1$$

令$\begin{cases}u=x+1\\v=y-1\end{cases}$,则有

$$u^2+3(u+v)^2+6v^2=1$$

即
$$4u^2+6uv+9v^2=1$$

可作三角代换 $u+\frac{3}{4}v=\frac{1}{2}\cos\theta, v=\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\theta$,则

$$S=\cdots=4u^2-9v^2=4(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\theta)^2-9(\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\theta)^2=$$

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta=$$

$$\cos 2\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta$$

则
$$|S|\leqslant\sqrt{1^2+(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

所以,S 的取值范围是$[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$.

12. 设数列$\{a_n\}$满足:$a_1=a_2=1$,且 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=$ ________.

解 由 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 得

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}+1$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}+1$$

可设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=A$,则$\frac{1}{A}=A+1$,即 $A^2+A-1=0$,解得 $A=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

因为数列$\{a_n\}$的各项都是正数,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=A>0$,故填:$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

13. 我们知道,$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$.现在从 $m=1!\times2!\times3!\times\cdots\times100!$ 中的 100 个因数 $n!$中去掉一个因数,使剩下的积为完全平方数,问应去掉哪一个因数(找出一个方式即可).

解 $m=1!\times2!\times3!\times\cdots\times100!=1\times(1\times2)\times(1\times2\times3)\times\cdots\times(1\times2\times3\times\cdots\times100)$.

由此看出 m 中的因数 1 共有 100 个,2 共有 99 个,3 共有 98 个,…,100 共有 1 个.即凡是奇因数的指数都是偶数,凡是偶因数的指数都是奇数.

所以存在某个整数 a 使得

$$m = a^2 \times 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100 = a^2 \times 2^{50} \times 50!$$

所以去掉50!是符合题意的一种方式.

14. 若直线 $l_1: 2x - 5y + 20 = 0$ 和直线 $l_2: mx + 2y - 10 = 0$ 与两坐标轴围成的四边形 $ABCD$ 有一个外接圆,则实数 m 的值等于________.

解　当 $l_1 \perp l_2$ 时,可得 $m = 5$;除此之外,还有如图3所示的四边形 $ABCD$ 也可以有外接圆,这个四边形可以这样得到:

设 l_2 是 l_1 关于 y 轴的对称直线,并设 l 与 x, y 轴的交点为 A, B, l_1, l_2 分别与 x, y 轴的交点是 C, D 和 C', D,则

$\angle BDC' = \angle BDC = 90° - \angle DCO$

又 $l_1 \perp l$,得 $\angle BAC' = 90° - \angle DCO$

所以 $\angle BDC' = \angle BAC'$,所以 B, D, A, C 为点共圆.

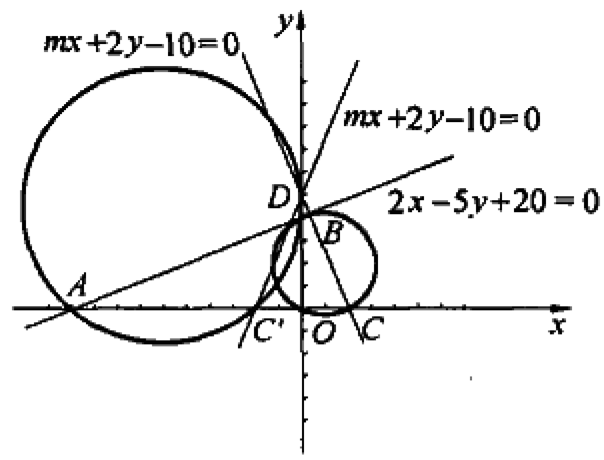


图3

此时,l_1 的方程是 $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$,则 l_2 的方程是 $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} + 1 = 0$,所以 $m = \pm 5$.

15. 已知方程 $x^2 + ax + \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x} + b = 0$ 有实根,求 $a^2 + b^2$ 的最小值.

解　原方程即为 $(x + \frac{1}{x})a + b + (x^2 + \frac{1}{x^2}) = 0$,这是平面直角坐标系 aOb 下的直线方程,设 $M(a, b)$ 为该直线上的动点,则 $|OM|^2 = a^2 + b^2$,且设原点 O 到这直线的距离为 d,则

$$|OM|^2 \geqslant d = \frac{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2}{(x + \frac{1}{x})^2 + 1} = \frac{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 9 + 9}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 3} =$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2} + 3) + \frac{9}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 3} - 6$$

再令 $x^2 + \frac{1}{x^2} + 3 = t$(其中 $t \geqslant 5$).

因为 $f(t) = t + \frac{9}{t} - 6(t \geqslant 5)$ 是增函数,所以

$$|OM|^2 \geqslant d^2 = f(t) \geqslant f(5) = \frac{4}{5}$$

得当且仅当 $t = 5$ 即 $x = \pm 1$，亦即 $a = \pm \frac{4}{5}, b = -\frac{2}{5}$ 时，$a^2 + b^2$ 取到最小值，且最小值是$\frac{4}{5}$.

3 应用题与探究题

1. 四面体的各棱长分别为 $1,1,1,1,\sqrt{2},\sqrt{3}$，则它的体积为（　　）.

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. 以上全不正确

解　(1) 当$\sqrt{2},\sqrt{3}$ 这两条棱长异面时（图 4(a)），两侧面上的高均为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，但 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$，说明此种四面体不存在.

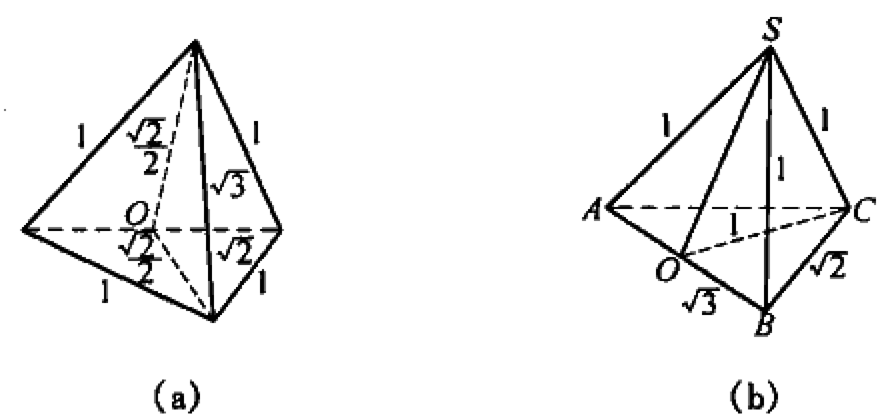


图 4

(2) 当$\sqrt{2},\sqrt{3}$ 这两条侧棱在同一个侧面上时（图 4(b)），因为 $SA = SB = SC = 1$，所以点 S 在面 ABC 上的射影是 Rt$\triangle ABC$ 的外心（即斜边 AB 的中点 O）. 易求

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

则
$$SO = \frac{1}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

选 A.

2. 按规定，某车站每天 8:00 ~ 9:00，9:00 ~ 10:00 都恰好有一辆客车到站，每辆车的到站在下面三个时刻是随机的，且各车到站的时间相互独立，其规律如下表所示.

到站时刻	8:10	8:30	8:50	9:10	9:30	9:50
概率	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

一旅客 8:20 到车站，求该旅客候车时间 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

解
$$P(\xi = 10) = \frac{2}{5}, P(\xi = 30) = \frac{2}{5}$$
$$P(\xi = 50) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$
$$P(\xi = 70) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$$
$$P(\xi = 90) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$$

故 ξ 的分布列如下表所示.

ξ/min	10	30	50	70	90
p	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

且
$$E\xi = 10 \times \frac{2}{5} + 30 \times \frac{2}{5} + 50 \times \frac{1}{25} + 70 \times \frac{2}{25} + 90 \times \frac{2}{25} = 30.8(\text{min})$$

3.袋中有 12 个球，其中白球 4 个，甲、乙、丙三人接连从袋中取球：甲先取，然后乙，然后丙；然后甲，然后乙，然后丙；… 如此进行下去，规定先取出一个白球者获胜，若每次取后都放回，求甲、乙、丙获胜的概率之比.

解 在第一轮取球中，甲、乙、丙获胜的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}, (\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{3}$；在第二轮取球中，甲、乙、丙获胜的概率分别为 $(\frac{2}{3})^3 \times \frac{1}{3}, (\frac{2}{3})^4 \times \frac{1}{3}, (\frac{2}{3})^5 \times \frac{1}{3}$.

…

在第 n 轮取球中，甲、乙、丙获胜的几率分别为 $(\frac{2}{3})^{3(n-1)} \times \frac{1}{3}, (\frac{2}{3})^{3(n-1)+1} \times \frac{1}{3}, (\frac{2}{3})^{3(n-1)+2} \times \frac{1}{3}$.

所以甲、乙、丙获胜的概率分别为
$$\frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^3 \times \frac{1}{3} + \cdots + (\frac{2}{3})^{3(n-1)} \times \frac{1}{3} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - (\frac{2}{3})^3}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^4\times\frac{1}{3}+\cdots+(\frac{2}{3})^{3(n-1)+1}\times\frac{1}{3}+\cdots=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{2}{3})^3}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^5\times\frac{1}{3}+\cdots+(\frac{2}{3})^{3(n-1)+2}\times\frac{1}{3}+\cdots=\frac{(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{2}{3})^3}$$

所以所求概率之比为

$$1:\frac{2}{3}:(\frac{2}{3})^2=9:6:4$$

4. 在一次抗洪抢险中,准备用射击的方法引爆从桥上漂流而下的一巨大汽油罐.已知只有5发子弹备用,且首次命中只能使汽油流出,再次命中才能引爆成功,每次射击的命中率都是$\frac{2}{3}$,每次命中与否互相独立.

(1) 求油罐被引爆的概率.

(2) 如果引爆或子弹打光则停止射击,设射击次数为 ξ,求 ξ 的期望 $E\xi$.

解 (1) 记"油罐被引爆"为事件 A,得

$$P(\overline{A})=C_5^1\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^4+(\frac{1}{3})^5=\frac{11}{243}$$

所以

$$P(A)=\frac{232}{243}$$

(2) 由于 $\xi=2,3,4,5$,则

$$P(\xi=2)=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

$$P(\xi=3)=(C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

$$P(\xi=4)=(C_3^2(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3})\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$$

$$P(\xi=5)=[C_4^3(\frac{1}{3})^3\times\frac{2}{3}]\times1+[C_4^4(\frac{1}{3})^4]\times1=\frac{1}{9}$$

则

$$E\xi=2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{4}{27}+5\times\frac{1}{9}=\frac{79}{27}$$

5. 甲、乙两公司生产同一种商品,但由于设备陈旧,需要更新,经测算对于函数$f(x)$,$g(x)$及任意的$x\geqslant0$,当甲公司投入x万元改造设备时,若乙公司投入改造设备费用小于$f(x)$万元,则乙公司有倒闭的风险,否则无倒闭风险;同样,当乙公司投入x万元改造设备时,若甲公司投入改造设备费用小于$g(x)$万元,则甲公司有倒闭的风险,否则无倒闭风险.

(1) 请解释$f(0)$,$g(0)$的实际意义.

(2) 设$f(x)=x+5, g(x)=\frac{1}{2}x+10$,甲、乙公司为了避免恶性竞争,经过协商,同意在双方均无倒闭风险的情况下尽可能地减少设备资金,问此时甲、乙两公司各投入多少万元?

解 (1)$f(0)$表示当甲公司不投入资金改造设备时,乙公司要避免倒闭,至少要投入$f(0)$万元的资金;$g(0)$表示当乙公司不投入资金改造设备时,甲公司要避免倒闭风险,至少要投入$g(0)$万元的资金.

(2) 设甲公司投入的资金为x万元,乙公司投入的资金为y万元,由题意,要使甲、乙公司都无倒闭风险,只需

$$\begin{cases} y \geqslant f(x) = x+5 \\ x \geqslant g(y) = \frac{1}{2}y + 10 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases}$$

双方均无倒闭风险区域如图5阴影所示,解方程

$$\begin{cases} x-y+5=0 \\ 2x-y-20=0 \end{cases}$$

得$P(25,30)$.

故在均无倒闭风险的情况下,甲公司至少需投入25万元,乙公司至少需投入30万元.

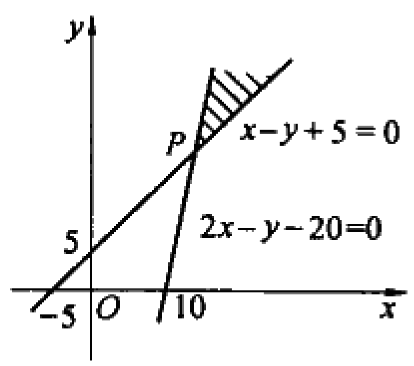


图5

6. 用长为16 m的篱笆,借助墙角围成一矩形$ABCD$(图6),在P处有一棵树与两墙的距离分别是a m$(0<a<12)$和4 m.若将此树圈进去,求矩形$ABCD$面积的最大值M.

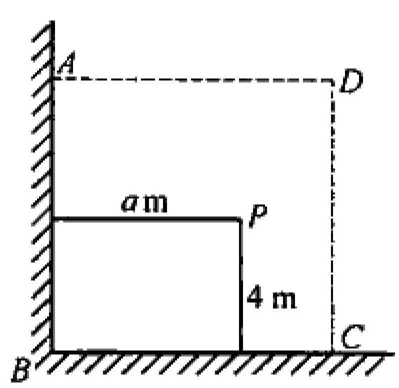


图6

解 设$AB=x$,则$AD=16-x$,得$\begin{cases} x \geqslant 4 \\ 16-x \leqslant a \end{cases}$,即

$$4 \leqslant x \leqslant 16-a \quad (0<a<12)$$

$$S_{ABCD} = x(16-x) = 64-(x-8)^2$$

当$16-a>8$,即$0<a<8$时,$f(x)_{\max}=f(8)=64$;

当$16-a \leqslant 8$,即$8 \leqslant a<12$时,$f(x)$在$[4,16-a]$上是增函数,所以$f(x)_{\max}=f(16-a)=-a^2+16a$.

$$M = \begin{cases} 64 & (0<a<8) \\ -a^2+16a & (8 \leqslant a<12) \end{cases}$$

7. 某小组有10台各7.5 kW的机床,如果每台机床的使用情况是相互独立

的，且每台机床平均每小时开动 12 min，问全部机床用电超过 48 kW 的可能性有多少？

解 每台机床工作的概率为$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$，而且每台机床有"工作"和"不工作"两种情况，故某一时刻正在工作的机床台数 $\xi \sim B(10,\frac{1}{5})$，且 $P(\xi=k)=C_{10}^{k}(\frac{1}{5})^{k}(\frac{4}{5})^{10-k}(k=0,1,2,\cdots,10)$.

48 kW 可供 6 台或 7 台以上的机床在工作，这一事件的概率为

$$P(\xi \geqslant 7)=P(\xi=7,8,9,10)=$$
$$C_{10}^{7}(\frac{1}{5})^{7}(\frac{4}{5})^{3}+C_{10}^{8}(\frac{1}{5})^{8}(\frac{4}{5})^{2}+$$
$$C_{10}^{9}(\frac{1}{5})^{9}(\frac{4}{5})+(\frac{1}{5})^{10}\approx 0.000\,864\,4$$

即全部机床用电超过 48 kW 的可能性约为 0.000 864 4.

8. 密码员王超设计了一种给自然数编码的方法：

① 先将自然数表示成五进制数（逢五进一）；

② 再将五进制中的五个数码与集合 $\{V,W,X,Y,Z\}$ 中的元素建立一个一一对应关系.

后来，他发现三个递增的相邻的十进制自然数被编成$\overline{VYZ}$，$\overline{VVX}$，$\overline{VYW}$，求被编成$\overline{VWXYZ}$的数所对应的十进制数.

解 依题设 $V,W,X,Y,Z\in\{0,1,2,3,4\}$，有

$$\begin{cases}V\cdot 5^{2}+Y\cdot 5+Z=V\cdot 5^{2}+Y\cdot 5+X-1\\ V\cdot 5^{2}+Y\cdot 5+X=V\cdot 5^{2}+V\cdot 5+W-1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}Z=X-1 & ①\\ 5(V-Y)=X-W+1 & ②\end{cases}$$

由 $VYX<VVW$ 知. $V>Y$. 再由②，得 $V-Y=1$，$X-W=4$. 得 $X=4+W\geqslant 4$，又 $X\leqslant 4$，$X=4$，$W=0$，$Z=3$(用①)，而 $V,Y\in\{1,2\}$，又 $V-Y=1$，所以 $V=2$，$Y=1$. 所以$\overline{VWXYZ}=\overline{20413}_{(5)}$ 所对应的十进制数是

$$2\times 5^{4}+0\times 5^{3}+4.5^{2}-1.5+3=1\,358$$

9. 世界乒联把乒乓球比赛改成 11 分制后，每场比赛由五局三胜制改为七局四胜制. 甲、乙两人欲进行一场乒乓球比赛，根据以往经验，单局比赛甲胜乙的概率为$\frac{2}{3}$，各局比赛相互之间没有影响.

(1) 本场比赛采用七局四胜制，即先胜四局的队员获胜，求乙以 4 : 3 取胜的概率.

(2) 试用概率知识解释新赛制对谁更有利.

解 (1) 即乙在前6局比赛中获胜3局且第7局胜,其概率为

$$C_6^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^3\frac{1}{3}=\frac{160}{2\ 187}$$

(2) 在旧赛制下,乙获胜的概率为

$$(\frac{1}{3})^3+C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})\frac{1}{3}+C_4^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}=\frac{17}{81}$$

在新赛制下,乙获胜的概率为

$$(\frac{1}{3})^4+C_4^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})\frac{1}{3}+C_5^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}+C_6^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^3\frac{1}{3}=\frac{379}{2\ 187}$$

因为$\frac{17}{81}>\frac{379}{2\ 187}$,所以新赛制对甲有利.

10. 包含甲在内的 $m(m\geqslant 2)$ 个人练习传球,共传球 n 次.球首先从甲手中传出,第 n 次仍传回甲,共有多少种不同的传球方法?

解 设第 n 次传给甲的传法为 a_n 种,第 n 次不传给甲的方法为 b_n 种,则

$$a_1=0,a_2=b_1=m-1$$

a_{n+1} 表示第 $n+1$ 次传给甲的传法种数.此时可分两步:第一步传前 n 次,第 n 次必然不传给甲,共有 b_n 种传法;第二步传第 $n+1$ 次只能传给甲,只有1种传法,所以 $a_{n+1}=b_n\cdot 1=b_n$.

a_n+b_n 表示传球 n 次所有的传法种数,而每次都有 $m-1$ 种传法,所以

$$a_n+b_n=(m-1)^n$$

消去 b_n 得

$$a_n+a_{n+1}=(m-1)^n$$

又 $c_n=\frac{a_n}{(m-1)^n}$,即

$$a_n=c_n(m-1)^n$$

代入得
$$c_n(m-1)^n+c_{n+1}(m-1)^{n+1}=(m-1)^n$$

即
$$c_{n+1}=\frac{1}{1-m}c_n+\frac{1}{m-1}$$

可得
$$c_{n+1}-\frac{1}{m}=\frac{1}{1-m}(c_n-\frac{1}{m})$$

又
$$c_1=\frac{a_1}{m-1}=0$$

则
$$c_n-\frac{1}{m}=-\frac{1}{m}(\frac{1}{1-m})^{n-1}$$

即
$$c_n=\frac{1}{m}-\frac{1}{m}(\frac{1}{1-m})^{n-1}$$

则
$$a_n=c_n(m-1)^n=\frac{(m-1)^n}{m}+\frac{m-1}{m}(-1)^n$$

11. 如图 7，把正 $\triangle ABC$ 分成有限个全等的小正三角形，且在每个小三角形的顶点上放置一个非零实数，使得任意两个相邻的小三角形组成的菱形的两组相对顶点上实数之积相等，设点 A 为第一行，…，BC 为第 n 行，记点 A 上的数为 a_{11}，…，第 i 行中第 j 个数为 $a_{ij}(1 \leqslant j \leqslant i)$. 若 $a_{11} = 1, a_{21} = \frac{1}{2}, a_{22} = \frac{1}{4}$.

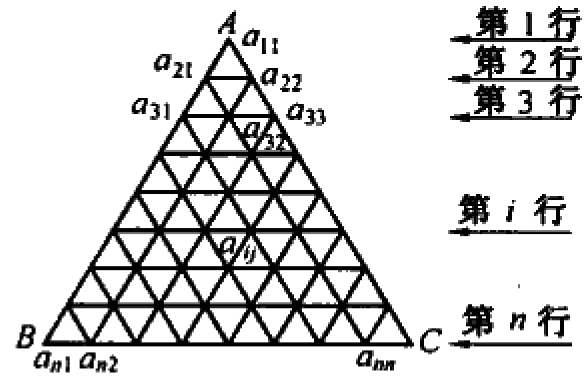


图 7

(1) 求 a_{31}, a_{32}, a_{33}.

(2) 试求出 a_{ij} 的表达式.

(3) 记 $S_n = a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn}$，证明：$n \leqslant \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} \leqslant \frac{4^n - 1}{3}$.

解　(1) 由 $a_{11}a_{32} = a_{21}a_{22}$，得 $a_{32} = \frac{1}{8}$. 同理还可得 $a_{31} = \frac{1}{4}, a_{33} = \frac{1}{16}$.

(2) 由 $a_{11} = 1, a_{21} = \frac{1}{2}, a_{31} = \frac{1}{4}$，可归纳出 $a_{2i} = \frac{1}{2^{i-1}}$，则

$$a_{ij} = a_{i1} \cdot (\frac{1}{2})^{j-1} = \frac{1}{2^{i-1}} \cdot (\frac{1}{2})^{j-1} = \frac{1}{2^{i+j-2}}$$

可以用数学归纳法来验证这个归纳结论的正确性.（略）

(3) 由(2) 可算得 $S_n = \frac{1}{2^{n-2}}(1 - \frac{1}{2^n})$.

由 $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 1 (n \in \mathbf{N}^*)$，得 $\frac{1}{2^n} \leqslant 1 - \frac{1}{2^n}$，所以

$$S_n \geqslant \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n-2}}$$

又由均值不等式得

$$S_n = 4 \cdot \frac{1}{2^n}(1 - \frac{1}{2^n}) \leqslant [\frac{1}{2^n} + (1 - \frac{1}{2^n})]^2 = 1$$

所以
$$1 \leqslant \frac{1}{S^n} \leqslant 2^{2n-2}$$

可得
$$n \leqslant \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} \leqslant \frac{4^n - 1}{3}$$

12. 设地球、月球的半径分别为 R, r，球心距为 d. 试建立平面直角坐标系，求一宇宙飞船的轨道方程，使在轨道上任一点处看地球和月球的视角相等.

解　设地球、月球的球心分别为 O_1, O_2，则 $|O_1O_2| = d$. 以 O_1O_2 的中点为原点，过 O_1O_2 的直线为 x 轴建立平面直角坐标系（图 8），则 $O_1(-\frac{d}{2}, 0)$，

$O_2(\frac{d}{2},0)$.

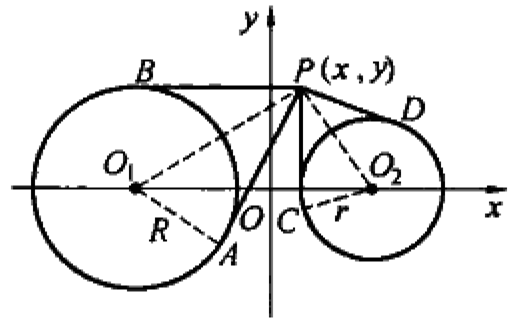


图 8

设 $P(x,y)$ 是飞船上任一点,过 P 作 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的切线 PA,PB 和 PC,PD,则 $\angle APO_1=\angle CPO_2$,则

$$\mathrm{Rt}\triangle PAO_1 \backsim \mathrm{Rt}\triangle PCO_2$$

所以
$$\frac{|PO_1|}{|O_1A|}=\frac{|PO_2|}{|O_2C|}$$

即
$$\frac{(x+\frac{d}{2})^2+y^2}{R^2}=\frac{(x-\frac{d}{2})^2+y^2}{r^2}$$

即
$$x^2+y^2-\frac{d(R^2+r^2)}{R^2-r^2}x+\frac{d^2}{4}=0$$

即
$$[x-\frac{d(R^2+r^2)}{2(R^2-r^2)}]^2+y^2=(\frac{Rrd}{R^2-r^2})^2$$

故所求轨道是此方程表示的圆.

13.某校有教职员工 150 人,为了丰富教职员工的课余生活,每天定时开放健身房和娱乐室,据调查统计,每次去健身房的人有 10% 下次去娱乐室,而在娱乐室的人有 20% 下次去健身房,请问,随着时间的推移,去健身房的人数能否趋于稳定?

解 设第 n 次去健身房的人数为 a_n,去娱乐室的人数为 $150-a_n$,得

$$a_n=0.9a_{n-1}+0.2(150-a_{n-1})=0.7a_{n-1}+30$$

可得
$$a_n-100=(a_1-100)\times 0.7^{n-1}$$

可得
$$\lim_{n\to\infty}a_n=100$$

即随着时间的推移,去健身房的人数稳定在 100 人左右.

14.给出下面的算法框图(图 9).

那么最后打印出的数值为________.

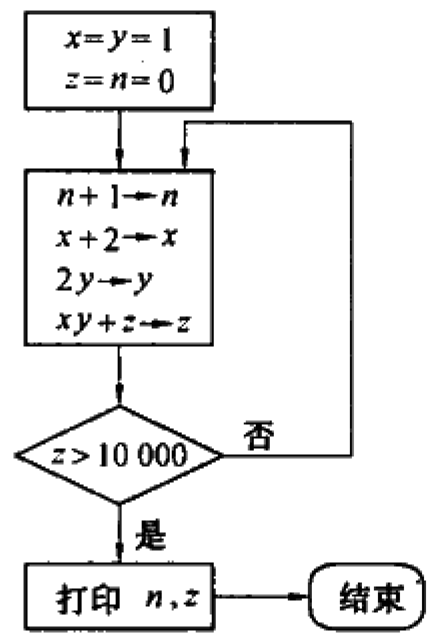


图 9

解 运行程序如下：

	n	x	y	z
初始值	0	1	1	0
第一次	1	3	2	6
第二次	2	5	4	26
第三次	3	7	8	82
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

由此分析，得到

$$z_n = z_{n-1} + (2n+1)\times 2^n (n \in \mathbf{N}^*, \text{约定 } z_0 = 0)$$

$$z_n - z_0 = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) =$$
$$3\times 2^1 + 5\times 2^2 + \cdots + (2n+1)\times 2^n =$$
$$(4n-2)\times 2^n + 2(\text{用错位相减法})$$
$$z_n = (4n-2)\times 2^n + 2$$

z_n 的值随 n 的增加而增加，$z_7 = 3\ 330, z_8 = 7\ 682, z_9 = 17\ 410$.
所以填 9，17 410.

15. 若 a 是非零常数，对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$，问 $f(x)$ 是不是周期函数？为什么？

解 由于 $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} \geqslant \frac{1}{2}$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-(f(x+a))^2}=\cdots=$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}=$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{[\frac{1}{2}-f(x)]^2}=$$

$$\frac{1}{2}+|\frac{1}{2}-f(x)|=\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-f(x))=f(x)$$

所以,$f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数.

16. 甲、乙两人参加一次考试,已知在被选的 10 道试题中,甲能答对其中的 6 道题,乙能答对其中的 8 道题. 现规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 道题进行测试,记甲、乙答对这 3 题的试题数分别为 ξ,η,有人借用小学比例知识猜想 $E\xi=3\times\frac{6}{10}=1.8, E\eta=3\times\frac{8}{10}=2.4$. 你认为此猜想正确吗?

解 由于 ξ 的概率分布如下表所示.

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$	$\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$	$\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$

则
$$E\xi=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=1.8$$

由于 $E\xi$ 的概率分布如下表所示.

η	1	2	3
p	$\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$	$\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$	$\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$

则
$$E\eta=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{7}{15}=2.4$$

所以,两个猜想都正确.

17. 观察一系列式子

$1^3=1$

$2^3=3+5$

$3^3=7+9+11$

$4^3=13+15+17+19$

$\vdots$

注意到各行右边的项数是左边幂的底数,各行右边所有数由正奇数递增构成.由此推测到的一般和式情形为

$n^3 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(n \in \mathbf{N}^*)$ ①

再观察一系列式子

$1^4 = 1$

$2^4 = 7 + 9$

$3^4 = 25 + 27 + 29$

$4^4 = 61 + 63 + 65 + 67$

$\vdots$

也由此推测一般情形为

$n^4 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(n \in \mathbf{N}^*)$ ②

再由 ②③ 推测更一般的情形为

$n^k = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(n, k \in \mathbf{N}^*, k \geqslant 2)$ ③

请检验 ③ 是否正确?

解 3个空分别填

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \cdots + (n^2 + n - 1)$$
$$(n^3 - n + 1) + (n^3 - n + 3) + \cdots + (n^3 + n - 1)$$
$$(n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \cdots + (n^{k-1} + n - 1)$$

检验 ③:运用公式

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)(n \in \mathbf{N}^*)$$

得

$$(n^{k-1} - n + 1) - (n^{k-1} - n + 3) + \cdots + (n^{k-1} + n - 1) =$$
$$n(n^{k-1} - n) + [1 + 3 + \cdots + (2n - 1)] =$$
$$n^k - n^2 + n^2 = n^k$$

所以,公式 ③ 正确.

18.我们知道,过圆上任意一点 P,任意作相互垂直的弦 PA,PB,则弦 AB 必过定点(圆心).试问:过抛物线上任意的点 P(顶点除外),任作相互垂直的弦 PA,PB,则弦 AB 必过定点吗?为什么?

解 设抛物线方程为 $y^2 = 2px(p > 0)$,且设 $P(x_0, y_0)(x_0y_0 \neq 0)$,$A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$.由于 $PA \perp PB$,则

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = -1$$

又因为 $y_1^2 = 2px_1$,$y_2^2 = 2px_2$,所以

$$\frac{y_1 - y_0}{\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2p}} \cdot \frac{y_2 - y_0}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2p}} = -1$$

可化为$(y_1+y_0)(y_2+y_0)=-4p^2$,即

$$y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2+4p^2=0 \qquad ①$$

假定动弦 AB 过定点 $Q(a,b)$,则

$$\frac{y_1-b}{x_1-a}=\frac{y_2-b}{x_2-a}$$

即

$$\frac{y_1-b}{\frac{y_1^2}{2p}-a}=\frac{y_2-b}{\frac{y_2^2}{2p}-a}$$

也即

$$y_1y_2-b(y_1+y_2)+2pa=0 \qquad ②$$

比较①,②,得

$$a=2p+x_0,b=-y_0$$

故动弦 AB 过定点 $Q(2p+x_0,-y_0)$(还可证明该点在弦上).

19.某个QQ群中有 n 名同学在玩一个数字哈哈镜游戏,这些同学依次编号为 $1,2,3,\cdots,n$.在哈哈镜中,每个同学看到的像用数对 $(p,q)(p<q)$ 表示,规则如下:若编号为 k 的同学看到的像为 (p,q),则编号为 $k+1$ 的同学看到的像为 (q,r),且 $q-p=k(p,q,r\in\mathbf{N}^*)$.记编号为 n 的同学看到的像为 (a_n,b_n),已知编号为1的同学看到的像为(5,6).

(1)请分别写出编号为2,3的同学看到的像.

(2)求编号为 n 的同学看到的像.

(3)若数列 $\{C_n\}$ 满足 $C_n=\frac{1}{a_n+b_n-10}$,且 $\{C_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,求证:$\frac{7}{6}<S_n<\frac{7}{4}(n\geqslant 2)$.

解　(1)易算得答案依次为(6,8),(8,11).

(2)得 $\begin{cases}b_n-a_n=n\\a_{n+1}=b_n\end{cases}$,所以

$$a_{n+1}-a_n=n$$

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\\&[(n-1)+(n-2)+\cdots+1]+5=\\&\frac{n^2-n+10}{2}(n\geqslant 2)\end{aligned}$$

验知当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n=\frac{n^2-n+10}{2}$,则

$$b_n=a_n+n=\frac{n^2+n+10}{2}$$

编号为 n 的同学看到的像为$(\frac{n^2-n+10}{2},\frac{n^2+n+10}{2})$.

(3) 求得 $C_n=\frac{1}{n^2}$,因为 $n\geqslant 2$ 所以

$$S_n=C_1+C_2+\cdots+C_n\geqslant C_1+C_2=$$

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}>\frac{7}{6}$$

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+$$

$$(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\frac{7}{4}-\frac{1}{n}<\frac{7}{4}$$

所以
$$\frac{7}{6}<S_n<\frac{7}{4}$$

20. 五人 A,B,C,D,E 站成一圈传球,每人只能传给他的左右邻人,第一次由 A 传出,经过 10 次传球又回到 A 的概率为________.

解 经 10 次传球共有 2^{10} 种方法.将向左传记为"-1"、向右传记为"$+1$",分两类情况:(1) 只有 10 个"-1",或只有 10 个"$+1$",有 2 种方法;(2) 既有 5 个"-1"又有 5 个"$+1$",有 $C_{10}^5\cdot C_5^5$ 种方法,所以所求概率为$\frac{2+C_{10}^5\cdot C_5^5}{2^{10}}=\frac{127}{512}$.

21. 已知两个集合 $A=\{x\mid x^2+px+q=0\}$,$B=\{x\mid qx^2+px+1=0\}$.问是否存在实数 p,q 同时满足条件 $A\cap B\neq\varnothing$ 和 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\{-2\}$?

解 对于集合 A 中的方程 $x^2+px+q=0$,由 $q\neq 0$ 得 $x\neq 0$,则

$$q\left(\frac{1}{x}\right)^2+p\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$$

与集合 B 中的方程 $px^2+px+1=0$ 相比较知,集合 A 中的方程的根与集合 B 中的方程的根互为倒数.

由条件 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\{-2\}$ 和韦达定理知,A 中方程的两个根是 -2 和 $-\frac{q}{2}$,所以 B 中方程的两个根是 $-\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{2}{q}$.

再由 $A\cap B\neq\varnothing$;$A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\{-2\}$ 知,A 与 B 中的两个方程有公共根,但此公共根不是 -2 而只能是 $-\frac{q}{2}$,则 $-\frac{q}{2}\in B=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{2}{q}\right\}$.

(1) 当 $-\frac{q}{2}=-\frac{1}{2}$ 时,$q=1$,此时有 $A=B$,不符合条件 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$,舍去;

(2) 当 $-\frac{q}{2}=-\frac{2}{q}$ 时,$q=\pm 2$,再由韦达定理求得数对$(p,q)=(3,2),(1,-2)$.

所以,存在 $p=3,q=2$;或 $p=1,q=-2$ 满足题设条件.

22. 在一个很大的湖的岸边(此段湖岸为直线段)停放着一只小船,由于缆绳突然断开,小船被风刮跑,其方向与湖岸成15°角,速度为2.5 km/h,同时岸边有一人从同一地点开始追赶小船.已知人在岸上跑的速度为 4 km/h,在水中游的速度为 2 km/h,问此人能否追上小船?若小船改变速度,则小船能被人追上的最大速度是多少?

解 设船速为 v km/h($v\geqslant 0$).

(1) 当 $0\leqslant v<2$ 时,人立即下水可追上小船.

(2) 当 $v\geqslant 4$ 时,人不可能追上小船.

(3) 当 $2<v<4$ 时,设人在岸上跑的时间为 t h($t>0$),则路程为 $4t$ km;人在水中游的时间为 kt h($k>0$),路程为 $2kt$ km;小船在水中游的时间为 $(k+1)t$ h,路程为 $v(k+1)t$ km.由余弦定理得

$$4k^2t^2=16t^2+v^2t^2(k+1)^2-2\cdot 4t\cdot vt(k+1)\cos 15°$$

即 $4k^2=16+v^2(k+1)^2-8v(k+1)\cos 15°$,即

$$(v^2-4)k^2+2(v^2-4v\cos 15°)k+v^2-8v\cos 15°+16=0 \qquad ①$$

依题意关于 k 的一元二次方程 ① 有正数解.

在 ① 中系数 $v^2-4,v^2-8v\cos 15°+16\in\mathbf{R}^+$,所以关于 k 的一元二次方程

① 有正数解的充要条件是 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ -\dfrac{(2v^2-4v\cos 15°)}{v^2-4}>0\\ 2<v<4\end{cases}$,即

$$\begin{cases}(\sqrt{3}-1)v^2-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})v+16\geqslant 0\\ v(v-4\cos 15°)<0\\ 2<v<4\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}v\leqslant 2\sqrt{2},\text{或 } v\geqslant 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\\ 0<v<\sqrt{6}+\sqrt{2}\\ 2<v<4\end{cases}$$

解得

$$2<v\leqslant 2\sqrt{2}$$

说明此时当且仅当 $2<v\leqslant 2\sqrt{2}$ 时,人才能追上小船.

所以,有以下完整的结论:

(1) 当 $0\leqslant v\leqslant 2\sqrt{2}$ 时,人能追上小船;

(2) 当 $v>2\sqrt{2}$ 时,人不能追上小船.

本题的答案为:当小船的速度为 2.5 km/h 时,人能追上小船;若小船改变速度,则小船能被人追上的最大速度是 $2\sqrt{2}$ km/h.

课外练习

1.若 $17=(4+t)^2$,求 $t^4+16t^3+65t^2+8t-2$ 的值.

解 可得 $t^2+8t=1$,所以

$$原式=(t^2+8t)^2+(t^2+8t)-2=1^2+1-2=0$$

2.若 $x+y=\sqrt{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$,$x-y=\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$,求 x^4+y^4 的值.

解 可得 $$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=3\sqrt{3}$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(3\sqrt{3})^2-2(\sqrt{2})^2=23$$

3. 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x,y 都有:$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y+2)+3$,且 $f(1)=1$.

(1) 若 $t\in\mathbf{N}$,求 $f(t)$ 的表达式.

(2) 满足 $f(t)=t$ 的所有整数 t 能否构成等差数列?

(3) 若 $t\in\mathbf{Z}$ 且 $t\geqslant 4$ 时,$f(t)\geqslant mt^2+(4m+1)t+3m$ 恒成立,求 m 的取值范围.

解 (1) 令 $t=n,y=1$ 得

$$f(n+1)-f(n)=3n^2+9n+4$$

又令 $t=1,2,3,\cdots,t-1,(t\in\mathbf{N},t\geqslant 2)$ 得

$$f(2)-f(1)=3\times 1^2+9\times 1+4$$
$$f(3)-f(2)=3\times 2^2+9\times 2+4$$
$$f(4)-f(3)=3\times 3^2+9\times 3+4$$
$$\vdots$$
$$f(t)-f(t-1)=3(t-1)^2+9(t-1)+4$$

将以上各式相加,得

$$f(t)-f(1)=3[1^2+2^2+\cdots+(t-1)^2]+9[1+2+\cdots+(t-1)]+4(t-1)=3\times\frac{1}{6}\times(t-1)t(2t-1)+9\times\frac{1}{2}\times(t-1)t+4(t-1)$$

所以 $$f(t)=t^3+2t^2-3(t\in\mathbf{N},t\geqslant 2)$$

又令 $x=y=0$,可得 $f(0)=-3$,又 $f(1)=1$,所以

$$f(t) = t^3 + 3t^2 - 3(t \in \mathbf{N})$$

(2) 令 $y = -x$,可得 $f(x) + f(-x) = 6x^2 - 6$,又由(1)结论,得当 $t \in \mathbf{Z}^-$ 时,有

$$f(t) = 6t^2 - 6 - f(-t) = 6t^2 - 6 - (-t^3 + 3t^2 - 3) = t^3 + 3t^2 - 3$$

所以 $t \in \mathbf{Z}$ 时,均有

$$f(t) = t^3 + 3t^2 - 3$$

所以 $f(t) = t(t \in \mathbf{Z})$ 的所有根为 $t = 1, -1, -3$.它们能组成两个等差数列 $1, -1, -3$ 和 $-3, -1, 1$.

(3) 由题意,$t \in \mathbf{N}$ 且 $t \geqslant 4$ 时,有

$$t^3 + 3t^2 - 3 \geqslant mt^2 + (4m + 1)t + 3m$$

得

$$t^3 + 3t^2 - t - 3 \geqslant m(t^2 + 4t + 3)$$

即 $(t+1)(t-1)(t+3) \geqslant m(t+1)(t+3)$ 恒成立,即 $t - 1 \geqslant m$,又即 $m \leqslant 3$,故所求 m 的取值范围为 $(-\infty, 3]$.

4.如图1,有一个盛满水的三棱锥形容器,不久发现三条侧棱上各有一个小洞,分别为 D, E, F,且知 $\frac{SD}{DA} = \frac{SE}{EB} = \frac{CF}{FS} = \frac{2}{1}$,若用这个容器盛水,最多可盛原来水的几分之几?

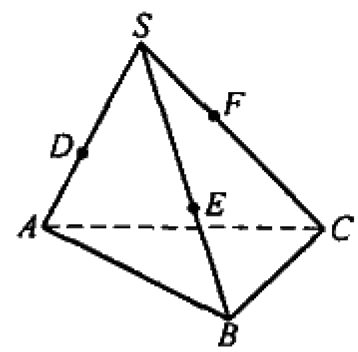


图1

解 当平面 EFD 处于水平位置时容器盛水最多.

设 F, C 到面 SAB 的距离分别为 h_1, h_2,则

$$V_{F-SDE} = \frac{1}{3}S_{\triangle SDE} \cdot h_1 = \frac{1}{2}SD \cdot SE \cdot \sin\angle DSE \cdot h_1$$

$$V_{C-SAB} = \frac{1}{3}S_{\triangle SAB} \cdot h_2 = \frac{1}{2}SA \cdot SB \cdot \sin\angle DSE \cdot h_2 =$$

$$\frac{SD}{SA} \cdot \frac{SE}{SB} \cdot \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

所以最多可盛原来水的 $1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$.

5.如图2,在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB = 3, AD = 6, AA_1 = 3$,N 在线段 A_1D 上,$AN \perp A_1D$,M 在线段 B_1C_1 上且 $AM \perp A_1D$.

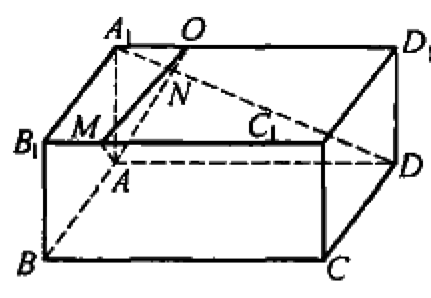


图2

(1) 求 B_1M 的长.

(2) 求直线 AD 与平面 AMN 所成角的大小.

(3) 求点 C 到面 AMN 的距离.

解 (1) 由 $NA \perp A_1D$, $AM \perp A_1D$,得 $A_1D \perp$ 面 AMN.

又 $OM \subset$ 面 AMN,所以

$$A_1D \perp OM$$

又 $A_1A \perp OM$,所以

$$OM \perp \text{面 } A_1AD$$

又 $A_1B_1 \perp$ 面 A_1AD,得

$$OM \parallel A_1B_1$$

得 $\square A_1B_1MO, B_1M = A_1O$

在矩形 A_1ADD_1 中,可求得

$$A_1D = 3\sqrt{5}, AN = \frac{6}{\sqrt{5}}, A_1N = \frac{3}{\sqrt{5}}, DN = \frac{12}{\sqrt{5}}, B_1M = A_1O = \frac{3}{2}$$

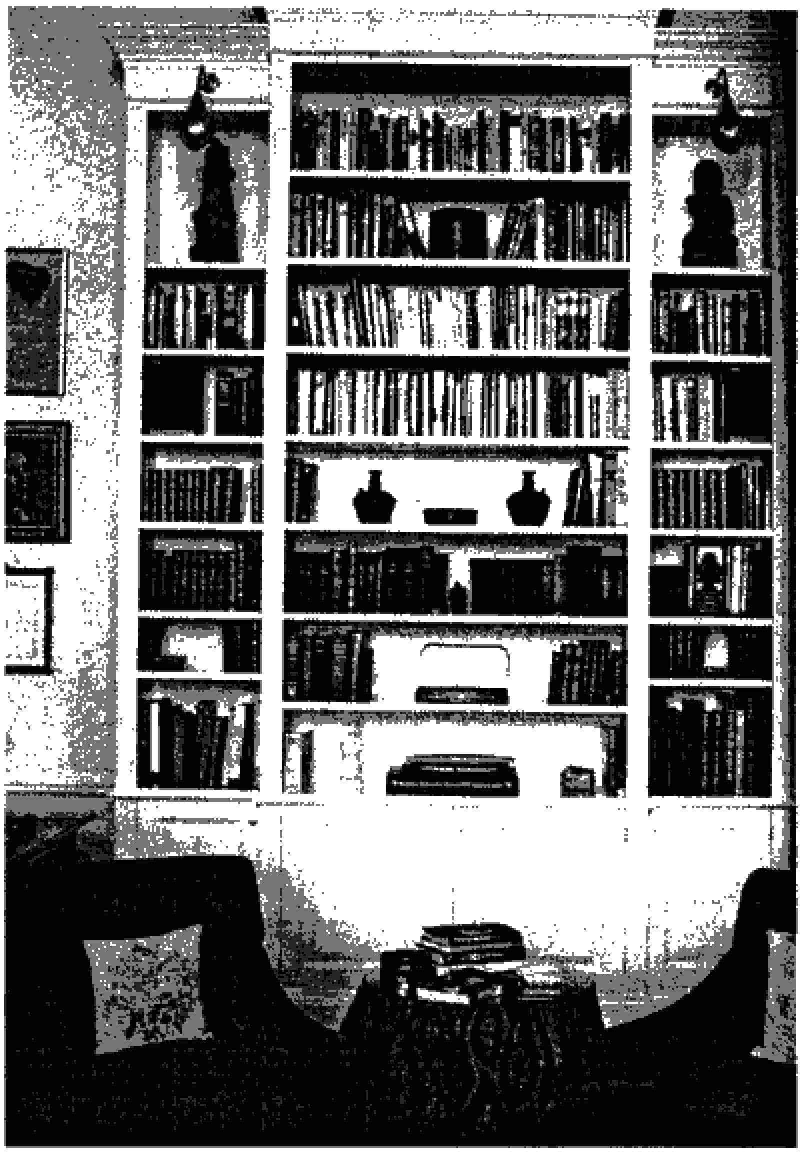
(2) 由(1)的解答知,直线 AD 与面 AMN 所成的角即

$$\angle DAN = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(3) 由 $CD \parallel A_1B_1 \parallel MO$,得 $CD \parallel$ 面 AMN,所以 C, D 到面 AMN 的距离相等,即

$$DN = \frac{12}{5}\sqrt{5}$$

数学史话



祖冲之的精细严密

在中华民族的文明史上，有许多光芒四射的科学巨星.生活在公元5世纪的大科学家祖冲之(429—500)就是其中之一.祖冲之的成就是多方面的，而其中最著名的要算他在圆周率方面的贡献.祖冲之算出了关于圆周率的几个数值：用小数表示的圆周率为3.141 592 6…；用分数来近似地表示，有约率$\frac{22}{7}$，密率$\frac{355}{113}$，密率也叫祖率.

祖冲之自幼博览数学经典，熟知前人思想的精华.不过他并不满足于前人刘徽取得的成果，他继承了刘徽的科学思想和计算方法，向更高的目标攀登.他用一个直径为一丈的大圆，一直推算到圆内接正12 288边形和正24 576边形，终于得出精确到八位有效数字的近似值.为了获得这一结果，需要对九位数字的数，进行130次以上的各种运算，其中包括乘方和开方运算近50次，有效数字多达18位.这样的计算即使用纸和笔来进行也是很繁杂的.何况在祖冲之那个时代还没有我们今天使用的阿拉伯数字，不能用纸笔计算.当时的运算工具是用竹子或其他材料制成的小棍，叫做算筹.人们依据一定的规则，把算筹纵横相间地排列起来，表示各种数字和进行演算.可以想象用这种方式计算圆周率，需要付出多么巨大的劳动，要有多么精细严密的作风和刻苦探求的毅力！科学的方法和辛勤的工作带来了丰硕的成果，祖冲之的圆周率在世界数学史上处于遥遥领先的地位.直到一千年后，才有15世纪的阿拉伯数学家阿尔·卡西和16世纪的法国数学家维叶特求出更精确的数值.

祖冲之在数学方面的贡献不仅限于对圆周率的推算.他还为《九章算术》作过注.他和儿子祖暅合写了数学著作《缀术》，唐初被列为十部算经之一.这本书内容精微深奥，规定的学习时间为四年，是十部算经中最长的，可惜在宋代就已失传.祖冲之还是一位杰出的天文学家，他制定了比以前更精密的历法——《大明历》.他也是机械制造方面的专家，他重造了前人的指南车，创造了“日行百余里”的千里船.此外，他在文学、哲学、音乐等方面也都有相当的造诣和成就.值得指出的是，不论是推算圆周率，还是制定《大明历》，都不晚于公元462年，这一年祖冲之只有32岁.也就是说，他在青年时代已经达到了当时世界科学的高峰.

祖冲之的儿子祖暅也是一位出色的学者.他首先求出球体积公式，并提出了著名的祖暅原理，而意大利学者卡瓦列利(1591—1647)提出这条原理要晚一千多年.

康熙大帝与数学大师

康熙,爱新觉罗·玄烨(1654—1722)是中国历史上很有作为的一位帝王,在位长达61年之久.他一生不仅勤勉为政,还酷爱自然科学,特别是数学,且与数学大师们有着密切的交往,这在我国历代皇帝中是绝无仅有的.

康熙14岁时,看到新旧历法之争相当激烈,而自己因对自然科学知之不多而无法明断是非,于是暗下决心努力学习自然科学,并拜比利时传教士南怀仁为师.因他每日需要早朝,因此只得把学习时间安排在早朝前,命南怀仁半夜起床赶到宫中上课,小康熙刻苦学习,虚心请教,勤学好问,按时交纳作业.他不但弄懂了老师传授的数学知识,而且协助老师把几何、代数术语翻译得更"中国化",如康熙把方程的解称做方程的"根",把平方称为"方",这些沿用至今.康熙在学习几何体时,反复试验,潜心计算,其熟练的操作和准确的计算,使传教士和在场的朝臣惊叹不已.

康熙不仅向西方传教士学习,也与中国数学家有着密切的交往.1705年,康熙第五次南巡,他特意在德州的御舟中召见梅文鼎(1633—1721),与他谈论数学等科技知识达三天之久,可惜梅先生时年72岁,不便任职为其效力,因此康熙特赐御书扇幅及珍馔,临分手时,又赐"绩学参微"四字匾额,以视敬重.

1697年,《康熙皇帝》在巴黎出版,微积分的创始人之一莱布尼兹(1646—1716)立即被它的传奇式描述深深地吸引住了.莱布尼兹从书中看到远隔重洋的那位东方皇帝的惊人天赋,以及对数学及其他科学技术表现出的空前热心,他由衷地钦佩和崇拜.为了表达对康熙的仰慕之情,莱布尼兹在他所发明的计算机刚刚定型时,便将复制品赠送给康熙一台,后又赠送了十台他发明的手摇计算机的复制品(这些计算机至今仍保存在故宫博物院).

纵观历史,作为一个封建皇帝,对自然科学怀有如此浓厚的兴趣,并为推动我国的数学发展有所作为,在古代帝王中实属罕见.

东方第一个几何学家

杰出的数学家、教育家苏步青是中国近代数学的奠基人之一，他生于1902年，卒于2003年3月17日，浙江平阳人.撰写论文160余篇，专著、教材10余部，创立的微分几何学派，在国内外享有盛誉.

苏老出生于一个贫寒的家庭.自幼好学，博览群书.读初二时，对数学产生浓厚兴趣，成绩优异.1919年赴日本勤工俭学，22岁在日本学士院纪要上发表了数学论文《关于费开特的一个定理的注记》，轰动全校.1927年获得了一大批成果，其中"苏步青锥面"成为整个仿射微分几何曲面论的核心.《仿射微分几何》一书在美国出版后，使美国同行惊羡不已.20年代，他深入研究了一类满足附加条件

$$\int_0^{2\pi} r\cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi = 0, \int_0^{2\pi} r\sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi = 0$$

的卵形线，在国外称为"suoval"即"苏氏卵形线".并证明了"任何苏氏卵形线至少有6个顶点"，比国际上著名的"四顶点定理"更优越.1928年至1948年他撰写的41篇论文在日、美、英、意等国的数学刊物上发表，自成一家，被国际教坛称作"东方国度上升起的灿烂的数学明星"，"东方第一个几何学家".

1949年至1959年间，他先后受毛主席、周总理接见30余次."文革"中，遭劫难，被抄家批斗，失去人身自由.在逆境中，认真用科学技术进行船体放样改革，为造船工业作出了贡献，荣获全国科学大会重大科技成果奖.把代数曲线论中的仿射不变量方法首创性地引人计算几何科学，《计算几何》在国内外获得声誉.

他培养人才严格，其弟子如谷超豪、胡和生教授等数学成果卓著，闻名于国内外.

有文献说，有史以来最长寿的数学家是法国的阿达玛(J. S. Hadamard，1865—1963).这句话应当改写了:有史以来最长寿的数学家应当是中国的苏步青.

苏老虽然已经去世，但他的治学精神、人格力量却永远激励着无数数学爱好者在科学的道路上不断前进，攻下一道道数学难题，获得一个个成果，为国争光!

参考文献

[1]甘志国.用数学眼光看世界.苏步青明年一百岁[J].数学通讯,2001(22):48.
[2]甘志国.缅怀苏步青教授[N].十堰晚报,2003-4-3(13).

缅怀国际数学大师陈省身

国际数学大师，著名教育家，中科院外籍院士，南开大学数学研究所名誉所长陈省身先生，因病医治无效，于2004年12月3日在天津逝世，享年93岁.

陈省身教授，美籍华人，20世纪世界级的几何学家.他在整体微分几何上的卓越贡献，影响了数学的发展，被誉为继欧几里得、高斯、黎曼、嘉当之后的又一里程碑式的人物.他曾先后主持创办了三大数学研究所，造就了一批世界知名的数学家.

2000年11月2日，国际小行星中心正式发布第52733号《小行星公报》通知国际社会，将一颗永久编号为1998CS2号的小行星命名为"陈省身星"，以表彰他对全人类的贡献.

陈先生1930年毕业于南开大学数学系，晚年情系故园，回天津南开大学数学研究所主持工作，培育新人，只为实现心中的一个梦想：使中国成为21世纪的数学大国.

在国际数学界，无人不知陈省身，无论他在哪里都会受到欢迎和拥戴，然而在2000年，耄耋之年的他最终作出回国定居的选择.陈先生的居所取名宁园(因为陈先生总觉得时间不够用，需要宁静).陈先生说："我最美好的年华是在南开渡过的，她给我留下了许多美好的回忆.我回到中国，就是想在有生之年再为中国做一些事情."

1972年，中美两国刚刚结束对峙状态，陈省身就偕妻女访问了中国.后来他在《回国》一诗中表达了这种赤子情怀：

飘零纸笔过一生，世誉犹如春梦痕.

喜看家园成乐土，廿一世纪国无伦.

陈教授的成就遍及数学的诸多方面，杨振宁(诺贝尔物理学奖获得者)称赞陈先生的示性类"不但是划时代的贡献，也是十分美妙的构想."

研究数学，是陈省身一生的追求；让中国成为21世纪的数学大国，是陈省身由来已久的梦想.1991年他在一次演讲中说："愿中国的青年和未来的数学家放开眼光展开壮志，把中国建为数学大国.""中国必将成为数学大国"这一预言，在数学界被称为"陈省身猜想".这一"猜想"蕴涵着炎黄子孙对整个中华民族复兴的渴望.

近年来,陈省身把主要精力奉献给了中国的现代数学事业,他深情地说:"我最后的事业在中国."运用自己在国际数学界的崇高威望,陈省身大力推动中国数学现代化的进程,于1980年初启动了三项影响巨大的"数学工程":每年一度在中国举办"微分方程和微分几何国际会议";创立"暑期数学研究生数学中心";选拔中国数学研究生参加"陈省身项目"赴国外攻读博士学位.此外,他在90岁高龄还走上讲台,亲自为本科生上课,系统地讲解微分几何课程.

1985年,中国数学会设立了两年一次的"陈省身数学奖",奖励中青年数学家所取得的成就,它和"华罗庚奖"并称为中国数学界的最高奖.1993年,陈省身和丘成桐(唯一的非尔兹奖获得者中的外籍华人)提出建议,希望中国举办一次国际数学家大会.由于他们的努力和威望,1998年的国际数学家大会正式批准了这项建议,2002年的国际数学家大会在中国北京举行(这是首次在发展中国家举行).对中国数学事业的发展产生了巨大的推动作用.

编后语 这里向同学们介绍了陈省身教授,是为了昭示他追求真理的科学精神、淡泊宁静的人生态度和热爱祖国的赤子情怀.正如陈教授的微分几何对数学的发展作出了突出贡献一样,他的科学精神和道德情操同样是一笔巨大的精神财富.我们中学生应肩负起历史的重任,勤奋学习,打好基础,以陈省身教授为榜样,争取在将来的工作中作出更大的贡献,为国争光!

几何学之父——欧几里得

说出来也许会使你感到惊奇：原来，今天你所读的几何课本中的大部分内容，来自2 300多年前的《几何原本》.这本书的作者，便是被誉为“几何学之父”的古希腊著名数学家欧几里得（前330—前275）.《几何原本》13卷，是世界上最早的公理化数学著作，将公元前7世纪以来希腊几何积累起来的丰富成果整理在严密的逻辑系统之中，使几何成为一门独立的、演绎的科学.《几何原本》是古希腊科学的骄傲，它的基本原理和定理直到现在仍是教科书的一部分.欧几里得是第一个把几何学系统化、条理化、科学化的人.

欧几里得是希腊亚历山大大家教授.著名的古希腊学者阿基米得，是他“学生的学生”.关于欧几里得的生平，没有详细的记载.然而，却流传着许多关于他的有趣故事……

那时候，人们建造了高大的金字塔，可是谁也不知道金字塔究竟有多高.有人这么说：“要想测量金字塔有多高，比登天还难！”

这话传到欧几里得的耳朵里，他笑着告诉别人：“这有什么难呢？当你的影子跟你的身体一样长的时候，你去量一下金字塔的影子有多长，那长度便等于金字塔的高度！”

欧几里得的名声越来越大，以至连亚历山大国王多禄米也想赶时髦，学点几何学.于是，国王便把欧几里得请进王宫，讲授几何学.谁知刚学了一点，国王就显得很不耐烦，觉得太吃力了.国王问欧几里得：“学习几何学，有没有便当一点的途径，一学就会？”，欧几里得笑道：“陛下，很抱歉，在学习科学的时候，国王与普通百姓是一样的，科学上没有专供国王行走的捷径，学习几何，人人都要独立思考，就像种庄稼一样，不耕耘，就不会有收获的.”

前来拜欧几里得为师，学习几何的人越来越多，有的学生问欧几里得：“老师，学习几何会使我得到什么好处？”欧几里得思索一下，请仆人拿点钱给这位学生，冷冷地说道：“你拿不到钱，是不肯学习几何学的！”

欧几里得沉醉于他的几何学.他对做官、赚钱之类的事情没有多大兴趣.他认为，科学与权势、金钱无缘.正因为这样，他把毕生精力献给了几何学.如今，人们还把所研究的几何学称为“欧氏几何”，它是现代几何学的一门分支.

参考文献

[1]李想,谢思.科学家的故事[M].呼和浩特:远方出版社,2005.
[2]天津人民广播电台科技组.科学创造的艺术[M].北京:中国广播电视出版社,1987.

想撬动地球的阿基米得

阿基米得,公元前287年诞生于地中海西西里岛的叙拉古城(今意大利锡拉库萨).是古希腊著名的数学家和物理学家,静力学和流体静力学的奠基人.

阿基米得的主要贡献是:

(1)系统总结并严格证明了杠杆定律,为静力学奠定了基础.

(2)在著名的《论浮体》一书中,他总结出了著名的阿基米得原理.

(3)确定各种几何图形的面积和物体的表面积、体积的计算方法,创立"穷竭法".

后人常把他和牛顿、高斯并列为有史以来三个贡献最大的数学家,他的生平没有详细记载,但关于他的故事却广为流传.

他确立了力学的杠杆定律之后,曾发出豪言壮语:"给我一个支点,我就可以撬动这个地球!"

叙拉古的国王叫金匠造一顶纯金的皇冠,因怀疑里面掺有银子,便请阿基米得鉴定一下.这一下可把阿基米得给难住了,怎么办呢?他冥思苦想了许多天,还是解不开这个谜.

一天,当他进入浴盆洗澡时,水浸溢到盆外,于是悟到不同材料的物体,虽然质量相同,但因体积不同,排出的水也不相等.根据这一发现,启发了他丰富的想象力,帮他找到了破解皇冠之谜的方法.他高兴得跳出浴盆竟连衣服也没穿,就这样赤身裸体地跑出去,口中大呼:"我找到了!"

他首先取来皇冠,又取来与皇冠质量相同的黄金,还有与皇冠质量相同的白银,然后把三样东西依次放人盛满水的容器里,仔细观察溢出的水各有多少.根据测验的结果发现,皇冠是用黄金和白银各掺一半做成的.这个发现,不仅为国王解开了皇冠的疑案,更重要的是,它为全人类提供了一份珍贵的遗产,这就是今天被称为"阿基米得定律"的浮力定律:浸在液体里的物体,其所减少的质量,等于同体积的该液体的质量.

公元前212年,罗马军队进人叙拉古城.就在这天的清晨,一队罗马军队踢开了阿基米得的房门,残酷地杀害了这位手无寸铁的老科学家.

阿基米得的死,是叙拉古人的悲哀,也是科学史上的悲哀.当他在敌人的屠刀下倒下时,仍然用微弱的声音说道:"你们能夺去我的身体,但却带不走我的

心."的确,他的那颗献给科学事业的赤诚之心,通过他的不朽著作,代代相传下来.

阿基米得死后,人们为了按照他的《论球和圆柱》和《圆和量度》理论,在他的墓前做了一个特殊的石雕墓碑:一个圆柱加球体的简单墓标,标志着一个伟大科学家的愉快心灵.

参考文献

[1]李想,谢思.科学家的故事[M].呼和浩特:远方出版社,2005.

莱布尼兹对康熙的仰慕之情

1697年，一本奇特的书《康熙皇帝》在巴黎出版．微积分的创始人之一莱布尼兹（1646—1716）立即被它的传奇式描述深深地吸引住了，这本书的奇特之处在于它并不是通常人们所熟悉的那种叙事式形式，而仅仅是一位法国传教士从中国回来后，呈给法王路易十四的奏折．莱布尼兹从《康熙皇帝》书中看到远隔重洋的那位东方皇帝的惊人天赋，以及对数学及其他科学技术表现出的空前热心．他由衷地寄于钦佩和崇拜之情．1698年，莱布尼兹从白晋那儿得到中国的一部古老哲学著作《易》．莱布尼兹对它产生了极大兴趣，使自己立即卷入深究八卦机理的漩涡中．他从中受到启发，创立了二进制，为了表达他对康熙皇帝的仰慕之情，莱布尼兹在他所发明的计算机基本定型时，便将复制品赠送给康熙皇帝一台，后又赠送十台他发明的手摇计算机的复制品（据说，这些计算机至今仍保存在故宫博物院），表达了他对康熙及炎黄子孙的崇拜之情，并多次写信给康熙建议在北京成立科学院，以加强中西方文化的交流．由于封建制度的桎梏及整个社会的盲目排外，当时的中国对欧洲数学的发展一无所知，无人知晓符号代数、透视理论、对数、数论、解析几何、微积分等，中国的数学研究仅限于初等数学，与世界先进水平相比已相差甚远，可惜由于受时代限制，康熙并未采纳莱布尼兹的建议，以至中西数学差距越来越大．

康熙皇帝爱新觉罗·玄烨（1654—1722）是中国历史上很有作为的一位帝王，在位达61年之久，他一生不仅勤勉为政，还酷爱自然科学，尤其是数学，这在我国历代皇帝中绝无仅有．

参考文献

[1]林昌铋．康熙大帝与科学[N]．中国科学报，1994-5-25(4)．

海内存知己 天涯若比邻

关于"对数"的产生,应归功于英国的两位数学家纳皮尔(1550—1617)与布立格斯(1561—1631).

《纳皮尔对数》在爱丁堡发表后,虽然当时没有立即引起科学界的重视,但是却惊动了伦敦的一位数学家布立格斯.布立格斯先在伦敦格远沙姆学院担任数学教授,后又在牛津大学任天文学教授,当他得知《纳皮尔对数》出版后,就充分肯定了纳皮尔工作的重大意义.布立格斯深有感慨地说:"纳皮尔用其新颖而奇妙的对数使我能够用脑和手来工作,我从未读过一本能够使我这样惊异和喜爱的书.我希望今年夏天能见到他."

为了实现自己的愿望,布立格斯在1616年夏天写信给纳皮尔,决定前往爱丁堡去拜访纳皮尔.这个决心是不容易下的,因为布立格斯当时已是55岁的老学者了,而且从伦敦到爱丁堡远隔千里,那时不但没有飞机,而且也没有火车、汽车,布立格斯只能乘坐马车前往,这些困难对布立格斯都不算什么,老教授还是乘坐马车如期出发了.但又节外生枝,在旅途中马车出了毛病,耽误了行程,不能如期到达,这种情况既使旅途中的布立格斯急得坐立不安,又使纳皮尔在爱丁堡几乎两眼望穿.真是"好事多磨",纳皮尔终于把布立格斯给盼来了!

见面时,两人热情地拥抱,并流出了激动的热泪,许久都说不出话来.最后布立格斯先开言道:"我这次不远千里而来,主要是想和你见见面,同时也想知道,你是用怎样的天才妙法首先发现对数的,为什么过去没有人发现它呢?"两人后来成了知己,这的确可算作是数学史上"海内存知己,天涯若比邻"的一个典型范例.

布立格斯对纳皮尔对数理论提出了改进意见,从而发明了常用对数.

拉格朗日的成才之路

有“数学全才”、“人类智慧的代表”等美称的伟大数学家拉格朗日于1736年1月25日生于意大利都灵的一个富豪人家.在学校读书时,对数学的热爱使他奋进不止,几乎读遍了当时他所能找到的所有数学书籍,浩瀚的数学海洋向他展示出无限的风光,令他心驰神往.他刻苦攻读,勤于思考,对许多问题都有独特的见解,深受老师的青睐.1755年,19岁的拉格朗日应邀任都灵炮兵学院的数学教授.他才华横溢,在数学领域以及物理学、天文学等方面均有大量建树,30岁时就成为蜚声欧洲的数学界权威.1759年被选为德国柏林科学院院士,1772年被选为法国巴黎科学院院士,1776年被选为俄国圣彼得堡科学院院士.

拉格朗日为什么能取得那么多举世震惊的巨大成就呢?除了当时的欧洲正逢科学迅猛发展的盛世这一大背景影响之外,主要是他自身所作的不懈努力.

首先,在信奉上帝的那个时代,拉格朗日经过千思万虑,选择了古希腊科学家阿基米得作为心中唯一崇拜和信仰的偶像,他将阿基米得推崇为数学之神,以阿基米得作为奋发上进的楷模.在科学上,刻苦学习阿基米得留下的卓著成果;在品德上,虚心学习阿基米得对祖国的无比热爱和对事业的高度责任感.他无时无刻不以这位伟人的作为激励自己,使之成为钻研数学、献身数学的原动力.

其次,在钱财与科学二者必须选择其一时,拉格朗日毫不犹豫地选择了后者.在当时,拉格朗日的家庭是受人羡慕的富有家庭:轻裘肥马,锦衣玉食;城里有公寓,乡下有别墅;车水马龙,宾客如云.他从小对父亲聚敛钱财的种种手段就十分反感,当父亲要他弃学经商,继承家业时,他态度强硬地表示“永不顺从”.他不爱财爱科学,立志为数学献身.不久,家业在父亲的一次投机中彻底破产,拉格朗日把这件事说成是他一生最大的幸运,否则自己在父亲的逼迫之下也很有可能成为腰缠万贯的大财主,无法将全部精力投向发展数学的事业.

再次,得益于为当时最有声望的数学家欧拉(1707—1783)的帮助和教诲.欧拉将自己多年研究的成果写进《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书,正当人们为此书的出版欢呼时,一件意外的事发生了,19岁的拉格朗

日读了这本著作后,发现作者自称“简单而又漂亮”的方法必须改进后才适用,于是他勇敢地给欧拉写信提出批评指正,比拉格朗日年长29岁的欧拉没有世俗间常有的那种“自尊心”,他赞许拉格朗日不迷信权威敢于创新,敢于挑战的科学精神,立即邀请拉格朗日面谈,从此建立起深厚的友谊.欧拉作为一位“真正的科学家”,对拉格朗日的成长和毕生前途具有决定性影响,他帮助拉格朗日修改和发表论文,让拉格朗日接替他在柏林科学院所担任的职务,经常性的学术交流和无私帮助为拉格朗日不断取得研究成果铺路架桥,拉格朗日没有辜负恩师的期望,而成为有名的数学大师.

参考文献

[1]伊夫斯·H.数学史概论(修订本)[M].欧阳绛,译.太原:山西经济出版社,1986.
[2]邓宗琦.数学家辞典[M].武汉:湖北教育出版社,1990.

闵可夫斯基与四色猜想

闵科夫斯基曾担任过爱因斯坦的数学导师，爱因斯坦经常因为逃他的课而挨骂："懒坯！"当他看到爱因斯坦发表的相对论后，说道："真想不到，这个小伙子能写出这样深刻的文章来."并且很快就迷上了相对论，同时还提出了自己的改进想法，那是一种四维时空坐标体系，经过这样的数学处理，狭义相对论变得更加完美了.

不过闵科夫斯基也在自己的学生面前出过丑，那是在苏黎世大学给一群研究生讲课时，他一时兴起，便谈起了"四色猜想"，他对自己的学生满不在乎地说："四色猜想之所以一直没有解决，究其原因是当今世界第一流的数学家们还没来得及研究它.其实，要解决这一猜想，并不见得会有多难."说着便拿起粉笔，即兴演算起来，满以为能一挥而就，想当场解决问题.他一口气写了几黑板，没料到越写越复杂，越分析头绪越多，讲着讲着，不由自主地挂起了黑板.虽然如此，教授毫不灰心，他坚信自己有能力揭开奥秘，决不草率收兵.第二天、第三天……一连几天都接着讲，接着算，接着写.同样，每次都挂了黑板，而且一次比一次狼狈.闵科夫斯基对证明这一猜想所需要的工作量远远估计不足，结果"马拉松"式的一连挂了几个星期的黑板，搞得他焦头烂额，不得不中途告吹.几星期后的一天上午，他疲惫不堪地走进教室.这时候，正值雷电交加，大雨倾盆，闵科夫斯基十分愧疚地说："唉！看来上帝也在责怪我狂妄自大呀！四色猜想真难，到目前为止，我简直拿它毫无办法！"

巧借他山之石 妙攻本地之玉

在人的印象中,数学家常常是一些离群索居、沉默寡言的人,无须和他人合作与交流,只要靠着一支笔一张纸,他们就能创造数学、发展数学.确实,在数学研究中似乎看不到某些实验科学中常见的那种大规模的集体合作,但数学也是一项需要合作的事业,即使是最伟大的数学家也需要与他人进行交流,需要利用他人的头脑获取信息,弥补缺陷,启迪智慧.

数学家希尔伯特与闵可夫斯基、赫维茨的合作已成为数学史上的佳话,广为流传."每天下午准5点,三个人必定相会去苹果树下散步".希尔伯特曾称赞这种学习方法"比在昏暗的教室或图书馆里啃书本不知要好多少倍","日复一日的散步中,我们全部埋头讨论当前数学的实际问题,相互交换我们对问题最新获得的理解,交流彼此的想法和研究计划."

"水尝无华,相荡乃成涟漪;石本无光,相击始发灵光."通过交流与合作,活用他人头脑中的知识、观点,不仅可以使数学家们获得灵感,促进数学研究的发展,也可以为数学学习者拓宽思路,启迪思维,减少不必要的弯路.总之,要取得数学学习的成功不可忽视活用他人头脑,不可忽视交流与合作.

活用他人头脑的最有效途径当推自由活泼的小型讨论会,被称为"疯子的集会"的法国布尔巴基学派不但讨论出了《数学原理》这样数十卷的巨著,而且造就了一批优秀的数学家,它的风格和气质是:集体感与友谊感,完全坦率与心情愉快……心理的研究也表明,争论往往能够引起"智力激荡",这是因为争论时双方大脑细胞都处于受刺激兴奋状态,"兵刃相交,利钝立见",这对认识真理和抛弃错误都是十分有利的.

在数学学习中也是可以"借脑"的,比如:对一道难题,我有一个解法,你有一个解法,他还有一个解法,交流交流不正可以"集思"吗? 又如,一个抽象难懂的概念,你从正面看,我从反面看,他从侧面看,讨论讨论显然可以"广益".巧借他人之石,妙攻本地之玉.正确地使用这种互补性的"借脑",是提高学习质量的有效措施之一.当然,我们也要严防在"相互帮助"的幌子下抄袭别人的作业,因为那不是"借脑"而是"偷窃"了.

数学家的文学修养

著名数学家徐利治把自己的治学经验概括为:“培养兴趣、追求简易、重视直观、学会抽象、不怕计算、喜爱文学”.在不少人看来,数学和文学似乎是两种截然相反的学科,前者靠理性思维,后者靠形象思维,两者互相排斥.然而历史上许多大数学家都有较好的文学修养.

笛卡尔对诗歌情有独钟,认为“诗是激情和想象力的产物”,诗人靠想象力让知识的种子迸发火花.数学家莱布尼茨从小对诗歌和历史怀有浓厚的兴趣.数学王子高斯在哥廷根大学就读期间,最喜好的两门学科是数学和语言,并终生保持对它们的爱好.正当作数学家还是语言学家的念头在脑中徘徊时,19岁的高斯成功地解决了正17边形的尺规作图问题,从而坚定了从事数学研究的信念.继高斯之后的伟大数学家柯西从小喜爱数学,他的数学天赋被数学家拉普斯和拉格朗日发现.据说拉格朗日曾预言柯西将成为了不起的大数学家,并告诫其父不要让孩子过早接触数学,以免误入歧途,成为“不知道怎样使用自己语言”的大数学家.庆幸的是,柯西的小学是在家里上的,在其父循循善诱下,系统学习了古典语言、历史、诗歌等.具有传奇色彩的是,柯西政治流亡国外时,曾在意大利的一所大学里讲授过文学诗词课,并有《论诗词创作法》一书留世.柯西的文学功底由此可见一斑.G·波利亚年轻时对文学特别感兴趣,尤其喜欢德国大诗人海涅的作品,并以与海涅同日出生而骄傲,曾因把其作品译成匈牙利文而获奖.1921年来中国讲学的罗素是当代著名哲学家、数理逻辑学家,著名的“理发师悖论”的发现者.但他也是一个文学家,有多篇小说集出版.令许多专业作家大跌眼镜的是,非科班出身的他于1950年获诺贝尔文学奖.

再看看国内的数学家,华罗庚能诗善文,所写的科普文章居高临下,通俗易懂,是值得后人效法的楷模.苏步青自幼喜爱旧体诗词,读过许多文史书籍,并把诗词作为自己的业余爱好,靠它来调剂生活.许宝騄自幼即习古典文学,10岁后学作古文,文章言简意丰,功底非同寻常.李国平不仅是中国的“复分析”奠基人之一,也是一位优秀的诗人,其诗集《李国平诗选》1990年由武汉大学出版社出版发行,序言则是苏步青的一首颂诗:“名扬四海句清新,文学纵横如有神.气吞长虹连广宇,力挥彩笔净凡尘.东西南北经行遍,春夏秋冬入梦频.拙我生平偏爱咏,输君珠玉得安贫.”

数学和文学是相通的,学习数学的人要注重文学修养,有志于数学的年轻人尤其不要忽视这一点.

天才的品格

著名科学家福尔顿,曾经由于某项研究的需要,必须测量固体氦的导热系数.他以完全正确的方法测量,可测得的数字却比当时人们想象的数字大500倍.

福尔顿将自己测得的结果与过去的理论相对比,觉得相差太远,因而没有发表自己的试验结果.也就是说,他没有把这个新的"信息"或者"事实"写在自己的旗帜上.

在福尔顿之后,美国一位年轻的科学家在测量固体氦的热传导过程中也得到同样的结果.和福尔顿不同的是,他立即将这个结果发表,并由此推出一种新的导热系数测量法.而且,他的这一发现受到了全世界的瞩目.

我们不难想象福尔顿的内心是何等的懊恼.他回忆这段经历时,痛苦地说:"如果当时我除去名为'习惯'的帽子,而戴着称为'创造'的帽子,那个年轻人绝不可能抢走我的荣耀."

福尔顿的遗憾,是他把自己新的发现,掩埋在陈腐的"习惯"和"传统"之中,从而遮蔽了成功的光芒.

这使我们想起了瑞典科学家阿伦尼乌斯.阿伦尼乌斯于1882年在瑞典科学院物理学家爱德龙德的指导下进行了测定电解质电导率的研究工作.他把测定结果写成一篇博士论文寄给母校多普沙拉大学.由于该校学位评议委员的成员们还不理解论文的深刻意义,而错误地评为四等.

"四等"就意味着参加博士参试的失败,但是,阿伦尼乌斯在挫折面前没有退却,没有消沉,他将这篇落选的博士论文和一封信一起寄给德国的加里工学院物理化学家奥斯特瓦尔德.

奥斯特瓦尔德仔细地阅读了论文和来信后,被深深地打动了,连呼"真了不起".1844年8月,他亲自去瑞典访问了阿伦尼乌斯,对那篇落选的论文给予高度评价,并代表加里工学院授予他博士学位.

更令人惊喜的是,阿伦尼乌斯在此基础上继续努力,并于1903年因这一成就获得了诺贝尔奖!

阿伦尼乌斯不畏权威,坚持自我,勇于探索,最终问鼎辉煌.

敢于蔑视教条,摆脱习俗偏见,敢于我行我素,坚持真理,你便会出类拔萃,获得成功.相信自己,特立独行,不断进取,这便是天才的品格.

他未到 13 岁就赢得 IMO 金牌

近来,最重要的数学新闻就是在马德里颁发的 2006 年菲尔兹数学奖.四位获奖者有两位曾经是国际数学奥林匹克竞赛(IMO)的获奖者,华裔数学天才陶哲轩(Terence Tao)的得奖最引人注目.

1975 年 7 月 15 日,陶哲轩出生在澳大利亚阿得雷德一个香港移民的家庭,2006 年,在马德里举行的 IMO 大会上,因为在微分方程、组合论、调和分析和可加数论上的贡献,获得菲尔兹数学奖(数学界的最高奖项,被誉为数学界的诺贝尔奖),年仅 31 岁.

陶哲轩从小就展现出了惊人的数学天分.他 2 岁开始学读写并会加减法;7 岁就学微积分并有 16 岁学生的学习能力,而且学得轻松,理解透彻,与班上同学相处得很好;8 岁开始念中学,12 岁进大学,16 岁毕业.陶哲轩读中学时,总是比别的学生提前两节课完成所有的数学作业,他的爱好包括计算、玩电子设备、看科幻小说.1992 年至 1996 年在美国普林斯顿大学攻读研究生,并于 21 岁时获得博士学位.他年仅 24 岁就成为加州大学洛杉矶分校的终身数学教授.陶哲轩的导师、沃尔夫奖获得者施泰因(E.Stein)曾说陶哲轩是百年难遇的奇才.

1986 年,1987 年和 1988 年,陶哲轩三次成为 IMO 最年轻的参赛者,依次赢得铜牌、银牌和金牌.他未到 13 岁就赢得金牌的纪录至今没有人能打破.

陶哲轩在加州大学的同事说:“他就像莫扎特,数学就像从他的脑子中流出来一样,不过他却没有莫扎特的人格问题,大家都非常喜欢他.”

固执的陶哲轩执著地热爱着数学,如果有课堂上没弄明白的东西,不搞清楚他是不会罢休的.他常花大量时间去反复思考一些貌似简单的问题,直到彻底理解为止.他鼓励大家说:“培养对数学的兴趣最重要的一点就是跟数学一起玩,给自己找些小挑战,设计一些小游戏等.”

本文作者还想说一点:努力做数学题,包括书本题、高考题、竞赛题,都可以培养自己对数学的兴趣.陶哲轩不正是由三次数学竞赛而培养了自己对数学的浓厚兴趣吗?

参考文献

[1]克莱门茨.数学超常儿童陶哲轩[J].数学教学,2006(10):44-45.
[2]《数学教学》编辑部.资料:华裔数学天才陶哲轩(Tercnce Tao)[J].数学教学,2006(10):45.

数学史六文

1　有骨气的清代数学家戴煦

我国清代有不少数学家研究对数是很有成绩的,其中以戴煦(1805—1860)最为显著.戴煦是浙江钱塘(今杭州)人,他将功名看得很平淡,一生不愿为官,在对数研究上成果卓著.他认为原有的求对数方法很繁,不易为初学者掌握,因而他曾作深入的研究,发现多种简捷方法,著有《对数简法》(1845),《续对数简法》(1846),《假数测圆》(1852)等编,总名为《求表捷术》.

1854年,有一个名叫艾约瑟的英国人,在李壬叔(1811—1882)和张福僖(? —1862)处看到戴煦的著作,赞叹不已,因此他专程到杭州拜访戴煦.戴煦是一个热爱祖国的数学家,由鸦片战争而引起对英国人反感,故决定不予接见,致使艾约瑟大失所望,但他对戴煦的崇敬心情并未因此而降低,他还将戴煦的书译成英文,寄回英国出版,这在对数历史上也被传为一段美谈.

2　不修边幅的爱因斯坦

爱因斯坦是著名科学家,对于他,可以说是无人不知.关于他的故事,读者可能也知道不少.据说,他确实是"视金钱如粪土",经常把邮局寄来的稿费汇款单当书签,而一直不领取汇款,也可看出这位科学巨人是怎样全身心地投入到科学研究中去的.

爱因斯坦一向不讲究穿戴,在他未成名时,一位朋友在街上碰到他,对他说:"你怎么穿得这么破旧?"他回答说:"没什么,反正人们都不认识我."几年后,爱因斯坦成了世界闻名的大学者.一天,那位朋友在街上又碰见了他,惊奇地问:"你怎么还穿得这么破旧呀!"他笑了笑说:"反正人们都已认识我了."

有一次,比利时国王邀请爱因斯坦去做客.国王派宫廷官员去火车站接这位大学者.但几个钟头以后,那名官员回来说没有接到爱因斯坦.就在此时,门卫进来禀告:爱因斯坦教授到.国王生气地瞪了那个官员一眼,起身去门口迎接.当他见到爱因斯坦时,不禁吃了一惊,只见面前的人身披一件破雨衣,脚上穿着一双沾满泥浆的旧皮鞋,其穿戴怎么也无法使人把他同世界闻名的大学者联系起来.这时,国王才明白自己的手下为什么没有接到他.

3 爱提问题的大数学家爱尔希特

保罗·爱尔希特(Paul Erdös)是当今著名的大数学家,出生于1913年3月26日,匈牙利人,父母都是数学教师,他的大部分初等数学知识都是从他的双亲那里学来的.18岁便开始研究数学并发表数学论文,已发表论文1 200多篇.他生性喜欢交往,有250多位合作者.主要研究数论、集合论、组合学、几何学、概率论等.他一生未婚,一直与母亲生活在一起并周游世界.他精力旺盛,平时每晚只睡5个小时.他热爱数学事业,经常设置数额不等的、有时高达一千美元的奖金,来征求对一些数学猜想与数学问题的解答.爱尔希特提出的"空"多边形问题(参见:贺贤孝.数学中的未解之谜.长沙:湖南教育出版社,1998:40-44)人们一直还在研究.

4 尚未凝固的水泥路面

1899年,爱因斯坦在瑞士易黎世联邦工业大学就读时,他的导师是数学家明可夫斯基,师生二人经常在一起探讨科学、哲学和人生.由于爱因斯坦肯动脑,爱思考,深得明可夫斯基的赏识.

有一次,爱因斯坦突发奇想,问明可夫斯基:"一个人,比如我吧,究竟怎样才能在科学领域、在人生道路上留下自己的闪光足迹,做出自己的杰出贡献呢?"这是一个"尖端"的问题,明可夫斯基表示要好好想一想,日后予以解答.

三天后,明可夫斯基告诉爱因斯坦:答案有了! "快告诉我是什么?"爱因斯坦迫不及待地抱住老师的胳膊使劲摇了两下.一向才思敏捷的明可夫斯基此次却做出一副怎么也说不明白的样子,拉起爱因斯坦就朝一处建筑工地走去,而且径直踏上了建筑工人们刚刚铺好的水泥地面.在建筑工人们的呵斥声中,爱因斯坦被弄得一头雾水,他不解地问明可夫斯基:"老师,您这不是领我误入'歧途'吗?""对,对,正是这样!"明可夫斯基顾不得工人们的指责,非常专注地说:"看到了吧? 只有尚未凝固的水泥路面,才能留下深深的脚印,那些凝固很久的老路面,那些被无数人、无数脚步走过的地方,你别想再踩出脚印来……"听到这里,爱因斯坦沉思良久,意味深长地点了点头.

从此,一种非常强烈的创新和开拓意识开始主导着爱因斯坦的思维和行动,用他自己的话说就是,"我从来不记忆和思考词典、手册里的东西,我的脑袋只用来记忆和思考那些还没载入书本的东西."于是,就在爱因斯坦走出校园、初涉世事的几年里,他作为伯尔尼专利局里默默无闻的小职员,利用业余时间进行科学研究,在物理学三个未知领域里齐头并进,大胆而果断地挑战并突破了牛顿力学.在他刚刚26岁的时候,就提出并建立了狭义相对论,开创了物理

学的新纪元,在科学史册上留下了深深的闪光的足迹.

5 $3x+1$问题

$3x+1$问题也称克拉茨问题、叙拉古问题、角谷猜想,是尚未解决的数学难题之一,这个问题人人都会演算,但要证明它却像对付坚硬的磐石,它似乎能轻易地挫去你智慧的锋芒.

$3x+1$问题是这样的:对于任一给定的正整数,连续进行如下运算:如果它是偶数就除以2,如果还是偶数就再除以2,……,直到得到一奇数,如果这个奇数不是1,就将这个奇数乘以3再加上1,这样得到的结果又为偶数,就再除以2,这样不断地运算下去,直至得到1为止.如:$17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$.

那么可以提出这样的问题:对于任一正整数,进行上述运算,经过有限步后都能得到1吗?

题意如此清晰、明了,连小学生都能看懂的问题,却难倒了20世纪的许多大数学家.当时,有许多专家、学者都对这个问题陷入了狂热的迷恋中,在东方对这个问题进行传播的日本数学家角谷静夫曾撰文描写过人们对这个问题狂热迷恋的情景:“据说,耶鲁大学有长达一个月之久,人人都在研究这个问题,但却没有任何结果.”经过几十年的探索与研究,人们似乎接受了大数学家爱尔特希的说法:数学还没有成熟到足以解决这样的问题.

早在20世纪80年代,数学家已经借助电子计算机验证了2^{40}以内的正整数对叙拉古问题均成立,究竟到何时才能完全解决这个难题,我们将拭目以待.

6 数学名言

数学是科学的女皇,数论是数学的女皇.

——高斯

我们知道的,是很少的;我们不知道的,是无限的.

——拉普拉斯

我们必须知道,我们必将知道.

——希尔伯特

数学中没有不可知!

——希尔伯特

科学上没有平坦的大道,真理长河中有无数的礁石险滩.只有不畏攀登的采药者,只有不怕巨浪的弄潮儿,才能登上高峰采得仙草,深入水底觅得骊珠.

——华罗庚

勇攀数学高峰，重建数学大国．

——吴文俊

数学问题是最容易辨别是非的，如果在数学上还不能展开讨论，拉不下脸进行批评，岂不是怪事！

——华罗庚

在几何中没有专为皇上铺设的康庄大道！

——欧几里得

没有大胆的猜想，就做不出伟大的发现．

——牛顿

如果命运是块顽石，我就化作大铁锤，将它砸个粉碎！

——欧拉

数学不但拥有真理，而且也具备至高的美．正像雕刻的美，是一种冷而严肃的美，这种美没有绘画或音乐那样华丽的服饰．数学的美可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有伟大的艺术才能显示的那种完美的境地．

——罗素

假如别人和我一样深刻和持续地思考数学真理，他们会做出同样的发现．

——高斯

最有吸引力的题材，莫过于展望数学的未来，列出新的世纪里数学家应当努力解决的问题．

——闵可夫斯基

最有影响的七部数学名著

在两千多年的世界数学发展史上，大数学家灿若明珠，数学著作浩如海洋，这些著作对世界科学的发展产生了深远的影响，比较起来，现在各国数学家普遍认为下面七部名著对数学的发展影响最大.

(1)《几何原本》，其作者是古希腊亚历山大前期的数学家欧几里得，共 13 卷.《几何原本》开创了用公理方法建立起演绎数学体系的先河，这也是该书的最主要的特色.

(2)《九章算术》; 其作者不详，大约成书于公元前 3 世纪至公元前 1 世纪.它是我国数学方面流传最早的一部重要经典著作，它的出现标志着中国古代数学体系的形成.

(3)《代数学》，其作者为阿拉伯数学家花拉子米，它不但第一次赋予这门学科以名称，而且最先引入“还原(或移项)和取消(或对消)”这两种变换.1859 年，清代数学家李善兰和英国传教士伟烈亚力共同翻译该书，把书名定为《代数学》，“代数”一词就在我国使用至今.

(4)《几何学》，其作者为法国哲学家和数学家笛卡尔，发表于 1637 年.全书共分三卷，它证明了几何问题可归纳为代数形式问题，创立了解析几何学，开辟了数学的新领域.

(5)《自然哲学的数学原理》，其作者为英国伟大的科学家和思想家牛顿，1687 年出版.他创立了对后世科学技术影响深远的微积分学说，微分方程理论.著名科学家杨振宁把这本巨著的出版作为近代科学在欧洲诞生的标志.

(6)《无穷分析引论》，其作者为瑞士数学大师欧拉，1748 年出版.它是一部系统的分析著作，是微积分发展史上的一个里程碑.

(7)《算术研究》，其作者为德国数学家、物理学家、天文学家高斯，1801 年出版.它是代数数论的基石.全书共有七个部分，它把同余理论推向一个新的阶段，发展了二项剩余理论，对二项方程的研究“树立了一盏明灯”.

业余数学家韦达

韦达(1540—1603)是法国数学家,他早年学习法律,曾以律师身份在法国议会里工作,他不是专职数学家,但他非常喜欢在工作之余研究数学,并做出了很多重要贡献,成为那个时代最伟大的数学家.韦达是第一个有意识的和系统的使用字母表示数的人,并且对数学符号进行了很多改进.他在 1591 年所写的《分析术引论》是最早的符号代数著作.是他确定了符号代数的原理与方法,因此,他获得了"代数学之父"之称.他还发现了中学生熟悉的一元二次方程根与系数的关系(即韦达定理),主要著作有《数学典则》、《应用于三角形的数学定律》、《分析法入门》、《论方程的识别与修正》、《分析五章》等.

比利时的数学家罗门曾提出一个 45 次方程的问题向各国数学家挑战.法国国王便把该问题交给了韦达,韦达当时就得出一解,回家后一鼓作气,很快又得出了 22 个解.答案一公布,震惊了整个数学界.韦达又回敬了罗门一个问题,罗门苦思冥想数日方才解出,而韦达却轻而易举地做了出来,为祖国争得了荣誉.

在法国和西班牙的战争中,法国人对于西班牙的军事动态总是了如指掌,在军事上总能先发制人,因而不到两年功夫就打败了西班牙.可怜西班牙的国王对法国人在战争中的"未卜先知"十分恼火又无法理解,认为是法国人使用了"魔法".原来,是韦达利用自己精湛的数学方法成功地破译了西班牙的军事密码,为他的祖国赢得了战争的主动权.另外,韦达还设计并改进了历法.所有这些都体现了韦达作为伟大数学家的深厚功底.

被称为"业余数学之王"的费马(Fermat,1602—1665)也是法国律师,与韦达的情形相似.

失明的数学家欧拉

欧拉(Euler,1707—1783),28岁右眼失明,而后左眼视力衰退,最后完全失明.1771年彼得堡失火,殃及其住宅,紧急关头,为他做家务的一个工人冒着生命危险,冲进火中把欧拉抢救出来,欧拉的书库及大量研究成果全部化为灰烬.沉重的打击没有使欧拉倒下,他发誓要把损失夺回来.欧拉在完全失明之前,抓紧这最后的时刻,在一块大黑板上疾书他发现的公式,然后口述其内容,由他的学生和大儿子A·欧拉笔录.欧拉完全失明之后,仍然以惊人的毅力与黑暗搏斗,凭着记忆和心算进行研究,直到逝世.

欧拉的记忆能力和心算是罕见的,它能够复述青年时代的笔记内容,有一次,他的两个学生分别把一个很复杂的收敛级数的17项加起来,算到第50位数字时,结果相差一个单位.为了确定谁计算得对,欧拉用心算进行了全部运算,最后把错误找了出来.欧拉在失明的17年中,仍以惊人的毅力和坚韧不拔的精神继续工作着,还解决了使牛顿头疼的月离问题和很多复杂的分析问题,在他双目失明至逝世的17年间,还口述了几本著作和400篇左右的论文.

在欧拉的年代,对上帝是绝对不能怀疑的,小欧拉没有与教会、与上帝"保持一致",老师就让他离开学校回家.回家后他就帮助爸爸放羊,他一边放羊,一边读书.

爸爸的羊渐渐增多了,达到了100只.原来的羊圈有点小了,爸爸决定建造一个新的羊圈.他用尺量出了一块长方形的土地,长40米,宽15米,他一算,面积正好是600平方米,平均每头羊占地6平方米.正打算动工的时候,他发现他的材料只够围100米的篱笆,不够用.若要围成长40米,宽15米的羊圈,其周长将是110米.父亲感到很为难,若要按原计划建造,就要再添10米长的材料;要是缩小面积,每头羊的占地面积就会小于6平方米.

小欧拉却向父亲说,他有办法.父亲不相信小欧拉会有办法,没有理他.小欧拉急了,大声说:"只要稍稍移动一下羊圈的桩子就行了."父亲听了直摇头,心想,世界上哪有这样便宜的事情.但是,小欧拉却坚持说:"他一定能两全其美."父亲终于同意让儿子试试看.小欧拉跑到羊圈旁,他让一个木桩不动,移动其余三个木桩,将原来的40米长缩短到25米.父亲着急了,说:"那怎么成呢?这个羊圈太小了."小欧拉也不回答,跑到另一条边上,将原来15米的边增加到

25米.经这样一改,把原来的羊圈变成了边长为25米的正方形.然后,小欧拉很自信地对爸爸说:"现在,篱笆也够了,面积也够了."父亲照着小欧拉设计的羊圈扎上了篱笆,100米长的篱笆真的够了,不多不少,面积也足够了,而且还稍稍大了一些.

父亲感到孩子比自己聪明,将来一定大有出息.他想办法让小欧拉认识了一个大数学家伯努利.通过这位数学家的推荐,1720年,13岁的小欧拉成了巴塞尔大学最年轻的大学生.

欧拉是瑞士数学家及自然科学家,1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔,1783年9月18日于俄国彼得堡逝世.他是历史上最多产的数学家,平均每年写出八百多页的论文,一生发表了831篇(部)论文(著作),数学的各个分支中几乎都有欧拉的名字,并且他还是很多分支的奠基人.1735年,欧拉右眼失明;1766年,又转成双目失明,但他以惊人的毅力,用口述由别人记录的方式工作了近17年(期间还解决了很多的世界难题),直到去世.所以欧拉被誉为"数学家之英雄".1909年,瑞士自然科学会开始出版欧拉全集,使他卷帙浩繁的著作得以流芳百世,至今已出版七十卷.

笔者是一名高中数学教师,并且爱好初等数学研究,也取得了一些成绩.笔者最敬佩的数学家就是欧拉.

参考文献

[1] 李想,谢思.科学家的故事[M].呼和浩特:远方出版社,2005.

[2] 人民教育出版社中学数学室. 全日制普通高级中学教科书(必修)《数学·第一册(上)》[M].北京:人民教育出版社,2006.

成绩不佳的数学大师

埃尔米特(Charies Hermite,1822—1901)是19世纪最伟大的代数几何学家,因数学考不好,大学入学考试重考了五次,大学几乎毕不了业,毕业后考不上任何研究所.不过,这无法改变他的伟大:最先提出“共厄矩阵”,最先解出“五次方程式的通解”,第一个证明“自然对数的超越性质”,埃尔米特在49岁时巴黎大学才请他去担任教授.此后的25年,几乎整个法国的大数学家都出自他的门下.

数学王子高斯

德国著名科学家高斯(1777—1855)出生在一个贫穷的家庭，长大后他成为英国皇家学会会员，成为当时最杰出的数学家、物理学家和天文学家，人们称他为“数学王子”.

幼年时，高斯就在数学方面显示出了非凡的才华.3岁就能纠正父亲计算中的错误，10岁发现了算术级数的求和公式，11岁发现了二项式定理.少年高斯的聪颖早慧，得到了很有名望的布瑞克公爵的垂青与资助，使他得以不断深造.

19岁的高斯在进大学不久，就发明了只用圆规和直尺作出正十七边形的方法，解决了两千年来悬而未决的几何难题.

1796年的一天，德国哥廷根大学，一个19岁的很有数学天赋的青年吃完晚饭，开始做导师单独布置给他的每天例行的三道数学题.

像往常一样，前两道题目在两个小时内顺利完成了.第三道题写在一张小纸条上，是要求只用圆规和一把没有刻度的直尺作出正十七边形.青年作着作着，感到越来越吃力.

困难激起了青年的斗志：我一定要把它作出来！他拿起圆规和直尺，在纸上画着，尝试着用一些超常规的思路去解这道题.终于，当窗口露出一丝曙光时，青年长舒了一口气，他终于作出了这道难题！

作业交给导师后，导师当即惊呆了.他用颤抖的声音对青年说：“这真是你作出来的？你知不知道你解开了有两千多年历史的数学悬案！阿基米得没有解出来，牛顿也没解出来，你竟然一个晚上就解出来了！你真是天才！我最近正在研究这道难题，昨晚给你布置题目时，不小心把写有这个题目的小纸条夹在了给你的题目里.”

多年以后，这个青年回忆起这一幕时，总是说：“如果有人告诉我，这是一道有两千多年历史的数学难题，我不可能在一个晚上解决它.”

这个青年就是数学王子高斯.

有些事情，在不清楚它到底有多难时，我们往往能够做得更好，这就是人们常说的无知者无畏.

1801年，高斯出版的著作《算术研究》阐述了数论和高等代数的某些问题.

他30岁时担任了德国著名学府天文台台长,并一直在天文台工作到逝世.

高斯去世后,人们在他出生的城市竖起了雕像.为了纪念他发现的作出正十七边形的方法,人们将他的雕像的底座修成正十七边形.世人公认他是一位和牛顿、阿基米得、欧拉齐名的数学家.

高斯8岁时进入乡村小学读书.教数学的老师是从城里来的,觉得在一个穷乡僻壤教几个小猢狲,真是大材小用.他认为穷人的孩子天生都是笨蛋,教这些蠢笨的孩子念书不必认真,有机会还要处罚他们,使自己在这枯燥的生活里添一些乐趣.

这一天数学老师情绪低落,同学们看到老师抑郁的脸孔,心里畏缩起来,知道老师又会在今天捉几个学生处罚.

"你们今天替我算从1加2加3一直到100的和,谁算不出来就罚他不能回家吃午饭."老师讲了这句话后就一言不发地拿起一本小说坐到椅子上看去了.

教室里的小朋友们拿起石板开始计算:"1加2等于3,3加3等于6,6加4等于10……"一些小朋友加到一个数后就擦掉石板上的结果,再加下去,数越来越大,很不好算.有些孩子的小脸涨红了,手心、额上渗出了汗.

还不到半个小时,小高斯拿起了他的石板走上前去."老师,答案是不是这样?"

老师头也不抬,挥着肥厚的手说:"去,回去再算,错了."他想不可能这么快就有答案了.

可是高斯却站着不动,把石板伸向老师面前:"老师,我想这个答案是对的."

数学老师本来想怒吼起来,可是一看石板上整整齐齐写了这样的数:5 050.他惊奇起来,因为他自己曾经算过,得到的数也是5 050,这个8岁的小鬼怎么这么快就得到了这个数值呢?

高斯解释他发现的一个方法,就是古希腊人和中国人用来计算 $1+2+3+\cdots+n$ 的方法.

高斯的发现使老师觉得羞愧,觉得自己以前目空一切和轻视穷人家的孩子的观点是不对的.他以后也认真教起书来,并且还常从城里买些数学书自己进修并借给高斯看,在他的鼓励下,高斯在数学上作出了一些重要的研究.

科学家的另一面

18世纪初,在俄国的乡间,有一个很笨的孩子.他看见数学老师在举例做四则运算题时最后的结果是零,便以为所有四则运算题的结果都是零,所以后来他一遇到四则运算题便毫不考虑地把结果写为零.老师对这个孩子除了摇头叹息之外,毫无办法.

这个笨孩子就是后来写出了《叶甫盖尼·奥涅金》、《上尉的女儿》等世界名著的俄国诗人普希金.

20世纪中期,北京王府井大街的百货商店来了一个年轻人,他要营业员找回少找给他的一毛钱.当营业员和他核算了好一阵子,终于确认是少找了一毛钱时,他得到了那一毛钱.营业员觉得这人不可思议,不就是一毛钱吗? 值得这么认真? 后来知道它是老远从中科院宿舍坐了好几毛钱公共汽车来要这一毛钱时,更是笑坏了:“这不是大傻瓜吗?”

他就是把“哥德巴赫猜想”这道著名的世界难题推进到国际领先水平的中科院数学家陈景润.

杨振宁青年时期喜爱物理,而且想成为一名实验物理学家.1943年杨振宁赴美留学时,就立志要写一篇实验物理论文.

然而,在实验室工作的近20个月中,杨振宁的物理实验进行得非常不顺利,做实验时常常发生爆炸,以至于当时实验室里流传着这样一句笑话:哪里有爆炸,哪里就有杨振宁.此时,杨振宁不得不痛苦的承认,自己的动手能力比别人差!

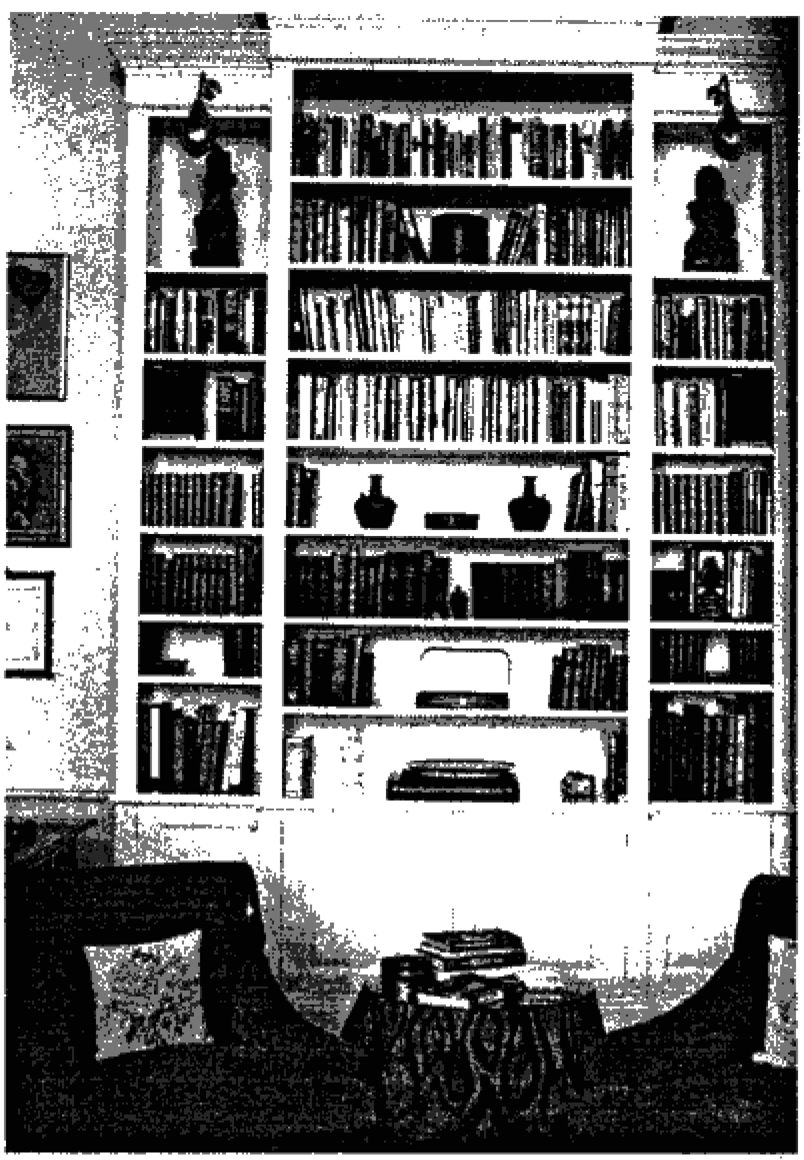
一天,一直关注着杨振宁、被誉为美国氢弹之父的泰勒博士直率地对杨振宁说:“我认为你不必坚持一定要写一篇实验论文,你已经写了一篇理论论文,我建议你把它充实一下作为博士论文,我可以做你的导师.”杨振宁听了泰勒的话,心情十分复杂.一方面,他从心底深处感到自己做实验确实力不从心;另一方面,他又不甘服输,非常希望通过写一篇实验论文来弥补自己实验能力的不足.

杨振宁认真思考了两天.他想起在厦门上小学时的一件事:有一次上手工课,杨振宁兴致勃勃地捏了一只鸡,拿回家给爸爸妈妈看,爸妈看了笑着说:“很好,很好,是一段藕吧?”往事一件接一件地在他的脑海浮现,他不得不承认,自

己的动手能力实在不强．杨振宁接受了导师的建议，放弃写实验论文．从此，他毅然把主攻方向转至理论物理研究，终于在1957年10月与李政道先生联合摘取了该年的诺贝尔物理学奖．放弃有时候是十分困难的，甚至是十分痛苦的．适时地放弃，不仅需要勇气和胆识，更需要远见和智慧．人生之树，只有舍弃空想与浮华，才能撷取丰硕甜美的果实．

造物主很公平，给你一长必给你一短，给你一特别之长必给你一特别之短．所以，作为领导者，对下级、同行之间都不应当渴求的太多，而应当多看看他们的长处．当然，我们每个人也应当扬长避短，如果发现此路不通，绝不可一条路走到黑，牛顿在后半生研究神学，因方向不对而未获成功．一个人，向这头发展可能正是你的长处，而向那头发展，可能恰好是你的短处．所以，我们应当注意适时调整自己的研究方向，当然，正确的方向一旦确定下来之后，也不可朝三暮四，随便改变方向，否则，也难以取得成功．

趣味数学



钟表上时针、分针、秒针所夹的角度

图 1 所示的是常见的钟表表盘. OA, OB, OC 分别表示时针, 分针, 秒针, 它们都绕点 O 顺时针匀速旋转. 时针 OA 每 12 小时旋转 1 周, 即每小时旋转 30°; 分针每 60 分钟旋转 1 周, 即每分钟旋转 6°; 秒针每 60 秒旋转 1 周, 即每秒钟旋转 6°.

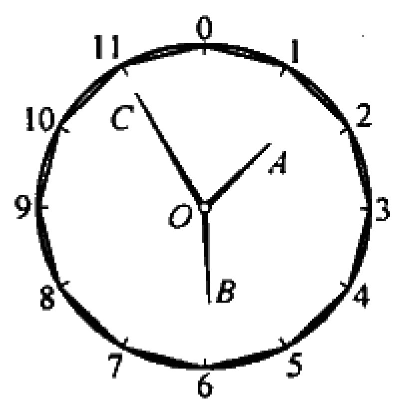


图 1

某一时刻可以表示成 a 时 b 分 c 秒($a = 0,1,2,\cdots,11$; $b = 0,1,2,\cdots,59$; $c \in \mathbf{R}, 0 \leqslant c < 60$), 也可以表示成 t 时($t \in \mathbf{R}, 0 \leqslant t < 12$), 下文中的字母 a, b, c, t 均有些限定. 它们之间有以下换算关系.

定理 1 若 a 时 b 分 c 秒就是 t 时, 则

(1) $t = a + \frac{1}{60}b + \frac{1}{3\,600}c$;

(2) $a = [t]$, $b = [60\{t\}]$, $c = 60\{60\{t\}\}$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $\{x\} = x - [x]$, 这里 $x \in \mathbf{R}$.)

证明 (1) 是显然的.

(2) 用(1) 来证.

因为 $b \leqslant 59$, $c < 60$, 所以 $\frac{1}{60}b + \frac{1}{3\,600}c < 1$.

在(1) 两边取整, 得 $a = [t]$.

又由(1) 可得 $\frac{1}{60}b + \frac{1}{3\,600}c = \{t\}$, $b + \frac{1}{60}c = 60\{t\}$, 所以 $b = [60\{t\}]$.

进而又得 $c = 60\{60\{t\}\}$.

本文研究任意时刻钟表上时针、分针、秒针所夹的角度.

应当指明的是, 本文研究的时针、分针、秒针所夹的角度都是在 $[0°, 180°]$ 范围内: 比如 0 点时, 时针与分针所夹的角度是 0°; 6 点时, 时针与分针所夹的角度是 180°; 3 点时, 时针与分针所夹的角度是 90°, 而不是 270°.

本文用 $\alpha(a,b,c)$, $\beta(a,b,c)$, $\gamma(a,b,c)$ 分别表示 a 时 b 分 c 秒钟表上时针与分针, 分针与秒针, 时针与秒针所夹的角度; 用 $\overline{\alpha}(t)$, $\overline{\beta}(t)$, $\overline{\gamma}(t)$ 分别表示 t 时钟表上时针与分针, 分针与秒针, 时针与秒针所夹的角度.

定理 2 (1)$\alpha(a,b,c)=180^\circ-|180^\circ-|30a-\frac{11}{2}(b+\frac{1}{60}c)|^\circ|$;

(2)$\beta(a,b,c)=180^\circ-|180^\circ-|6b-5.9c|^\circ|$;

(3)$\gamma(a,b,c)=180^\circ-|180^\circ-|30a+\frac{1}{2}b-5\frac{119}{120}c|^\circ|$

证明 如图 1,设 a 时 b 分 c 秒时,时针在 OA 的位置,分针在 OB 的位置.

图 1 中,射线 OI 指在点 O,时针从 OI 顺时针旋转到 OA 旋转的角度 $\alpha_1=(a+\frac{1}{60}b+\frac{1}{3\,600}c)\cdot 30^\circ$,分针从 OI 顺时针旋转到 OB 旋转的角度是 $\alpha_2=(b+\frac{1}{60}c)\cdot 6^\circ$,所以

$$|\alpha_1-\alpha_2|=|30a-\frac{11}{2}(b+\frac{1}{60}c)|^\circ$$

又设 $u=|\alpha_1-\alpha_2|$ 读者可以理解以下内容:

若 $u\in[0^\circ,180^\circ]$,则 $\alpha(a,b,c)=u$;若 $u\in(180^\circ,360^\circ)$,则 $\alpha(a,b,c)=360^\circ-u$.从而得:恒有 $\alpha(a,b,c)=180^\circ-|180^\circ-u|$,进而可得结论(1)成立.

(2),(3) 可类似证明.

定理 3 (1)$\overline{\alpha}(t)=180^\circ-30^\circ|6-|t-12\{t\}||$;

(2)$\overline{\beta}(t)=180^\circ-180^\circ|1-2|\{t\}-\{60\{t\}\}||$.

证明 设 t 时就是 a 时 b 分 c 秒,由定理 1,2 可证得定理 3 成立.

定理 4 $\overline{\alpha}(t)=\theta^\circ(0\leqslant\theta\leqslant 180)\Leftrightarrow t=\frac{12}{11}e\pm\frac{1}{330}\theta$($e$ 是不大于 11 的自然数,且 e 还要使 $\theta\leqslant t<12$.)

证明 $\Rightarrow$ 设 t 时就是 a 时 b 分 c 秒,得 $\alpha(a,b,c)=\theta^\circ$.由定理 2(1),得 $180-|180-|30a-\frac{11}{2}(b+\frac{1}{60}c)||=\theta$,所以 $30a-\frac{11}{2}(b+\frac{1}{60}c)=\theta,-\theta,360-\theta,\theta-360$.

(1) 当 $30a-\frac{11}{2}(b+\frac{1}{60}c)=\theta$ 时,可得 $t=a+\frac{1}{60}(b+\frac{1}{60}c)=\frac{12}{11}a-\frac{1}{330}\theta$.

(2) 当 $30a-\frac{11}{2}(b+\frac{1}{60}c)=-\theta$ 时,可得 $t=\frac{12}{11}a+\frac{1}{330}\theta$.

(3) 当 $30a-\frac{11}{2}(b+\frac{1}{60}c)=360-\theta$ 时,可得 $t=\frac{12}{11}(a-1)+\frac{1}{330}\theta$.若 $a=0$,得 $t<0$,与 $t\geqslant 0$ 矛盾!所以 $a\geqslant 1,a-1\geqslant 0$.

(4) 当 $30a-\frac{11}{2}(b+\frac{1}{60}c)=\theta-360$ 时,可得 $t=\frac{12}{11}(a+1)-\frac{1}{330}\theta$.若 $a=11$,得 $t>12$,与 $t<12$ 矛盾!所以 $a\leqslant 10,a+1\leqslant 11$.

进而可得要证结论成立.

$\Leftarrow$由 $t = \frac{12}{11}e \pm \frac{1}{330}\theta = e + \frac{1}{330}(30e \pm \theta)$，得

$$-180 = 30 \times 0 - 180 \leqslant 30e \pm \theta \leqslant 30 \times 11 + 180 = 510$$

所以 $-\frac{6}{11} \leqslant \frac{1}{330}(30e \pm \theta) \leqslant 1\frac{6}{11}$，所以$[t] = e, e \pm 1$.

(1) 当$[t] = e$时，$\{t\} = \frac{1}{330}(30e \pm \theta)$，由定理3中(1)可证得$\overline{\alpha}(t) = \theta°$.

(2) 当$[t] = e + 1$时，$\{t\} = \frac{1}{330}(30e \pm \theta) - 1$.因为$\{t\} \geqslant 0$，所以可得 $t = \frac{12}{11}e + \frac{1}{330}\theta$，也可证得$\overline{\alpha}(t) = \theta°$.

(3) 当$[t] = e - 1$时，$\{t\} = \frac{1}{330}(30e \pm \theta) + 1$.因为$\{t\} < 1$，所以可得 $t = \frac{12}{11}e - \frac{1}{330}\theta$，$\{t\} = \frac{1}{330}(30e - \theta) + 1$，也可证得$\overline{\alpha}(t) = \theta°$.

推论 (1)$\overline{\alpha}(t) = 0° \Leftrightarrow t = \frac{12}{11}e (e = 0,1,2,\cdots,10)$；

(2)$\overline{\alpha}(t) = 180° \Leftrightarrow t = \frac{6}{11}(2e + 1)(e = 0,1,2,\cdots,10)$；

(3)$\overline{\alpha}(t) = 90° \Leftrightarrow t = \frac{3}{11}(2e + 1)(e = 0,1,2,\cdots,21)$.

例 晚上7点到8点之间的什么时刻(精确到分)时针与分针所夹的角度是0°?

解 设晚上t时($7 \leqslant t \leqslant 8$)，时针与分针所夹的角度是0°，由推论(1)，得 $t = \frac{12}{11}e (e = 0,1,2,\cdots,10)$，且$7 \leqslant t \leqslant 8$，可得 $t = 7\frac{7}{11}$.

从而可得，晚上7点38分时，时针与分针所夹的角度是0°(7点38分是精确到分的时间).读者是否注意到：这个时间正好是中国中央电视台第一套节目“焦点访谈”播出的时间.

谈多边形的剪拼

把一个平面图形沿某些直线剪有限次,若剪得的几块图形能不重复地拼成另一个平面图形,则按照同样的剪法,也可把第二个平面图形拼成第一个平面图形.这时,称这两个平面图形可以互相剪拼.

显然,两个平面图形若能互相剪拼,则它们的面积相等.但面积相等的两个平面图形不一定能互相剪拼,比如,不能把一个圆剪拼成与它面积相等的正方形.

下面介绍匈牙利数学家包利阿伊得到的关于多边形剪拼的完整结论.

定理 两个面积相等的多边形可以互相剪拼.

为证明定理,先给出三个引理.

引理 1 如图 1,$S_{矩形ABCD} = S_{矩形BEFG}$,A,B,G 共线,C,B,E 共线,则 $AE \parallel DF \parallel CG$.

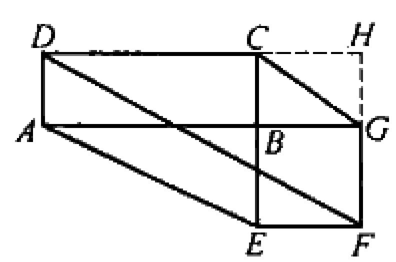


图 1

证 延长 DC 与 FG,它们交于点 H,可得矩形 $CBGH$.因为

$$S_{矩形ABCD} = S_{矩形BEFG}$$

所以
$$\frac{AB}{BG} = \frac{BE}{BC}$$

所以
$$AE \parallel CG$$

因为
$$\frac{AB}{BG} = \frac{BE}{BC}$$

所以
$$\frac{DC}{CH} = \frac{FG}{GH}$$

所以
$$DF \parallel CG$$

所以
$$AE \parallel DF \parallel CG$$

引理 2 两个面积相等的矩形可以互相剪拼.

证 如图 2,设 $S_{矩形ABCD} = S_{矩形BEFG}$,A,B,G 共线,C,B,E 共线,$PBQ \parallel DF$,$SM \parallel DA$,$NT \parallel BG$.

由引理 1,有 $\square ADNE$,$\square AMFE$,所以 $AD = EN$,$AM = EF$,所以 $\triangle DAM \cong \triangle NEF$,同理也有 $\triangle PBC \cong \triangle BQG$.

也可证 $\triangle MBS \cong \triangle NTB$,四边形 $DMSP \cong$ 四边形 $NFQT$.

所以用图 2 的方法,可使矩形 $ABCD$ 与矩形 $BEFG$ 互相剪拼.

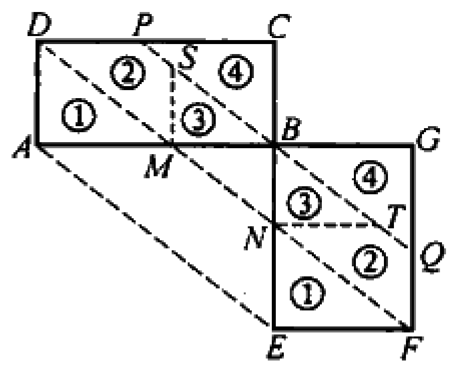


图 2

引理 3 任意三角形可以剪拼成一个矩形.

由图 3 可证.

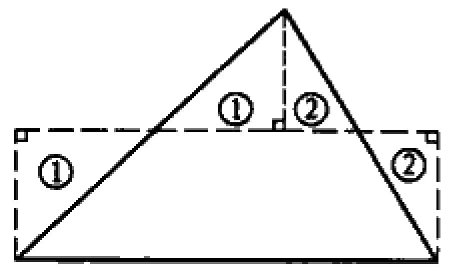


图 3

定理的证明 设 n 边形与 m 边形的面积相等,可按以下步骤把 n 边形剪拼成 m 边形.

第一步,把 n 边形剪成一些三角形(比如按经过一个顶点的 $(n-3)$ 条对角线剪成 $(n-2)$ 个三角形).

第二步,按引理 3 的方法,把这些三角形都剪拼成矩形.

第三步,按引理 2 的方法,把这些矩形都剪拼成一边相等的矩形,再把这些有一边相等的矩形拼成一个新矩形.

第四步,把得到的新矩形剪拼成需要的 m 边形.

因为按照前三步,可把 m 边形剪拼成第三步的"新矩形",所以可把"新矩形"剪拼成 m 边形.

由定理的证明,还可得下面更广的结论:

有限个多边形拼成的平面图形可以剪拼成另一个任意的与它面积相等的由有限个多边形拼成的平面图形.

上面只从理论上提供了剪拼的方法,但在实际剪拼时会遇到某些困难.这是因为限于尺规作图时有些线段不能作出,譬如,不能用尺规作图得到正七边形,所以实际上不能把一个正方形剪拼成与它面积相等的正七边形.

例 试把一个正方形剪拼成三个一样大的正方形.

解 设已知正方形的边长是 3,按图 4 的方法,可把它剪拼成 $3\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ 的矩形,再把这样的矩形剪成三个 $\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ 的正方形.共剪 5 刀,把原正方形剪成了 8 块.

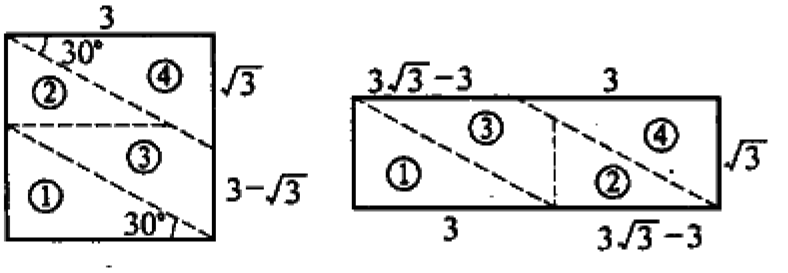


图 4

神奇的指数效应

指数函数不仅在数学、物理学、天文学上有极其广泛的应用,而且在实际生活中也有神奇的效应,请看下面两个小故事.

1 有趣的遗嘱

科学史上著名的"费城实验"是由美国著名科学家、政治家本杰明·富兰克林(Benjamin Franklin,1706—1790)带着他的儿子进行的,从而证明了闪电就是电.

富兰克林早年从事报业活动,1731年在费城建立北美第一个巡回图书馆,1743年组织美洲哲学会,后协助创办宾夕法尼亚大学.独立战争时参加反英斗争,当选第二届大陆会议代表,并参加起草《独立宣言》.1776 ~ 1785年出使法国,缔结法美同盟(1778年).又代表美国与英国谈判,1783年签订《巴黎和约》,英正式承认美独立.1887年为制宪会议代表,主张废除奴隶制度.在科学上发明了避雷针,为研究大气电方面作出了贡献.

富兰克林一生为科学和民主革命而工作,他死后留下的财产并不可观,大致只有一千英镑,令人惊讶的是,他竟留下了一份分配几百万英镑财产的遗嘱!这份有趣遗嘱是这样写的:

"…… 一千英镑赠给波士顿的居民,如果他们接受了这一千英镑,那么这笔钱应该托付给由选举出来的公民组成的基金会,基金会得把这笔钱按每年5% 的利率借给一些年轻的手工业者去生息,这笔钱过了100年增加到131 000英镑.我希望,那时候用100 000英镑来建立一所公共建筑物,剩下的31 000英镑拿去继续生息100年.在第二个100年末了,这笔款增加到4 061 000英镑,其中1 061 000英镑还是由波士顿的基金会支配,而其余的3 000 000英镑让马萨诸州组成同样的基金会来管理.过此之后,我可不敢多作主张了!"

富兰克林卒于1790年,现在200多年过去了,人们不禁要问,作为科学家和政治家的富兰克林,留下区区的1000英镑,竟立下百万富翁般的遗嘱,这不是

开玩笑吧?让我们按照富兰克林非凡的设想实际计算一下,请看下表:

时间	记号	遗产数(英镑)
第1年始	a_0	1 000
第1年末	a_1	$a_0(1+5\%)$
第2年末	a_2	$a_0(1+5\%)^2$
⋮	⋮	⋮
第100年末	a_{100}	$a_0(1+5\%)^{100}$
⋮	⋮	⋮
第 n 年末	a_n	$a_0(1+5\%)^n$

从而得到指数函数

$$b_n = \frac{a_n}{a_0} = (1+5\%)^n (n \in \mathbf{N}^*)$$

让我们观察指数函数中 $b_n = 1.05^n$ 值的变化,用计算器可算得

$$b_1 = 1.05, b_2 = 1.102\ 5, b_3 = 1.157\ 625, \cdots, b_{100} = 131.501\ 257\ 9$$

这意味着,上面的遗嘱中,在头一个100年末富兰克林的财产应当增加到

$$a_{100} = 1\ 000 \times 1.05^{100} = 131\ 501.257\ 9(\text{英镑})$$

这比富兰克林遗嘱中写的还多出501.257 9英镑哩!在第二个100年末,他拥有的财产就更多了,为

$$a_{200} = 31\ 501.257\ 9 \times 1.05^{100} = 4\ 142\ 455.038(\text{英镑})$$

可见富兰克林的遗嘱在科学上是站得住脚的!

微薄的资金,合理的利率,在神奇的指数效应下,可以变得令人瞠目结舌,这就是富兰克林出色的遗嘱给人的启示!历史上由于没有意识到这一点而吃了亏的还有大名鼎鼎的拿破仑.

2 难以兑现的"许诺"

拿破仑·波拿巴(Napoleon Bonaparte,1769—1821),军事家、统帅,生于科西嘉岛,法国大革命时期参加革命军,由于作战勇敢,指挥出色,由士兵升为准将、少将,直至元帅.1804年加冕皇帝,建立法兰西第一帝国,他对外穷兵黩武,终于滑铁卢战役惨败,流放于圣赫勒拿岛,后病死于该岛.

拿破仑还算得上是一位与数学有缘分的人,几何学上的一个定理是他发现并证明的,这条定理是:若在任意三角形的各边向外作等边三角形,则它们的外接圆圆心也构成一个等边三角形.

然而,这位显赫的将军,却在无意识中陷进了指数效应的旋涡!也许这只是一个笑话:公元1797年,当拿破仑参观国立卢森堡小学的时候,赠上了一束价值三个金路易(一个金路易相当于20法郎)的玫瑰花,并不假思索地许诺说:"只要法兰西共和国存在一天,我将每年送一束价值相等的玫瑰花,以作两国友谊的象征."此后,由于连年的征战,拿破仑忘却了这一诺言!据上海金融报报道,公元1984年,相隔187年后,这件相隔近两个世纪的逸事给法国带来了麻烦,卢森堡王国郑重向法兰西共和国提出了"玫瑰花悬案".要求法国政府在拿破仑的声誉和巨额的债款中,二者选取其一.这笔高额巨款,就是60法郎的本金,以5%的年利率,在187年的指数效应下的产物.这一历史公案使法国政府陷入极为难堪的局面!

当你看到这篇文章时,这笔债款该是多少呢?不妨用计算器算一算.

趣谈无理数 e

有一个关于高利贷的故事：商人向财主借钱，条件是每借 1 元到一年时归还 2 元，即年利率为 100%．财主想如果每半年结一次账，利息岂不更多？因为半年的利率是 50%，即借 1 元到半年时还 1.5 元，又把 1.5 元作为本金借给商人，再过半年，即到了年底，又收利益 $1.5\times50\%=0.75$(元)．这样，一年利息是 1.25 元，比原来的 1 元利息多了 0.25 元．半年结算一次，即一年结算两次，用算式表示，1 元钱到一年时归还 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$(元)．

财主马上又想，如果一年结算 3 次，4 次，…，365 次，甚至随时结算，它不发了大财，他便让账房先生算一算，究竟能发多大的财．

结算 3 次，利率为 $\frac{1}{3}$，1 元钱到一年时归还 $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=2.370\ 37\cdots$(元)．

结算 5 次，利率为 $\frac{1}{5}$，1 元钱到一年时归还 $\left(1+\frac{1}{5}\right)^5=2.488\ 32\cdots$(元)．

结算 10 次，利率为 $\frac{1}{10}$，1 元钱到一年时归还 $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}=2.593\ 74\cdots$(元)．

结算 1 000 次，利率为 $\frac{1}{1\ 000}$，1 元钱到一年时归还 $\left(1+\frac{1}{1\ 000}\right)^{1\ 000}=2.716\ 92\cdots$(元)．

结算 10 000 次，利率为 $\frac{1}{10\ 000}$，1 元钱到一年时归还 $\left(1+\frac{1}{10\ 000}\right)^{10\ 000}=2.718\ 1\cdots$(元)．

结果使财主颇为失望：尽管结算次数越多利息也越多，但增长得并不快，不论结算多少次，需归还的钱总不能突破一个上限，数学家欧拉给这个上限一个专门的名称 e：$e=2.718\ 28\cdots$

e 和 π 是近亲，都是无理数，同时也是数学中的两个重要常量，它们之间还有一个奇妙的关系：$e^{i\pi}=-1$，其中 i 叫虚数单位，$i^2=-1$．

这个等式可从著名的欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 当 $\theta=\pi$ 时得到．

e 比 π 好算得多，利用微积分知识可知

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

所以 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$,其中 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$,只要算到 $n = 6$,便得 $e \approx 2.718$,精确到万分之二.而利用 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e(n \to +\infty)$ 要算到 $n = 5\,000$ 才得到 $e \approx 2.718$.

指数函数 $y = e^x$ 是数学中一个十分重要的函数,它不仅在数学、物理、天文上应用极广,而且在其他自然科学甚至社会科学上也大有用处.

我们知道,大气压强与离海平面的高度有关,离海平面越高,大气压强越小、大气压强 y 毫米汞柱与离海平面高度 x 米有以下关系

$$y = ce^{kx}$$

这里 c, k 都是常量.

放牛的孩子可以拉住一头牛,怎么拉?放牛的孩子只要把绳子在一棵大树上绕三圈,用手轻轻地拉着绳子,就能把一头牛拉住.这是因为绳子和树之间的摩擦力帮了孩子的忙.摩擦力有多大呢?设牛的拉力是 F,摩擦力的计算公式是

$$N = F(1 - e^{-\mu\theta})$$

这里 μ 是摩擦系数,θ 是绳子在树上的缠绕角度(弧度数).按此公式又得孩子要用的力是

$$F - N = Fe^{-\mu\theta}$$

树皮粗糙,摩擦系数比较大,即使 $\mu = 0.3$,绕上3圈,$e^{-0.3\times6\pi} \approx \frac{1}{285}$,即牛若使出了300千克力来拉,小孩只要用1千克力多的力气来拉就能拉住它,这是轻而易举的事.

对数函数 $y = \ln x$ 中,$\ln x$ 是以 e 为底的对数,也叫自然对数,它与 $y = e^x$ 互为反函数.$y = \ln x$ 也是数学中的一个重要函数.

研究生物种群的增减,估计放射性元素的蜕变,机械振动、化学变化、电磁现象等,到处会遇到常数“e”.

参考文献

[1] 张文忠.中学数学中的趣题[M].西安:陕西科学技术出版社,1989:259-262.

服饰商的难题

《200个趣味数学故事》(芮嘉诰译,1994年湖南科学技术出版社)一书的作者亨利·E·杜登民是英国人,在西方被誉为近代趣味数学的开山祖之一,其作品在各国广为流传,本文介绍该书第26个故事——服饰商的难题.

一服饰商拿出一块等边三角形式样的布料并说:

“你们当中有什么人,能裁开这块材料达到我的要求吗?我发誓,没有.每人擅长自己的某种工作,学者可以向小市民学习,贤者可以向愚人学习.请向我指出,怎样将这块布料裁为四块,以便将它们拼成一个正方形?”

最有文化的一些同伴也充其量能将它分为五块,但不能做到分为四块.当时他们敦促服饰商,要他拿出正确的答案.支吾搪塞很久之后,他承认不会解这个问题,不论是分成几块.

“向圣·弗朗西斯起誓”他说,“我想,每个骗子可以想出难题,而这些难题对于会解的人是好的.”

他说了这些话才勉强逃避了一顿痛打,但这个怪题经我思索,对于四块的情形问题是可解的,不需将某些部分翻边,解这个题目很不简单,但我想,读者会发现它是很有趣的.

(笔者注:这里的“裁”是指沿直线裁,所以“裁成四块”是指裁成四个多边形.)

答案 如图1,设D,E分别是等边$\triangle ABC$的边AB,BC的中点,延长AE到F,使$EF=EB$.

以AF为直径作半圆AHF,延长EB交该半圆于H.

则EH就是所求正方形的边长(因为$S_{正方形}=EH^2=EA\cdot EF=EA\cdot\frac{1}{2}BC=S_{\triangle ABC}$).

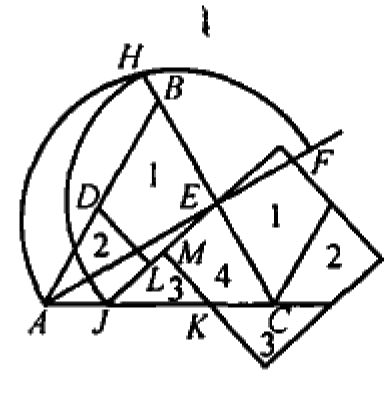


图1

以E为圆心,EH为半径作弧交AC于J,在JC上取$JK=BE$.过D;K作EJ的垂线,垂足分别为L,M.从而可作出图1,把正三角形裁成四块1,2,3,4后拼成正方形.

我们再补充图 2，把这个问题以更有趣和适当的简单形式表示出来，即制成一个模型，它的各部分可以用红木制成，以青铜铰链来铰接，展开来形成一串，把它往一个方向卷，则得到正三角形，往另一个方向卷，则得到正方形.

任意两个面积相等的多边形都可以互相剪拼，剪拼的方法见笔者发表于《数学通讯》1997年第 9 期的文章《多边形的剪拼》.

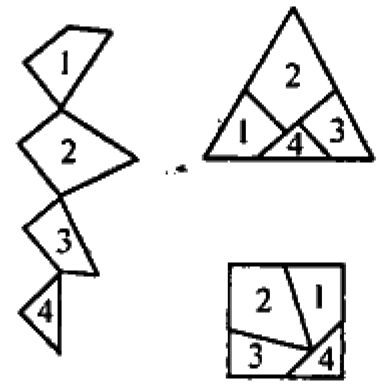


图 2

“摸球赢钱”的把戏

路边有一种叫做“摸球赢钱”的把戏：

一个布袋内装有6个红球和6个白球，除颜色不同外，这些球完全一样．每次从袋中摸出6个球，输赢的规定为：

6个全红时，赢100元；

5红1白时，赢50元；

4红2白时，赢20元；

3红3白时，输100元；

2红4白时，赢20元；

1红5白时，赢50元；

6个全白时，赢100元；

如果你摸出了3红3白，则输100元，而对于其他六种情况，你均能白白赢钱，怎么样？动心了吧！

不懂概率知识的人会以为7种情况有6种能赢钱，所以每次赢的机会为$\frac{6}{7}$，输的机会为$\frac{1}{7}$，摸7次有6次都应该赢，所以总是会赢钱的．

其实上述想法是错误的．这个把戏的骗人之处就在于这7种情况的发生不是等可能的．而且，不同情况下所设的输赢钱数也大有文章．为了揭穿这骗人的把戏，我们须由各种情况出现的概率及相应的钱数，求出赢钱数的数学期望来．7种情况出现的概率如下表所示．

结果	概率	结果	概率
6个全红	$\frac{C_6^6}{C_{12}^6}=\frac{1}{924}$	2红4白	$\frac{C_6^2C_6^4}{C_{12}^6}=\frac{225}{924}$
5红1白	$\frac{C_6^5C_6^1}{C_{12}^6}=\frac{36}{924}$	1红5白	$\frac{C_6^1C_6^5}{C_{12}^6}=\frac{36}{924}$
4红2白	$\frac{C_6^4C_6^2}{C_{12}^6}=\frac{225}{924}$	6个全白	$\frac{C_6^6}{C_{12}^6}=\frac{1}{924}$
3红3白	$\frac{C_6^3C_6^3}{C_{12}^6}=\frac{100}{231}$		

(2) 用 η 表示赢的钱数,其分布列如下表所示.

η	100	50	20	-100
P	$\frac{2}{924}$	$\frac{36\times 2}{924}$	$\frac{225\times 2}{924}$	$\frac{400}{231}$

可以算得,赢钱数的期望 $E\eta\approx -29.44$(元).

由期望的实际意义可知,每摸一次,平均输掉 29.44 元.

认真学好数学,可以防止我们在生活中上当受骗.

π的一些奇异特征

几千年来,没有哪一个数比圆周率π更吸引人了.下面介绍π的一些迷人的特性[1].

先取小数点后5位,即就3.141 59来说,今将小数点去掉,就成了六位数314 159.这是一个质数,而且还是一个逆向质数(即951 413也是质数).如果取314 159的每位数的补数所成的数796 951,它也是一个双向质数(即796 951及159 697都是质数).只就这一点来说,别的数就很难与它相比,何况进一层的特性还有:314 159恰好是三个质数31,41,59连写而成,且这三个质数都是孪生质数(即$n, n+2$都是质数)中的一个.不仅如此,这三个质数的和及它们的立方和,即$31+41+59=131, 31^3+41^3+59^3=304\,091$也都是质数(但5次方和为$23\times 41\times 911\,357$不是质数).

美国的杜格勒比发现$\pi^4+\pi^5\approx e^6$(精确到4位小数),其中$e=2.718\,28\cdots$为自然对数的底.

在剑桥大学1965年的年刊上,有一位名叫欧奈克的作者将π的前七位小数3.141 592 6进行分析后发现:π的前三位小数之和$1+4+1=6$为第一个完全数(若n的正约数之和为$2n$,则n叫完全数),也是前三个连续正整数之和$1+2+3$;前七位小数之和$1+4+1+5+9+2+6=28$为第二个完全数,也是前七个连续正整数之和$1+2+3+4+5+6+7$.并且这是顺序自然数之和$1+2+3+\cdots+n(n\geqslant 2)$与π的前$n$位小数之和相等的仅有的两个数.

π最迷人的性质是美国的M·伽尔德纳在1965年对π的前32位小数所作的分析研究.他将前32位小数作如下划分:

3.141592653589|793238462643383279|50

他指出:在这32位小数中,出现两个26,以第二个26为中心,在它的两侧有三对数79,32,38处在对称的位置上.这里用直杠括出由第一个79到第二个79间的18位数字.而第一个26前五个数字与后五个数字之和50恰好为第二个直杠后的数.第二个26前两位数字与后两位数字之和89,又恰为第一个直杠前的数.这还不算,尤其迷人的是他将26与群论相联系,因为有人预言离散的有限单群的总数也是26(这已在1983年被证实).他还指出:地球上的重力加速度是

32英尺/秒^2,水在华氏32度时结冰,水晶体共有32类,人有32颗牙齿,32个电子可充满原子的第四级轨道,基本粒子中有32种长命粒子,等等.而32正好又是79,32,38这三个数的数码之和,这一来把π的前32位小数说得神奇得不得了.

参考文献

[1]杨中和.奇特的π[J].中学科技,1984(1):17.

有趣的十位数

这里有一道颇为耐人深思的数学题：它要求你寻找一种不含零的十位数，而且要求这个数加上它的数字积后，所得新数的数字积仍然能和原数的数字积相等！

乍一看这简直是不可能的，因为既然又加上了一个数，那么它的数字积怎么可能保持不变呢？

不过这样的数确实是存在的，例如，十位数 1 111 111 613. 你看：其数字积是 18，原数加上 18 后为 1 111 111 631，后者的数字积仍是 18.

我们并不想来玩什么数字游戏，目的是锻炼数学思维，看看怎样才能提高解题能力. 而化难为易则是一个常用的战略. 可以先来求一个不是十位数但又能满足题设的数. 例如，是否存在这样的数，加上它的数字积后，只会改变它各位数字的位置呢？不妨设想这个数的末两位为 13，那么要想变为 31 的话就得加上 18 才行. 但是为了使数字积为 18，还需在 13 的前面添上 6，所以这个数就可以是 613 了，事实上 $613+6\times1\times3=631$，数字积并没有改变. 与此类似的数还有 326，819.

现在要寻找这样的十位数，不妨在它们的左边先添上若干个 1，数字积在乘以 1 时是不变的，例如，$1\ 111\ 111\ 613+18=1\ 111\ 111\ 631$ 就是这样得到的. 你也可以在某数的两侧同时添上一样多个 2 和 5，如 $5\ 555\ 282\ 222+10\times10\times10\times10\times16=5\ 555\ 442\ 222$.

掌握这种思路后，我们不难发现这样有趣的例子还很多，如 1 111 159 121，1 111 954 511，1 111 332 123，1 111 113 148，2 356 478 911，1 111 553 431，1 952 219 522，1 231 451 671，3 355 211 211，5 132 486 791 等都是.

再遇到这类问题时，相信你就不会犯难了. 更重要的是要学会化难为易，从简单的情况入手.

什么能使生活变得圆满?

如果用 $A,B,C,\cdots,Z$ 这26个英文字母分别代表1%,2%,3%,…,26%,那么什么能够使我们的生活达到 100% 的圆满呢?我们能得到一些有趣的结果.

是 MONNY(金钱)吗?不!M + O + N + N + Y = (13 + 15 + 14 + 5 + 25)% = 72%.

是 BE IN LOVE(恋爱)吗?不!B + E + I + N + L + O + V + E = (2 + 5 + 9 + 14 + 12 + 15 + 22 + 5)% = 84%.

是 GOOD LUCK(好运)吗?不!G + O + O + D + L + U + C + K = (7 + 15 + 15 + 12 + 21 + 3 + 11)% = 96%.

是 KNOWLEDGE(知识)吗?不!K + N + O + W + L + E + D + G + E = (11 + 14 + 15 + 23 + 12 + 5 + 4 + 7 + 5)% = 96%.

是 LEADERSHIP(领导能力)吗?不!L + E + A + D + E + R + S + H + I + P = (12 + 5 + 1 + 4 + 5 + 18 + 19 + 8 + 9 + 16)% = 97%.

这些我们通常非常看重的东西,都不是最圆满的.那么,究竟什么能够使得生活变得圆满呢?

是 ATTITUDE(态度),A + T + T + I + T + U + D + E = (1 + 20 + 20 + 9 + 20 + 21 + 4 + 5)% = 100%.

正是我们对待工作、生活的态度能够使我们的生活达到 100% 的圆满!

动物世界中的"数学家"

面对奇迹纷呈的自然界,大多数人往往认为数学只是人类的专利,其实动物界中也存在许多名不见经传的"数学家".

猫和蜘蛛是"几何专家",在寒冷的冬天,猫睡觉时总要把身体抱成一个球形,这样,身体露在冷空气中的表面积最小,因而散发的热量也最少.蜘蛛结的"八卦"网,既复杂又美丽,这种八边形的几何图案,即使木工师傅用直尺和圆规也难画得像蜘蛛网那样匀称.当对这个美丽的结构用数学方法进行分析时,出现在蜘蛛网上的概念真惊人——半径、弦、平行线段、三角形、全等形的对应角、对数螺线、悬链线和超越数.

蚂蚁是"计算专家",英国科学家兴斯顿作过一种有趣的实验,他把一只蚱蜢切成三块,第二块比第一块大一倍,第三块比第二块大一倍,当蚂蚁发现这三块食物的40分钟后,聚集在最小一块蚱蜢的蚂蚁有28只,第二块44只,第三块89只,后一组较前一组差不多多一倍,蚂蚁的计算本领能有这样优秀,令人惊奇!不仅如此,蚂蚁在寻找食物时,总是能够找到通往食物的最短路线.

珊瑚虫是"代数天才",它能在自己身上记下"日历",每年在体壁上刻画出365条环纹,一天"画"一条.古生物学家发现,3亿5千万年前的珊瑚虫每年"画"出400幅水彩画,天文学家告诉我们,当时的地球昼夜只有21.9小时,一年不是365天,而是400天.

蜜蜂蜂房呈六角形,角度也很精确,钝角为109°28′,锐角为70°32′,这样的巢不但节省材料,而且坚固,令人类建筑师惊叹不已!同时,令人惊奇的是,蜜蜂还"知道"两点间的最短距离是一条线段.工蜂在花间随意来去而采集到大量花蜜后,它知道按最短的路线回家.

丹顶鹤总是成群结队的迁飞,而且排成"人"字形,角度也永远是110°,更精确的计算还表明"人"字夹角的一半,即每边与鹤群前进方向的夹角度数总是54°44′8″.

加德纳的数学趣题

加德纳是美国人,生于1914年.他从来没有当过教授,但世界许多一流的数学家都对他敬重有加,他为《科学美国人》杂志每月写一篇"游戏数学"专栏文章,持续了20年之久,他的这些文章和其他著作极为出色地对现代数学的成就作了通俗的介绍,从而把一门被认为枯燥乏味的学科,变成了生气勃勃的艺术.因而,人们赞誉他为"数学的传教士",下面是加德纳给读者的两道数学趣题.

题1 抽屉中杂乱地放着10只红袜子和10只蓝袜子,它们除颜色不同外,其他都一样,室内一片漆黑,而你想取出2只颜色相同的袜子,请问最少要从中抽取几只袜子,才能保证有2只配成颜色相同的一双?

许多人会想:假设取出的第一只是红袜子,我需要取出另一只红袜子和它配对,但取出的第二只可能是蓝袜子,而且下一只,再下一只等等可能都是蓝袜子,直到取出抽屉中全部10只蓝袜子,于是,再下一只肯定是红袜子了,因此答案是12只袜子.

但是,题目中并没有限定是一双红袜子,它只要求取出两只颜色相同的袜子,只需与取出头两只袜子中的某一只配对,因此,正确的答案是3只袜子.

题2 "自行车和苍蝇"是一道极富启迪性的速度趣题.两个男孩各骑一辆自行车,从相距20英里的两个地方沿直线相向骑行,在他们起步的那一瞬间,一辆自行车车把上的一只苍蝇开始向另一辆自行车径直飞去,它一到达另一辆自行车的车把,就立即转向往回飞去,这只苍蝇如此往返于两边自行车的车把之间,直到两辆自行车相遇为止.如果每辆自行车都以每小时10英里的速度匀速前进,苍蝇以每小时15英里的速度匀速飞行,那么苍蝇共飞行了多少英里?

每辆自行车的速度是每小时10英里,1小时后两辆车相遇于20英里的中点,苍蝇飞行的速度是每小时15英里,所以在1小时中共飞行了15英里,事情就这么简单!

许多人试图计算苍蝇在两辆自行车车把之间的第一次路程,然后是往返的路程,并依此类推,算出那些越来越短的路程,但这将涉及所谓无穷级数求和(同学们将在大学里接触到),因而很复杂.

据说,在一次鸡尾酒会上,有人向大名鼎鼎的数学家冯·诺伊曼(号称"电

子计算机之父")提出这个问题.他略加思索便给出了正确答案.提问者沮丧地解释道,绝大多数数学家总是忽略能解决这个问题的简单办法,而去用无穷级数求和的复杂方法.不料,冯·诺伊曼却脸露惊异地说道:"我用的正是无穷级数求和的方法."

笔者注 该文由笔者发表于《中学生学习报·数学周刊(初二版)》2005年3月28日(第39期)第4版的《加德纳的数学趣题》与《少年智力开发报·数学专页(人教版初二)》2005年4月15日(第41期)第2版的《数学的传教士》重新组合修改而成.

10与9的差别不仅仅是1

毕业10年后,大学同班同学聚会,有的成了博士、教授、学者、作家,有的当了处长、局长,有的成了公司老总、外企主管;也有下岗分流的,给私人小老板打工的,甚至赔本欠债的.

当年一个课堂里听讲的学子,如今差别这么大.于是有些人不服气,心理很不平衡:当初毕业的时候,大家学问、本事都差不多,可有的人命好,机遇好,上天;有的人倒霉,背时,入地.这世道太不公平!

有几个人就去请教当年的班主任.老师只是一笑,然后就出了一道题:10-9=?

老师见学生一个个直眉瞪眼,便说,你们会打保龄球吗?打保龄球的规矩是:每局10个球,每个球的得分是从0到10.这10分和9分的差别可不是1分,因为打满分的要加下一个球的得分,如果下一个球也是10分,加上就成了20分.20分与9分的差别是多少?如果每个球都打满分,一局就是300分.当然,300太难,但高手打270,280却是常有的.假如你每个球都差一点,都是9分,一局最多才90分,这270,280与90的差距是多少?

见学生们如同当年听课一样认真,老师继续发挥:排除别的因素不谈,你们当初毕业的时候,差距也就是10分与9分,不大.但是,这以后,有的人继续十分的努力,毫不松懈,10年下来,他得到了多大的成绩!如果你还是9分8分地干,甚至4分5分地混,10年下来你得落下多大距离,可不就是天上地下吗?

学生们一个个如梦初醒.

参考文献

[1] 元明.10-9=?[J].讽刺与幽默,2007(7):17.

幽默风趣的"十字令"

我国的民俗文化经过多年的历史积淀,逐渐演绎出一些妙趣横生的奇特景象.其中形式工整,读来顺口的"十字令"在广大群众中间流传很广,特别是经过一些文人精心雕琢后,更把各个时代的人物形象、社会现象反映得淋漓尽致.

"十字令"一般是指从"一"到"十"共十个数字开头的十句话,结构严谨,内容和谐,且含义通俗易懂,故而其现实意义也能得到完美的体现.

有一则为人们津津乐道的"十字令"谜语:一声不响,二目无光,三餐不食,四肢无力,五官不正,六亲不认,七窍不通,八面威风,久(九)坐不动,十分无用.

谜语大家都清楚 —— 泥塑菩萨.

《红楼梦》第十七回"大观园试才题时额"中作者用此形式为一清客画像:一笔好字,二等才情,三斤酒量,四季衣服,五子围棋,六出昆曲,七字歪诗,八张纸牌,九品头衔,十分和气.

国民党统治时期,重庆一家晚报曾登过这样一首描绘中小学教师困苦生活的"十字令":一身平价布,两袖粉笔灰,三餐吃不饱,四季常皱眉,五更就起床,六堂课要上,七天一星期,八方逛几回,九天不发饷,十家皆断炊.

抗战时期,有人用"十字令"刻画了汉奸的丑恶形象:一副奴才相,两手往下垂,三角眼闪亮,四楞脸堆媚,五官不周正,六神透阴气,七寸长脖子,八两小脑袋,九根黄胡子,十分不像人.

前几年流传了一首描绘赌徒的"十字令":一心赢钱,两眼熬红,三餐无味,四肢乏力,五业荒废,六亲不认,七窍生烟,八方借债,久陷(限)泥潭,十成灾难.

时下反腐倡廉,有人用"十字令"为廉官唱赞歌:一尘不染,两袖清风,三思而行,四方赞誉,五湖四海,六神镇定,七情安然,八路作风,九泉无愧,十分可贵.

又为贪官画像:一身二用,两面三刀,三头六臂,四面楚歌,五斗折腰,六亲不认,七下八上,八面玲珑,九霄难逃,十恶不赦.

两令一褒一贬,立场鲜明,爱憎之情跃然纸上.

对联中的数学演算

将数学演算引入到对联之中,能启迪人们的思维,激发读者的兴趣,特别是那些构思奇巧的数学对联,令人叹为观止.

“北斗七星,水底连天十四点;南楼孤雁,月中带影一双飞.”采用倍数计算,由星空、水底、孤雁、月影构成一幅月夜雁飞图,充满着诗情画意.“双镜悬台,一女梳妆三对面;孤灯挂壁,两人作揖四低头.”将镜中影和灯下影巧制成数学对联.读者自然还会联想起李白的《月下独酌》:“花间一壶酒,独酌无相亲.举杯邀明月,对影成三人.”还有副对联也有同理之妙:“五百罗汉渡江,岸畔波心千佛手;一个美人映月,人间天上两婵娟.”不仅对仗工整,而且情境高雅感人.下面几副数字对联也很有情趣.“七里山塘,行到半塘三里半;九溪蛮洞,经过中洞五溪中.”取其半数,对仗十分工整.“七鸭游湖,数数三双一只;尺蛇出洞,量量九寸十分.”看似数字游戏,其实也显示出撰联者的精妙构思.“万砖千瓦,百匠造成十佛寺;一帆二橹,四人摇过八仙桥.”既有写实意味,又巧将数字排列对偶,组合得天衣无缝.

清朝乾隆皇帝算是“风流天子”,爱吟诗作对,附庸风雅.他 50 岁时,有人撰寿联:“二万里山河,伊古以来未闻一朝一统二万里;五十年圣寿,自今而往尚有九千九百五十年.”这诚然是歌功颂德,拍马吹牛,但后一句却含蕴深邃,50 再加 9 950 岂不是“万岁”!相传乾隆帝在游山玩水时即兴出下联:“八方桥,桥八方,站在八方桥上观八方,八方,八方,八八方.”征上联,应对的难度很大,特别是反复使用数字.只见才子纪晓岚对道:“万岁爷,爷万岁,跪倒万岁爷前呼万岁,万岁,万岁,万万岁.”真是对绝了,歌颂了皇上,讨得了欢心,难怪纪晓岚曾名噪一时.下面是则真实故事:乾隆五十年举行“千叟宴”,有 3 900 多位老人参加,其中最老的一位多大年纪?有副数学对联请你运算:“花甲重逢,还加三七岁月;古稀双庆,更多一度春秋.”众所周知,60 年为一“花甲”,杜甫诗句“人生七十古来稀”,故上联可列算式为 $60\times2+3\times7=141$;下联可列算式为 $70\times2+1=141$.这位老寿星竟有 141 岁.

妙联趣语

1 减字联

相传古时候有户人家，目不识丁，请人写婚联，因招待不周，写联人心中不满，竟为主人写了副丧气联贴在堂上：

流水夕阳千古恨，

春露秋霜百年愁.

新娘是位才女.她下得轿来，进了大门，登上台阶，猛见此联，眉头一皱，计上心来.只见她走上前去，顺手将婚联尾字撕去，就成了：

流水夕阳千古，

春露秋霜百年.

两字一减，“千古”“百年”，喜气洋洋，吉祥如意，妙极了！

2 换字联

1924年5月，孙中山先生在中国共产党和苏联的帮助下，创办黄埔军校.中共派周恩来、叶剑英等人去军校任职，黄埔军校成立前期培养出一大批政治和军事骨干.当时，军校大门上有一副文字通俗、立场鲜明的对联：

升官发财，请走别路；

贪生怕死，莫入此门.

寥寥16个字，恰当地概括了当时军校的性质和使命.1927年蒋介石发动“四·一二”反革命政变后，黄埔军校中的共产党人被迫离去，军校性质起了变化，培养出许多反共反人民的新贵，成了升官发财的“终南捷径”.义愤之余，有人将上述对联巧妙地改动了一下：

升官发财，莫走别路；

贪生怕死，请入此门.

同一副对联，互换两字，联意大变，褒贬立见.

3 藏字联

新中国成立前，某县长平时欺压百姓，鱼肉民众，却恬不知耻称自己是“青

天”,有人义愤之余,送他一副对联以示讥讽:

一二三四五六七,

忠孝仁爱礼义廉.

这是一幅简洁含蓄的藏字联.上联藏“八”字;下联藏“耻”字,“忠孝仁爱礼义廉耻”八个字是当时国民党提倡的所谓道德标准,对联表达了对“忘八无耻”者的讥讽,一针见血地揭穿了这位“青天”的真面目.

4 拆字联

梁启超的长子梁思成是我国建筑界的一代宗师.梁先生讲课时引述了一段趣闻,说金章宗有一天和他的妃子一道散步,两人坐在一个土丘上,金章宗即景出了一句“二人土上坐”的上联,这是一种拆字格的对子,很难对,但那妃子却应声答出“一月日边明”的下联,既说出“日”和“月”组成“明”字,又贴切地点出自己在皇帝身边如月伴日的亲密和祥瑞,实在是难得的妙对.

5 断句联

相传明代书画家祝枝山,在某一年除夕,应邀给一家财主写了一副对联:

明年逢春好不晦气,

终年倒运少有余财.

此联有两种断句法,意思却恰好相反.

明年逢春,好不晦气;

终年倒运,少有余财.

明年逢春好,不晦气;

终年倒运少,有余财.

为这事儿,他们还闹到县衙里去了呢!

用数学眼光看世界(1)

题目1 如图1,屋檐的倾斜度 α 是多少时,雨水在屋顶停留的时间最短?

解 如图1,雨水在屋顶上流下的加速度为 $g\sin\alpha$,

所以 $AC = \frac{1}{2}g\sin\alpha \cdot t^2$,又 $AC = \frac{\frac{1}{2}BC}{\cos\alpha}$,从而得 $t^2 = \frac{2BC}{g\sin 2\alpha}$.

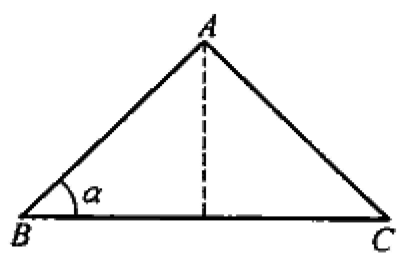


图1

BC 为常量,要使 t 取最小值,则 $\sin 2\alpha$ 取最大值(α 为锐角),得 $\alpha = 45°$.

背景材料 中国民间建筑花样繁多,风格独特,有所谓"卷棚式"、"歇山式"屋顶等.如今在皖南、闽西、鄂西北等地区,保持这种特色的民居为数还不少.设计屋檐斜坡,很重要的一个着眼点便是考虑雨水的流速问题.

题目2 如图2,要在木板$\triangle ABC$内锯出两个矩形木板,怎样锯才算充分利用这块木板?

解 设$\triangle ABC$中底$BC = x$,边 BC 上的高为h,其余线段的长度如图所示,有 $h = a + b + c$.

设 $\triangle ABC$,大矩形,小矩形的面积分别是 S, S_1, S_2,有

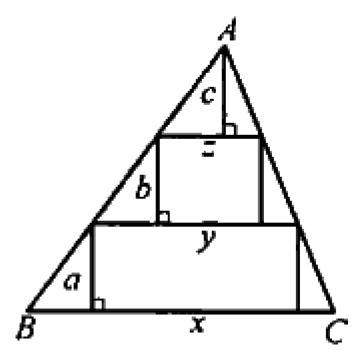


图2

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{ay + bz}{\frac{1}{2}hx}$$

又由三角形相似的性质,可得

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{b + c} = \frac{z}{c}$$

所以
$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2}{h^2}(ab + bc + ca)$$

由柯西不等式,得$(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$(当且仅当 $a = b = c$ 时取等号),所以

$$\frac{1}{2}[(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] \leqslant \frac{1}{3}(a + b + c)^2$$

即　$ab+bc+ac\leqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号)

得　$$\frac{S_1+S_2}{S}\leqslant\frac{2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^2=\frac{2}{3}$$

即　$S_1+S_2\leqslant\frac{2}{3}S$(当且仅当 $a=b=c=\frac{h}{3}$ 时取等号)

由题意知,充分利用木板即 S_1+S_2 取最大值,画线的方法是可以如图画出(大矩形的一边在 BC 上),使 $a=b=c=\frac{h}{3}$ 即可,也可让大矩形的一边在其他两边上,画法类似.

背景材料　节约木材要从方方面面做起,常见的问题是怎样在已知三角形木板内锯出一个矩形(最大),而本题更进一层,怎样锯出两个矩形(充分利用),读者很容易考虑多个矩形(且充分利用原木板)的情形.

题目3　美国人非常重视金融意识,在他们编写的代数教科书里有这样的问题:

1626年,有人从印第安人手里以60荷兰基尔特(相当于24美元)的代价借用纽约的曼哈顿岛,并在借据上注明:归还此岛时,对方要还本付息,年利率是6%.但借据上没有注明利息是按单利计算还是按复利计算.

事隔354年之后的1980年,双方当事人的后代到法院打官司,说是利息支付不公,要求法院判明是非.

法官请数学家作了计算,结果使法官大吃一惊.请问按两种方法计算出的利息分别是多少?

解　若按单利算,利息是

$$24\times6\%\times354=509.76(\text{美元})$$

若按复利算,本息和是

$$24(1+6\%)^{354}\approx21\ 801\ 558\ 740(\text{美元})$$

利息将是218亿美元之巨,即使是美国国库,一次也难以拿出这么多钱!

背景材料　我们应当增强金融意识:在一个通货膨胀率很高的社会里,把钱按单利率存进银行,存期越长,吃亏就越大.

用数学眼光看世界(2)

1 两个数学故事

有的同学认为,数学枯燥难学,即使把数学学好了对我们的生活,包括工农业生产也没有多大用处.当同学们看完下面两个真实的数学故事,就会改变原来的错误想法.

(1)2 500多年前,有两个国家发生了战争,一直打了5年多,仍不分胜负.

一天,一位外国学者来到两国边境,看到城池破败,横尸遍野,血流成河,便奉劝两国国王停止这场灾难深重的战争.可他们偏不听劝告,执意要用武力争高低,约定在公元前585年5月28日那天进行决战.

这位学者很生气,愤愤地警告国王说:"你们这样做违背了神的意志,如果你们硬要打仗的话,神力无边的阿波罗(太阳神)一定会发怒的……"

决战那天下午,正当两军酣战不休时,学者的警告果然"灵验"了,顷刻间天昏地暗,百鸟归巢,天幕上繁星点点,大地上漆黑一团,国王吓得战战兢兢,趴在地上不住地祈祷,乞求太阳神宽恕;士兵们惶恐万分,扔掉武器四散而逃.后来两国停战和好,还互通了婚姻.

故事中那位料事如神的外国学者,就是被称为"数学之父"的泰勒斯,他是古希腊第一位世界闻名的大数学家.

原来,泰勒斯预先测出决战那天正好有日食,见两国国王执意要打仗,就编了个太阳神发怒的神话,巧妙地劝止了这场战争.

泰勒斯生于公元前624年,早先是一个很精明的商人,相传有一年,他预见到橄榄油会丰收,就花钱把很多地区的榨油设备全部买下来,后来,橄榄油果然大丰收,他又看准机会将榨油设备租出去,结果赚了很大一笔钱.

(2)被称为"数学的神"的阿基米得是一位伟大的科学家,也是一位伟大的爱国者,公元前215年,当罗马军队从海陆两路大举侵犯叙拉古城时,阿基米得已经是一个70多岁高龄的老人了,他毫不犹豫地挺身而出,竭尽心智,为保卫国家而浴血奋战.

整整3年,强大的罗马军队付出了惨重的代价,也始终无法闯进叙拉古城的门,每当罗马步兵逼进城墙,城墙上就会呼啸着飞出成批的石块,把侵略者砸

得头破血流,这是阿基米得发明的掷石机在大显神威,每当罗马战舰驶近城墙,城墙后就会伸出一种鸟嘴梁,抛出一些巨大的石块,把敌舰砸沉撞翻,阿基米得用凸透镜汇聚太阳光来烧毁敌人的战舰,阿基米得的神奇发明让侵略者闻风丧胆,到后来,敌人一看见城墙上出现某种木棍,罗马士兵就惊呼着"又来了",吓得抱头鼠窜.

2 四百年后得妙对

明朝嘉靖年间,江西吉水县的状元罗洪先与几位饱学之士同游九江,顺流而下,江风助行,眼看九江就要到了,这时,邻船一名船夫慕名来到罗洪先的船上,说有一个上联,请大人续对.

罗洪先起初没把船夫放在眼里,待船夫写出上联,罗洪先竟迟迟无法下笔.上联是:

一孤舟,二客商,三四五六水手,扯起七八叶风篷,下九江,还有十里.

不但说的实事,而且把一到十这十个数字,按顺序嵌进去,成了"绝对".400年后的1959年夏,一个偶然事件的启发,才被一个叫李戎翎的人对上.

这年6月,佛山寺一位老装修工托人到十里外找一种叫"九里香"的名贵木材,只两天便运到了,据说1943年也有人找这种木材,弄到手整整花了一年工夫,这一对比,便有下联:

十里远,九里香,八七六五号轮,虽走四三年旧道,只二日,胜似一年.

至此,这桩悬案才得以了结,当然还欠工整.

3 一世界末日问题

相传在印度佛教圣地贝拿勒斯圣庙里,安放着一个黄铜板,板上插着三根宝石针,其中仅有一根从下到上放着由大到小的64片金片(称为梵塔),昼夜都有一个值班的僧侣按下列规则移动金片:一次只能移动一片,且小片永远在大片的上面.当64片金片都从一根移动到另一根宝石针上时,世界就将在一声霹雳声中毁灭.假设太阳系的寿命是500亿年,僧侣每秒移动一次金片,问是否真有"一声霹雳声"之时?(此问题是有名的"世界末日"问题)

解 解决这个问题需要用到递推数列知识.设按规则把 n 片金片全部移到另一根针上共需 b_n 次,即 b_n 秒钟.为了移动这 n 片金片,必须先按规则把上面的 $(n-1)$ 片金片移到第二根针上,这需要 b_{n-1} 次,再把最下面的大片移到第三根针上,最后通过 b_{n-1} 次把第二根针上的 $(n-1)$ 片移到第三根针上,这样就有关系式

$$b_n=2b_{n-1}+1(n\geqslant 2,b_1=1)$$

“世界末日”问题只需要求上述递推数列$\{b_n\}$中的第64项b_{64}的值，易知

$$b_n = 2^n - 1(n \geq 1)$$

所以$b_{64} = 2^{64} - 1$.即需要移动的时间是$(2^{64} - 1)$秒.如果一年以31 560 000秒计算，僧侣们必须日夜不停地移动近5 800亿年才能完成，远远超过了太阳系的寿命，所以“一声霹雳之时”纯属迷信传播或数学游戏，不可相信.

4 蜜蜂的智慧

蜜蜂的勤劳是最受人们赞赏的.有人做过计算，一只蜜蜂要酿造1千克蜜，就得去100万朵花上采集原料.如果花丛离蜂房的平均距离是1.5千米，那么每采1千克蜜，蜜蜂就得飞上45万千米，几乎等于绕地球赤道飞行11圈.

其实，蜜蜂不仅勤劳，也极有智慧.它们在建造蜂房时显示出惊人的数学才华，连人间的许多建筑师也都感到惭愧呢！

著名生物学家达尔文甚至说：“如果一个人看到蜂房而不倍加赞扬，那他一定是个糊涂虫.”

蜂房是蜜蜂装蜂蜜的库房，它由许许多多个正六棱柱状的蜂巢组成，蜂巢一个挨着一个，紧密地排列着，之间没有一点空隙.早在2 200多年前，一位叫巴普士的古希腊数学家，就对蜂房精巧奇妙的结构作了细致的观察与研究.

巴普士在他的著作《数学汇编》中写道：蜂房里到处是等边等角的正多边形图案，非常匀称规则.在数学上，如果用正多边形去铺满整个平面，这样的正多边形只有3种：正三角形，正方形，正六边形.蜜蜂凭着它本能的智慧，选择了边数最多的正六边形.这样，它们就可以用同样多的原材料，使蜂房具有最大的容积，从而贮藏更多的蜂蜜.

也就是说，蜂房不仅精巧奇妙，而且十分符合需要，是一种最经济的结构.

历史上，蜜蜂的智慧引起了众多科学家的注意.著名天文学家开普勒曾经指出：这种充满空间的对称蜂房的角应该和菱形12面体的角一样.法国天文学家马拉尔弟则亲自动手测量了许多蜂房，他发现：每个正六边形蜂巢的底都是由3个全等的菱形拼成的，而且每个菱形的钝角都等于109°28′，锐角都等于70°32′.

18世纪初，法国自然哲学家列奥缪拉猜测：用这样的角度建造起来的蜂房，一定是相同容积中最省材料的，为了证实这个猜测，他请教了巴黎科学院院士、瑞士数学家克尼格.

这样的问题在数学上叫极值问题.克尼格用高等数学的方法做了大量计算，最后得出结论说，建造相同容积中最省材料的蜂房，每个菱形的钝角应该是109°26′，锐角应该是70°34′.

这个结论与蜂房的实际数值仅差2′,人们宽宏大量地想:小蜜蜂能够做到这一步已经很不错了,至于2′的小小误差嘛,完全可以谅解.

可是事情并没有完结.1743年,著名数学家马克劳林重新研究了蜂房的形状,得出了一个令人震惊的结论:要建造最经济的蜂房,每个菱形的钝角应该是109°28′16″,锐角应该是70°31′44″.

这个结论与蜂房的实际数值相吻合.原来不是蜜蜂错了,而是数学家克尼格算错了.

数学家怎么会算错呢?后来发现,当年克尼格使用的对数表印错了.

小蜜蜂真不简单,数学家到18世纪才计算出来、予以证实的问题,它在人类有史之前就应用到蜂房上去了.

参考文献

[1] 李天华,许济华.数学奇观[M].武汉:湖北少年儿童出版社,1989.

用数学眼光看世界(3)

1967 年 8 月 23 日,苏联的联盟一号宇宙飞船在返回大气层时,突然发生了恶性事故 —— 减速降落伞无法打开.苏联中央领导研究后决定:向全国实况转播这次事故.当电视台的播音员用沉重的语调宣布,宇宙飞船两小时后将坠毁,观众将目睹宇航员韦拉迪米 · 科马洛夫殉难的情景.消息发布后,举国上下顿时被震撼了,人们都沉浸在巨大的悲痛之中.

在电视上,观众看到了宇航员科马洛夫镇定自若的形象,他面带微笑地对母亲说:“妈妈,您的图像我在这里看得清清楚楚,包括您头上的每根白发,您能看清我吗?”“能,能看清楚,儿啊,妈妈一切都很好,你放心吧!”这时,科马洛夫的女儿也出现在电视屏幕上,她只有 12 岁.科马洛夫说:“女儿,你不要哭.”“我不哭 ……”女儿已泣不成声,但她强忍悲痛说:“爸爸,您是苏联英雄,我想告诉你,英雄的女儿会像英雄那样生活的!”科马洛夫叮嘱女儿说:“你学习时,要认真对待每一个小数点,联盟一号今天发生的一切,就是因为地面检查时忽略了一个小数点 ……”

参考文献

[1] 陈历功.中国当代数学家与数学英才大辞典(第一卷)[M].海口:海南出版社,1999.
[2] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992:680.

用数学眼光看世界(4)

1 “焦点访谈”为什么在7:38播出?

亲爱的读者朋友,你是否注意到中央电视台第一套节目“焦点访谈”播出的时间是晚上7点38分?“焦点访谈”是时事、政治性较强的一个节目,应选择在晚上看电视节目人数最多的“黄金时间”播出,即应选在晚上7点到8点之间的一个时刻开始播出,那为什么在晚上7:38开始播“焦点访谈”呢?这个时间能突出“焦点”的含义吗?请看下面一道关于钟表上时针、分针所夹角度的计算题.

例1 晚上7点到8点之间的什么时刻(精确到分)时针与分针重合?

解 如图1,设7点t分($0 \leqslant t < 60$)时针OA与分针OB重合.在7点时,时针OC与分针OI所夹的角度是$30° \times 7 = 210°$,时针每小时转30°,所以每分钟转0.5°;分针每5分钟转30°,所以每分钟转6°.因为时针OC转t分钟到达OA,所以,$\angle COA = 0.5° \cdot t$;因为分针$OI$转$t$分钟到达$OB$(即$OA$),所以$\angle IOB = 6° \cdot t$.

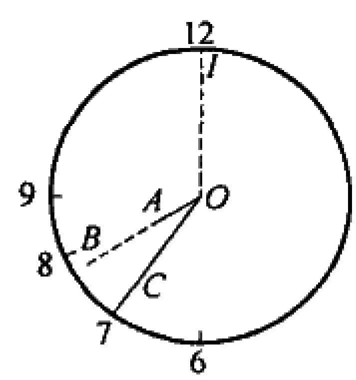


图1

又因为$\angle IOB = \angle IOC + \angle COA$,所以

$$6° \cdot t = 210° + 0.5° \cdot t$$

解方程,得$t = 38\frac{2}{11}$,$t \approx 38$(分).

从而可得,晚上7点38分时,时针与分针重合(7点38分是精确到分的时间).读者由此可以看出“焦点访谈”栏目主持人的寓意:用时针、分针重合来比喻时事、政治的“焦点”.

关于任意时刻钟表上时针、分针、秒针所夹的角度,读者可参见文献[1].

2 谁决定了动物的大小

陆地上最大的动物是大象.

玩具厂把大象按比例缩小,缩小到老鼠那么大,可是,缩小到老鼠那么大的大象,它的腿还是比老鼠的腿粗得多.

大象的腿粗得不像话,太不成比例了,这是为什么呢?

腿是用来支持和移动身体的,它的粗细和体重大体上是一致的.

要是将老鼠按比例放大,它的高度变成原来的100倍,4条腿的截面只是原来的10 000倍,而体积却是原来的1 000 000倍了,腿的单位面积要支持住的质量是原来的100倍,这样,它就无法站立起来到处乱窜了.

同样的道理,要是象更大,它的腿必须更快地变粗,直到肚子下面长满了腿,4条腿粗到挤在一起,它也就无法活动了.

所以,陆地上最大的动物,要比海里最大的动物小得多.海里的蓝鲸有170吨重,而最大的非洲象只有6～7吨.因为鲸在水里,水可以负担它的体重.

至于能在空中飞的动物,更不能有很大的体重.

蜜蜂的翅膀不算大,却能够长时间在花丛中飞来飞去.要是按比例把它的长度放大10倍,它的体重要增长1 000倍,而翅膀的面积只增长100倍.这样,它就是拼命扑腾翅膀,也不能自由飞翔了.

刚才说的是大,现在反过来说小.

昆虫可以很小,有一种叫仙蝇的小甲虫,10万只还不到5克重.

在哺乳动物里,可找不到这么小的,最小的哺乳动物重约1.5克.为什么不能更小一些呢?因为哺乳动物是热血动物,它必须保持体温,太小了,表面积相对地大,体积相对地小了,这样,太小的热血动物,为了保持自己的体温,它就是不断地吃呀吃,也总会感到饿,这怎么活得了呢?

鸟类也是热血动物,所以也不可能有太小的鸟.最小的蜂鸟约重2克,别看它小,它的胃口特别好,得不停地吃.对比之下,作为冷血动物的鱼,可以很小.最小的矮鰕虎鱼,体重5毫克,400条这种鱼,才抵得上一只蜂鸟.

你看,用数学中的相似比来看待动物世界,一切就显得那么自然!

参考文献

[1] 甘志国.钟表上时针、分针、秒钟所夹的角度[J].数学通讯,2000(7):35-36.

用数学眼光看世界(5)

1 加薪的学问

学数学,是要使人聪明,思维更加缜密.目前在美国广为流传的一道数学题是:老板给了两个加工资的方案,一是每年年末加 1 000 元;二是每半年结束时加 300 元,请选一种.不擅数学的,很容易选择前者:一年加 1 000 元总比两个半年共加 600 元要多.其实,由于加工资是累计的,时间稍长,往往第二种方案更有利.例如,在第二年的年末,依第一种方案可加 1 000 + 2 000 = 3 000(元);而第二种方案在第一年加得 300 + 600 = 900(元),第二年加得 900 + 1 200 = 2 100(元),总数也是 3 000(元).但到第三年,第一种方案可加 1 000 + 2 000 + 3 000 = 6 000(元);第二种方案可加 300 + 600 + 900 + 1 200 + 1 500 + 1 800 = 6 300(元),比第一种方案多了 300 元.第四年、第五年会多得更多.因此,你若会在该公司干三年以上(包括三年),应选择第二种方案.

由以上材料,再来解答下列问题:

(1) 若在该公司干 10 年,则选择第二种方案比选择第一种方案多加薪多少元?

(2) 若把第二种方案中的"每半年加 300 元"改为"每半年加 a 元",问 a 取何值时,选择第二种方案总比选择第一种方案多加薪(假设工作时间是整年数)?

解 (1)$300(1+2+3+\cdots+20)-1\,000(1+2+3+\cdots+10)=300\times 210-1\,000\times 55=8\,000$(元).

(2) 设工作了 n 年,由题意得

$$a(1+2+3+\cdots+2n)>1\,000(1+2+3+\cdots+n)$$

$$a>250+\frac{250}{2n+1}$$

上式中的常数 a 应对所有正整数 n 均成立,所以

$$a>\max_{n\in\mathbf{N}^*}\left\{250+\frac{250}{2n+1}\right\}$$

$$a>333\frac{1}{3}$$

即当且仅当 $a > 333\frac{1}{3}$ 时，选择第二种方案总比第一种方案多加薪.

2 可以计算出"人间一年，天上一天"

许多科幻小说中描写了这样的镜头：一位宇航员离开地球去作宇宙航行，若干年后，当他回到地球时，前来迎接他的孙子已经是老态龙钟的白胡子老头，而他本人却是满头黑发，神采奕奕，这可能吗？

根据爱因斯坦的相对论，在高速运动的物体上，将发生明显的"尺缩"、"钟慢"效应. 当地球上过去 1 s 时，高速运动的宇宙飞船上只过去了 $\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$ s，其中光速 $c = 30$ 万 km/s，v 是飞船航行的速度.

下面我们来探讨，根据上述公式，是否会出现前面那种戏剧性的有趣场面.

当飞船以光速的0.98倍，即 $v = 0.98c$ 航行时，地球上过去了1秒时飞船上才过了 $\sqrt{1-0.98^2} \approx 0.2$(s). 这样当地球上过去了5年时飞船上才过了1年. 假设宇航员上飞船时是28岁，5年后回到地球上时，年仅 $28+1=29$(岁). 虽然他孙子尚未出世，但他原来25岁的弟弟却已经有 $25+5=30$(岁)，反而可以当他的"哥哥"了.

当飞船的航行速度提高到 $v = 0.998c$ 时，$\sqrt{1-0.998^2} \approx 0.0632$，地球上过了25年，飞船上才过了 $25 \times 0.0632 \approx 1.58$(年). 此时宇航员年仅 $28 + 1.58 \approx 30$(岁)，而他那原来3岁的儿子已经有 $3+25=28$(岁)，可以和他"称兄道弟"了.

当飞船的航速提升到 $v = 0.9998c$ 时，$\sqrt{1-0.9998^2} \approx 0.02$，地球上过去了100年，飞船上才过了 $100 \times 0.02 = 2$(年). 此时宇航员年仅 $28+2=30$(岁)，当然是满头黑发，而他那离开地球尚未出生的孙子，不妨认为当时仅有 -22(3岁的儿子21年后结婚，第二年生子)，现在却已有 $-22+100=78$，反而是"白胡子老头"，可以当宇航员的"爷爷"了.

当飞船的航速提升到 $v = \sqrt{1-\frac{1}{365^2}}c = 0.99999625c$ 时就会出现"人间一年，天(飞船)上一天"的情形.

参考文献

[1] 夏昌华. 由科幻小说引出的数学问题[J]. 中学生数学(高中版)，2001(8)：17.

数字计算的智巧

数字计算不仅要遵守四则运算法则.更重要的是要运用机智寻找到一种巧妙合理的算法,机智来自细心的观察和大胆的探索,因此在学习数学中要努力学会观察和分析,培养积极探索的精神.

1 倒过来写

例 1 求和:$1+2+3+\cdots+999$.

分析 观察

$$S=1+2+3+\cdots+997+998+999 \qquad ①$$

做这一长串加法的困难在于各数互不相等,但不等中包含着相等 —— 首末两项之和与到首末两项等距离的两项之和相等.这时,机智的做法是将 S 倒过来写

$$S=999+998+997+\cdots+3+2+1 \qquad ②$$

将 ①② 两式左、右分别相加,便把加法转化为乘法了

$$2S=(1+999)\times 999$$

从而得 $S=499\ 500$.

这种巧妙的求和方法是德国少年高斯的杰作.请将 999 换成任意自然数 n 后写出解答过程.答:$S=\frac{1}{2}n(n+1)$

2 添括号

例 2 计算:$S=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n$.

分析 不难看出这个算式的规律 —— 任何相邻两项之和或为"1"或为"-1",如果将 1,2 项,3,4 项,… 分别编组计算,就得到一系列的"-1",从而可得:

$$S=(1-2)+(3-4)+\cdots+(-1)^{n+1}n=\begin{cases}-\frac{n}{2}(n\text{ 为偶数时})\\ \frac{n+1}{2}(n\text{ 为奇数时})\end{cases}$$

3　一分为二

例 3　比较 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 与 2 的大小.

分析　关键是将 S_n 写成宜于与 2 比较的简单的式子(直接的计算几乎不可能),现依次称 S_n 的各项分别为第 1 项,第 2 项,…,第 n 项.对第 k 项变形为

$$\frac{k}{2^k}=\frac{2(k+1)-(k+2)}{2^k}=\frac{k+1}{2^{k-1}}-\frac{k+2}{2^k}$$

这说明 S_n 中每一项都可以"裂"为正负两项,这时

$$S_n=(2-\frac{3}{2})+(\frac{3}{2}-\frac{4}{4})+(\frac{4}{4}-\frac{5}{8})+\cdots+(\frac{n+1}{2^{n-1}}-\frac{n+2}{2^n})=2-\frac{n+2}{2^n}$$

所以 $S_n<2$.

练　习

1.计算:$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^0-100^2+101^2$.

2.求和:$S=1\times1+2\times2\times1+3\times3\times2\times1+\cdots+n\times n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$.

(答案:1.5 151　2.$1\times2\times3\times\cdots\times(n+1)-1$).

数学趣题(1)

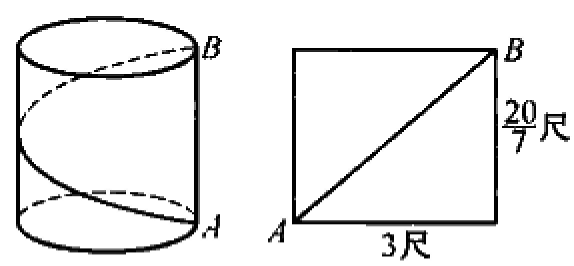
题1　空间中能否存在一种多面体,它有奇数个面,并且每个面又有奇数条边?

解　设该多面体有 n 个面,n 是奇数,这 n 个面的边分别有 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 条,则这个多面体的总棱数为$\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为奇数,n 也为奇数,所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为奇数,$\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 不为整数,产生矛盾!说明这样的多面体不存在.

题2　古书上说,今有枯木一根直立地上,高二丈,周三尺,有葛藤自根均匀绕缠而上,七周而达其顶,问葛藤之长几何?(1 丈 = 10 尺)

解　假设葛藤攀援而上的轨迹是一条螺旋线(即自根沿最短路线绕木七周而达其顶),其长度可用高等数学知识来求,但这里有一个巧妙的初等数学解法.

先求葛藤绕木一周的长度.如图1(a),设葛藤绕木一周的长度是曲线段$\overset{\frown}{AB}$之长,将圆柱(直木)的侧面沿母线 AB 展开(图 1(b)),则圆柱侧面变为 3尺 $\times\frac{20}{7}$尺 的矩形,又因为葛藤缠绕的路线最短,所以图 1 中的曲线段$\overset{\frown}{AB}$展开后变为图 2 中的线段 AB,其长度为



(a)　　(b)

图1

$$\sqrt{3^2+\left(\frac{20}{7}\right)^2}=\frac{29}{7}(\text{尺})$$

所以所求葛藤之长为二丈九尺.

题3　对于函数 $f(x),x\in(0,1)$.

(1) 若对于任意 $x\in(0,1)$,都有 $f(x)>0$;

(2) 若对于任意的 $x,y\in(0,1)$,都有$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}\leqslant 2$,则 $f(x)=$ 常数.

证明　由题设,可得

$$f(x)f(1-y)+f(1-x)f(y)\leqslant 2f(y)f(1-y) \quad ①$$

令 $x=1-y$,则

$$f^2(x)-2f(x)f(1-x)+f^2(1-x)\leqslant 0$$

即

$$[f(x)-f(1-x)]^2\leqslant 0$$

所以

$$f(x)=f(1-x)$$

又由假设(2),可得

$$\frac{2f(x)}{f(y)}\leqslant 2$$

所以

$$f(x)\leqslant f(y)$$

另一方面,在 ① 中若令 $y=1-x$,

可同上证得 $f(y)\leqslant f(x)$.

所以 $f(x)=f(y)$,即 $f(x)=$ 常数.

题4　地球赤道半径约6 378 km.要是用一根绳绕赤道一周,使各处都高出地面 1 m,设这根绳长与赤道周长之差为 a,又设半径为 1.1 m 的大木盆箍长与半径为 0.1 m 的小木盆箍长之差为 b,试比较 a 与 b 的大小.

解　$a=2\pi(6\ 378\ 000+1)-2\times 6\ 378\ 000=2\pi(\mathrm{m})$

$$b=2\pi\times 1.1-2\pi\times 0.1=2\pi(\mathrm{m})$$

所以 $a=b$.

背景　一般人都会认为本题中有 $a>b$,这是凭直觉、凭估计、凭经验,然而它们不可信,科学的数学计算才是千真万确的.

题5　甲、乙、丙三个生产队一起开山筑路.甲队带了5包炸药,乙队带了3包炸药(每包炸药质量相同),丙队一时没有买到炸药,所以没有带.甲队和乙队的队长说:"没关系,我们有结余,一起用,回去再算钱吧."开山结束,炸药刚好用完,三个队用的炸药一样多,丙队共给了甲、乙两队 80 元钱,甲、乙两队应怎样分这 80 元钱?

解　每队用炸药$\frac{8}{3}$包,丙队付出 80 元,所以每包炸药的价钱是 $80\div\frac{8}{3}=30$(元).

甲队带5包,自己用了$\frac{8}{3}$(包),给丙队 $5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$(包),应收丙队$\frac{7}{3}\times 30=70$(元);

乙队带3包,自己用了$\frac{8}{3}$(包),给丙队 $3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$(包),应收丙队$\frac{1}{3}\times 30=10$(元).

所以甲队得 70 元,乙队得 10 元.

背景 这是一道资源(报酬)分配问题,初看起来,容易分配,但仔细一想,必须理清思路,科学计算后才能正确分配.

题 6 不知是谁把天平的两臂调得不一样长了.小丁用这台不准的天平称东西,左边一称是 36 g,右边一称是 25 g.请问这东西的质量是多少?天平左右两臂长度之比是多少?

解 设天平的左臂长为 a,右臂长为 b,东西的质量为 xg,得

$$ax = 36b, bx = 25a$$

所以

$$abx^2 = 36 \times 25ab$$

得

$$x = \sqrt{36 \times 25} = 30(g)$$

还可得

$$a : b = 6 : 5$$

背景 运用数学、物理知识可解决"用不等臂的天平准确测质量"的问题:两次称量的几何平均数就是准确值.

题 7 有一个长2 m,宽2 m,高 3 m 的长方体盒子(图 2(a)),盒子的 A 角上停着一只蜘蛛,B 角上有一只苍蝇,被蜘蛛丝缠住了.蜘蛛觉察到了,就沿长方体盒子的表面,去捉苍蝇.它爬行的速度为 4 m/min.请问,蜘蛛至少要经过多少时间才能把苍蝇捉住?

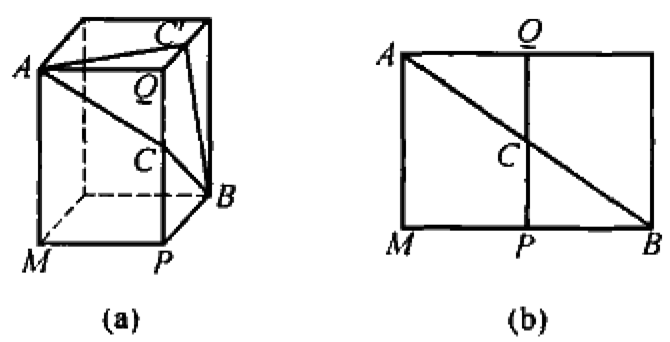


图 2

解 如图 2(b),设想把图 2(a) 中长方体盒子的面 AP,BQ 展平,得 ACB 是 A 与 B 之间的最短线,所以 ACB 的长度是直角 $\triangle AMB$ 的斜边,其长度为

$$\sqrt{3^2 + (2+2)^2} = 5(\text{m}), 5 \div 4 = 1.25(\text{min})$$

如果蜘蛛沿 $AC'B$ 的路线前进,则花费的时间为 $\sqrt{(2+3)^2 + 2^2} \div 4 \approx 1.35(\text{min})$.

蜘蛛只有一条近路 ACB 可走,经过 1.25 min 才能捉住苍蝇.

背景 蜘蛛的行走路线对人也是大有启示的,这种最值问题对工农业生产也是大有益处的.

数学趣题(2)

1.某村居民在第一年增加了 n 人,而在第二年又增加了 300 人.但也能说是居民人数在第一年增加了 300%,而在第二年又增加了 $n\%$.问该村现在有居民多少人?

解 设该村起初有居民 x 人,则第一年末为 $(x+n)$ 人,第二年末为 $(x+n+300)$ 人.当然,也有

$$\begin{cases} x+n=(1+300\%)x \\ n\%\cdot(x+n)=300 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=50 \\ y=150 \end{cases}$$

该村现在有居民 $x+n+300=500$(人).

2.某岛的居民中,$\frac{2}{3}$ 的男人是有妻子的,$\frac{3}{5}$ 的女人是有丈夫的.请问有配偶的居民占岛上人口的几分之几?

解 设岛上有男人 x 人,女人 y 人,得

$$\frac{2}{3}x=\frac{3}{5}y$$

所以可设 $x=9k,y=10k(k\in\mathbf{N}^*)$.

所求分数为 $\dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}{x+y}=\dfrac{6k+6k}{9k+10k}=\dfrac{12}{19}$.

3.售票员卖出剧院大厅第一排的全部座位票,却把某座位错卖了两张.已知卖出的这些票的座号之和为 857,那么是哪个座位被卖出了两张呢?

解 设第一排的全部座位号依次是 $1,2,3,\cdots,n$,其中被卖出了两次的是 $x(x=1,2,3,\cdots,n)$ 号,得

$$(1+2+3+\cdots+n)+x=\frac{1}{2}n(n+1)+x=857$$

所以

$$\frac{1}{2}n(n+1)+1\leqslant 857\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

又由 $n\in\mathbf{N}^*$,得 $n=40$.进而又得 $x=37$.

所以 37 号被卖出了两张.

4.从无穷数列 $\{n(n+1)\}$ 中能否找出 2 000 个不同的项,使它们的和是完

全平方数?

解　先从该数列中任意选取1 999项,并计算出它们的和 S.接着再加上该数列的第$(S-1)$项$S(S-1)$,该项不可能与已取的任何一项重复,因为它比总和S更大.现在我们把这一项再加上去,就得到$(S-1)S+S=S^2$,它当然是一个完全平方数了.

5.是否存在两个不同的正整数 a,b,使得 $a+b,a^2+b^2,a^3+b^3,\cdots,a^{19}+b^{19}$ 都是 $a^{20}+b^{20}$ 的约数?

解　题意即 $a^{20}+b^{20}$ 是 $a^i+b^i(i=1,2,3,\cdots,19)$ 的公倍数.可选 $b=2a$,得$(2^{20}+1)a^{20}$是$(2^i+1)a^i(i=1,2,3,\cdots,19)$的公倍数,即$(2^{20}+1)a$是$(2^i+1)(i=1,2,3,\cdots,19)$的公倍数.

所以选 $a=(1+2)(1+2^2)(1+2^3)\cdots(1+2^{19}),b=2a$ 可满足题意.

6.不少正整数能表示成连续正整数的和,例如,$9=4+5,26=5+6+7+8$.请找出一些正整数,使它们不能表示成连续正整数(至少两个)的和.

解　可以证明:2 的正整数幂均不能表示成连续正整数(至少两个)的和.

事实上,当 $m,k\in\mathbf{N}^*$ 时,有

$$m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+k)=\frac{1}{2}(k+1)(2m+k)$$

又$(k+1)(2m+k)$的两个因式中一定有一个是大于1的奇数,所以上式的值不可能是 2 的正整数幂.

7.设 $A=9^{\overbrace{99\cdots9}^{m\text{个}9}},B=8^{\overbrace{88\cdots8}^{n\text{个}8}}$ 请求出所有的正整数 m,n,使 $A-B$ 是 7 的倍数.

解　因为 $3^6-1=(3^3+1)(3^3-1)=(4\times7)\times26$,所以可设 $3^6=7a+1(a\in\mathbf{N}^*)$.

$A=9^{\overbrace{99\cdots9}^{m\text{个}9}}=(3^6)^{\overbrace{33\cdots3}^{m\text{个}3}}=(7a+1)^{\overbrace{33\cdots3}^{m\text{个}3}}$ 所以 A 被 7 除所得余数为 1.

同理可得 B 被 7 除所得余数也为 1.

所以,当 m,n 为任意正整数时,$A-B$ 均是 7 的倍数.

8.我们知道,$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$.现在从 $1!\times2!\times3!\times\cdots\times100!$ 中的 100 个因数中去掉一个因数,使剩下的积为完全平方数,问应去掉哪一个因数呢?(找出一个答案即可)

解　设 $N=1!\times2!\times3!\times\cdots\times100!$,得

$$N=1\times(1\times2)\times(1\times2\times3)\times\cdots\times(1\times2\times3\times\cdots\times100)$$

可以看出 N 中的因数 1 共有 100 个,2 共有 99 个,3 共有 98 个,$\cdots$,100 共有 1 个.凡是奇因数的指数都是偶数,凡是偶因数的指数都是奇数.

所以 $N = a^2 \times 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100$($a$ 是某个整数),又可得

$$N = a^2 \times 2^{50} \times 50!$$

所以去掉 50!便是一个答案.

9. 18 层大厦的底层有 17 位乘客在等候电梯,他们要去的楼层都不相同.电梯很大,一次能容纳他们全部进人.这时有位乘客出了一道怪题:"如果电梯司机今天只肯把电梯停在某一层楼,剩下的要乘客自己去步行.假定乘客向下走一层楼的'不满指数'为 1;而向上爬一层楼的'不满指数'为 2,那么电梯应该停在哪一层才能使'不满指数'的总和最小?"

错解 设电梯应停在第 $n(n = 1,2,\cdots,18)$ 层,可得"不满指数"的总和为

$$y = 2[1 + 2 + \cdots + (18 - n)] + [1 + 2 + \cdots + (n - 2)] =$$

$$(18 - n)(19 - n) + \frac{1}{2}(n - 2)(n - 1) =$$

$$\frac{1}{2}(3n^2 - 77n + 686)$$

由二次函数的单调性知,当且仅当 $n = 13$(与对称轴最接近的正整数)时 y 取到最小值,且最小值为 96.即电梯应停在第 13 层.

正解 设有 $n(n = 1,2,\cdots,18)$ 人从一楼(底层)走上去,他们应分别走向 $2,3,\cdots,n + 1$ 楼,他们的"不满指数"的总和为

$$y_1 = 2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n + 1)$$

设电梯应停在第 $x(x = n + 2, n + 3,\cdots,18)$ 层,则向上最多走向 18 楼,向下最多走向$(n + 2)$ 楼,得其余人的"不满指数"的总和为

$$y_2 = 2[1 + 2 + \cdots + (18 - x)] + [1 + 2 + \cdots + (x - n - 2)] =$$

$$(18 - x)(19 - x) + \frac{1}{2}(x - n - 2)(x - n - 1)$$

所有人的"不满指数"的总和为

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}[3x^2 - (2n + 77)x + 3n^2 + 5n + 686]$$

$$(n = 1,2,\cdots,18; x = n + 2, n + 3,\cdots,18)$$

其对称轴为 $x = \frac{2n + 77}{6}$.由 $n + 2 \leqslant 18$,得 $n \leqslant 16$,$\frac{2n + 77}{6} > n + 2$.

(1) 当 $n = 3k(k = 1,2,3,4,5)$ 时,当且仅当 $x = k + 13$(与对称轴最接近的正整数)时,y 取到最小值,且最小值为 $12k^2 - 31k + 96$.

同理可得,当且仅当 $k = 1$ 时,$12k^2 - 31k + 96$ 取到最小值,且最小值为 77.

所以当且仅当 $n = 3$,$x = 14$ 时,y 取到最小值,且最小值为 77.

(2) 当 $n = 3k + 1(k = 0,1,2,3,4,5)$ 时,当且仅当 $x = k + 13$ 时,y 取到最小值,且最小值为 $12k^2 - 23k + 87$.

又当且仅当 $k=1$ 时,$12k^2-23k+87$ 取到最小值,且最小值为76.

所以当且仅当 $n=4,x=14$ 时,y 取到最小值,且最小值为76.

(3) 当 $n=3k+2(k=0,1,2,3,4)$ 时,当且仅当 $x=k+13$ 或 $k+14$ 时 y 取到最小值,且最小值为 $12k^2-15k+81$.

又当且仅当 $k=1$ 时,$12k^2-15k+81$ 取到最小值,且最小值为78.

所以当且仅当 $n=5,x=14$ 时,y 取到最小值,且最小值为78.

综上所述,可得当且仅当 $n=4,x=14$ 时,y 取到最小值,且最小值为76.

即电梯应停在第14层.并且应当先让上2,3,4,5楼的人不上电梯步行上楼,可使所有人的"不满指数"的总和最小,且最小值为76.

10. 求证:$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$.

证明 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=$

$$\frac{1}{2}[(1+2^{n-1})+(2+2^{n-2})+\cdots+(2^{n-1}+1)]\text{(倒序相加)}>$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2^{n-1}}\cdot n=n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

11. 有三个金属实心球的直径都是正整数,它们的和为38 cm.把它们熔化后再重新铸造成一个大实心球,其直径为20 cm.如果没有损耗的话,能算出原来三个球的直径各是多少吗?

解 可设三个球的直径分别为 x cm,y cm,$(38-x-y)$ cm$(x\geqslant y\geqslant 38-x-y)$,得

$$x^3+y^3+(38-x-y)^3=20^3$$

$$(x+y)[xy-38(x+y)+1\ 444]=2^3\times 3^2\times 7\times 31$$

由正整数 x,y 满足 $x\geqslant y\geqslant 38-x-y$,可得 $26\leqslant x+y\leqslant 37$.

又由 $x+y$ 是 $2^3\times 3^2\times 7\times 31$ 的约数,讨论得:

(1) 若 $x+y$ 有约数31,得 $x+y=31$,进而得 $xy=238,x=17,y=14$.三个球的直径分别为17 cm,14 cm,7 cm.

(2) 除此之外,得 $x+y$ 是 $2^3\times 3^2\times 7$ 的约数.

若 $x+y$ 有约数7,得 $x+y=28$,进而得 $xy=178$,而这将与 x,y 是正整数矛盾!

说明 $x+y$ 没有约数7,得 $x+y$ 是 $2^3\times 3^2$ 的约数.

得 $x+y$ 必有约数3,得 $x+y=36$,进而得 $xy=358$,而这也将与 x,y 是正整数矛盾!

综上所述,得所求三个球的直径分别为17 cm,14 cm,7 cm.

12. 一个农民家养了一头羊,一头牛和一匹马,家中还存了一堆草料作为饲

料.农民的儿子计算后说,这堆草料够羊和马吃上一个月,或者够羊和牛吃上$\frac{3}{4}$个月,或者够牛和马吃上$\frac{1}{3}$个月.农民听后,大骂儿子没学好数学,此话对否?

解　儿子的话的确有错.

设羊,牛,马在一个月内分别吃掉这堆草料的x,y,z部分,则从儿子的话可列出方程组

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ \frac{3}{4}(x + y) = 1 \\ \frac{1}{3}(y + z) = 1 \end{cases}$$

由此可解得$x = -\frac{1}{3}$,羊在一个月内怎么可能吃掉负数堆草料呢?

13.数列问题永远蕴含着无穷的悬念,下面这个用数字汉字组成的数列,你能看出它的构成规律吗?它是:

一,三,六,八,七,八,九,十,十一,…

请你继续写出后面的三项.

解　构成规律是:$a_n = a_{n-1}$的笔画数$+ n(n \geqslant 2)$.

要写出的三项为:十三,十六,十八.

14.请给出方程$x_2^2 + x_3^3 + x_4^4 + x_5^5 + x_6^6 + x_7^7 + x_8^8 + x_9^9 = x_{10}^{10}$的一组正整数解.

解　先设法得到$2^2 + 3^3 + 1^4 = 2^5$,再运用公式$2^n + 2^n = 2^{n+1}$,可得

$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 = 2^6$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 2^8$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 2^9$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^{10}$$

所以,$(x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}) = (2,3,1,2,2,2,2,2,2)$是原方程的一组正整数解.

15.(1)在$1 \pm 2 \pm \cdots \pm 100$中的"±"如何确定"+","-",可使结果为0?(写出一个答案即可)

(2)在$1 \pm 2 \pm \cdots \pm 99$中的"±"如何确定"+","-",可使结果为0?(写出一个答案即可)

(3)在$1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm 200^2$中的"±"如何确定"+","-",可使结果为0?(写出一个答案即可)

(4) 在 $1\times2\pm2\times3\pm\cdots\pm200\times201$ 中的"±"如何确定"+","-",可使结果为0?(写出一个答案即可)

解 (1) 请注意,$k-(k+1)-(k+2)+(k+3)=0$,所以该题的一个答案为 $(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+(9-10-11+12)+\cdots+(97-98-99+100)=0$(这里的"( )"应去掉,添上"( )"是为了让读者更容易看出规律.下同).

(2) $(1+2-3)+(4-5-6+7)+(8-9-10+11)+\cdots+[(4k-4)-(4k-3)-(4k-2)+(4k-1)]=0$

(3) 请注意,$k^2-(k+1)^2=-(2k+1)$,又

$$-(2k+1)+[2(k+1)+1]+[2(k+2)+1]-[2(k+3)+1]=0$$

所以 $k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2-(k+4)^2+(k+5)^2+(k+6)^2-(k+7)^2=0$.

所以该题的一个答案为 $(1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2)+(9^2-10^2-11^2+12^2-13^2+14^2+15^2-16^2)+\cdots+(193^2-194^2-195^2+196^2-197^2+198^2+199^2-200^2)=0$

(4) 留给读者自己来做,解答略.

数理结合题欣赏

各种学科互相渗透,知识之间的联系越来越紧密,尤其以数学、物理之间的联系最紧密.下面我们来欣赏几道数学、物理知识相结合的题.

题1 如图1,A,B 两人相距 $2d$ m.平行地站在一堵高墙前,离墙均为 $\sqrt{3}d$ m,A 发一枪,B 在 t s后听到第一次枪声,问听到第二次枪声距发枪多长时间?

解 B 听到第一次枪声为声音直接传到 B 处(图1),而第二次"枪声"应是从 A 发出的枪声经高墙反射后传到 B 处,且所经过的路线应为最短(图2).

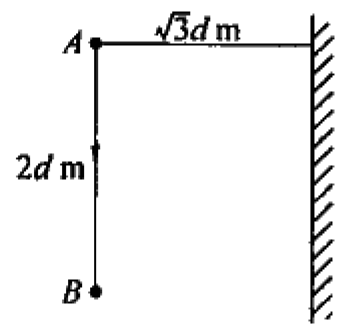


图1

在图2中,作点 A 关于墙的对称点 A',连结 $A'B$ 交墙于点 P,APB 即为最短路线.

易知 $AP+PB=4d$.

设枪声传播的速度为 v,得 $\frac{2d}{v}=t$,所以 $\frac{4d}{v}=2t$,即听到第二次枪声时距发枪 $2t$ s.

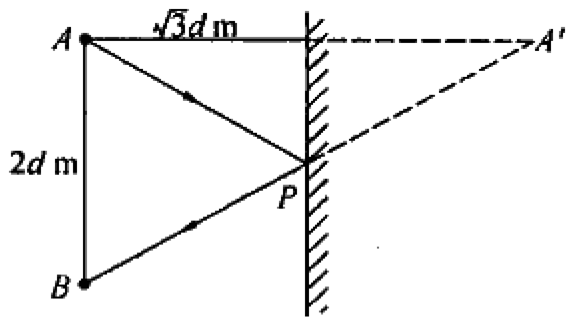


图2

题2 如图3,高20 cm,直径2 cm的蜡烛直立在水平桌面上时,会在桌面上形成一个圆形的阴影,设烛焰高2 cm,求圆形影长的面积?

解 由光的直线传播可作出圆形阴影(图3),有

$$\frac{ED}{EO}=\frac{CD}{AO}$$

即

$$\frac{2}{22}=\frac{1}{AO}$$

所以

$$OA=11(\text{cm})$$

得阴影面积为 $121\pi\ \text{cm}^2$.

题3 如图4,人眼位于 $E(3,0)$ 处,一长为1的平面镜 MN 平行于 x 轴固定于 $N(0,3)$ 处,求人眼 E 从平面镜 MN 中所观察到 x 轴的标尺刻度范围.

解 眼睛能观察到的范围应为经平面镜 MN 反射后进入眼睛的光线范围.

如图 4，ME，NE 为进入人眼的边界光线，根据光的反射定律可作出入射光线. NE，NA 关于 y 轴对称，所以 A，E 关于原点对称，得点 A 的坐标是 $(-3,0)$；MB，ME 关于直线 $x=-1$ 对称，可得点 B 的坐标是 $(-5,0)$.

所以，眼睛能观察到的 x 轴刻度范围是 $-5\sim-3$.

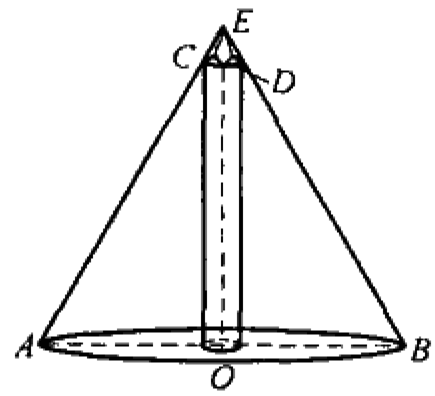


图 3

题 4　如图 5，某人站在距公路 BC 为 60 m 的点 A，发现公路上有汽车从点 B 以 $v_0=10$ m/s 的速度沿公路 BC 匀速行驶，点 B 与人相距 100 m，那么此人最少应以多大的速度奔跑才能与汽车相遇?

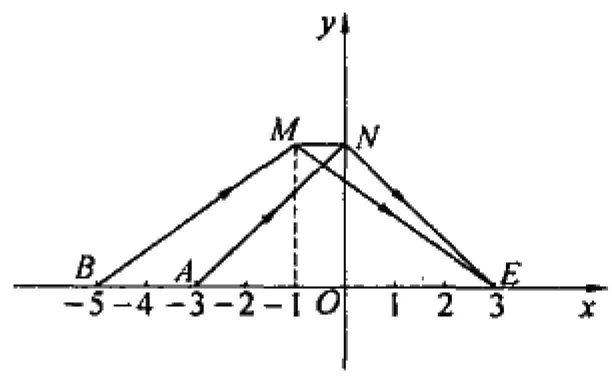


图 4

解　设人沿 AD 的方向去追汽车，速度为 v，t s 可追上汽车，又设 $\angle BAD=\alpha$，得

$$2S_{\triangle BAD}=BD\cdot AC=AD\cdot BH$$

得

$$v_0t\cdot 60=vt\cdot 100\sin(180°-\alpha)$$

$$v=\frac{6}{\sin\alpha}$$

所以 $v\geqslant 6$(m/s)，当且仅当 $\angle BAD=90°$ 时取等号.

即此人最少应以 6 m/s 的速度奔跑才能与汽车相遇.

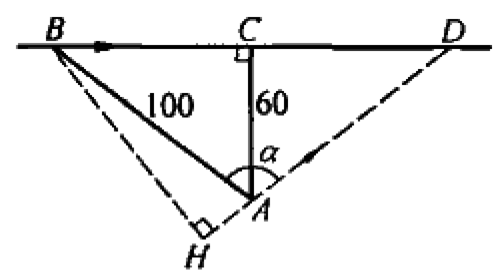


图 5

趣苑拾贝(1)

1 看《刘三姐》做数学题

我国壮族的民间传统有对歌的习俗,看过电影《刘三姐》的同学一定记得,秀才和刘三姐对歌的精彩场面,其中蕴含着的数学问题,反映了我国劳动人民的聪明才智.

故事情节是这样的,地主莫怀仁请来三个秀才,同刘三姐和乡亲们对歌,想压倒刘三姐.陶秀才和李秀才相继被斗败了.这时罗秀才急忙拿出书来,摇头晃脑地唱道:"三百条狗交给你,一少三多四下分,不要双数要单数,看你怎么分得均?"

刘三姐镇定如常,向舟妹眨眼示意,舟妹心领神会作答:"九十九条打猎去,九十九条看羊来,九十九条守门口,剩下三条财主请来当奴才."答得绝妙,气得财主和秀才们七窍生烟,狼狈不堪.

我们来解答罗秀才出的题:

设三群多的每群狗各 x 条,少的一群 y 条,得

$$\begin{cases}3x + y = 300 \\ x > y, \text{且 } x, y \text{ 是正奇数}\end{cases}$$

得
$$x = 100 - \frac{1}{3}y$$

可设 $y = 3t$(t 是正奇数),得

$$x = 100 - t$$

由 $100 - t > 3t$,得 $t < 25$.

所以 t 可取的值为 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23 共 12 个奇数.从而可得原问题的 12 组解 $x = 100 - t, y = 3t$.

舟妹回答的只是 $t = 1$ 的解 $x = 99, y = 3$.

不难发现,舟妹之所以只选了上组解作答,是因为三个秀才恰好与三条狗对应,可谓生动形象,入木三分.

2 山坡上的雪为何薄

同学们,你们那里冬天下雪吗?你是否注意到平地的雪最厚,山坡越陡雪越薄,下面来说明其中的道理.

在寂静的夜晚,雪花飘落在大地上各处的层数一样(图 1),设山坡的坡角为 α,则图中的 $\angle 1 = \alpha$,又设平地上的雪厚为 l,山坡上的雪厚为 h,则 $\cos\angle 1 = \frac{h}{l}$,$h = l\cos\alpha$.

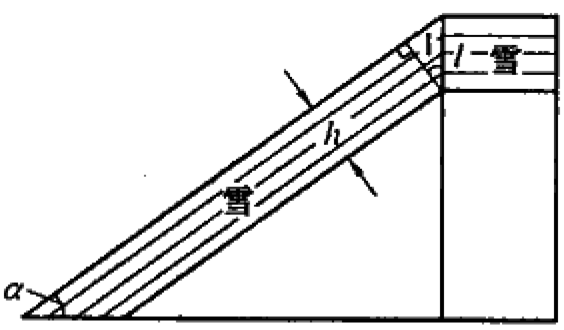


图 1

因为 α 是锐角,所以 $0 < \cos\alpha < 1$,得 $h < l$,即山坡上的雪比平地上薄,坡角 α 越大,山坡上的雪越薄(因为锐角 α 越大时 $\cos\alpha$ 越小).

秦九韶在公元 1247 年成书的《数书九章》中就有以上趣题,但他的解法是别的巧妙方法.

3 以数代文字

“我的女友格兰丝小姐生于 1961 年,这是一个怪有意思的年头,下一个这样的年头要等到 6009 年,真是比王母娘娘 3 000 年一熟的蟠桃还要厉害啊!”白羊先生说.

“她去了美国,我只好做了留守男士,彼此之间信息的交流,一般都是她先打电话来,以免对方付款的麻烦,但是我同她已经有个约定,如有特殊情况,我可以把两个特殊的 8 位数电话号码 57535336 与 19616009 相加起来打过去.

“由于她长久没有消息,我十分忧虑,就用上面的办法试了一试,通过电脑向远在美国的爱人问候,只见电脑显示屏上显出一个奇怪的数字:

77151345

我不解其意,想了半天才恍然大悟,立即去电慰问.”

试问,这一奇怪的数字究竟告诉白羊先生什么重要信息?

77151345 在电脑屏幕上显示出来的字体如下:



把它颠倒过来,一看便是:

She is ill

意即:“她生病了”.

1961 与 6009 颠倒过来看,依旧是原数,保持不变,但这只是一个“引子”而已.

4 做数学题 开发智力

为了培养想象力、洞察力和判断力，考察对象时除了从正面分析外，还常常需要从侧面或反面思考.

题 一家中有一男孩和一女孩，还有一条狗，男孩、女孩分别在离家 2 km 和 1 km 且方向相反的两所学校上学，每天同时放 后分别以 4 km/h 和 2 km/h 的速度步行回家，狗从家在放学时以 6 km/h 的速度奔向男孩又奔向女孩，又从女孩奔向男孩，如此往返直至回家，问小狗奔波了多少路程？

如果男孩和女孩上学时狗也往返奔波在他们之间，问当他们到校时小狗在何处？

解 先解答第一问，通常会这样想：计算狗的各次行程之和（这是高中才学到的无穷递缩等比数列的各项和），而以下算法却很巧妙.

男孩步行到家的时间 = 女孩步行到家的时间 = 狗奔波的时间 = 半小时

所以

$$狗奔波的行程 = 狗的速度 \times 狗奔波的时间 = 6 \times \frac{1}{2} = 3(千米)$$

再解第二问：因为狗第二次的行动路线恰与第一次的行动路线是相反的，第一次狗从家开始走，所以第二次狗停止的位置也在家.

趣苑拾贝(2)

1 数学趣味婚联

某校有三位数学老师分别与语文老师、音乐老师、体育老师喜结良缘，并且举行了集体婚礼.在热闹的婚礼中，一位数学老师给他们分别送上了对联：

横竖撇捺点和钩书开人生爱情花；

和差积商根与幂结出幸福快乐果.

直尺圆规三角板绘出师生情意图；

二胡短笛小提琴奏来夫妻恩爱曲.

指数对数正负数难算情几何；

篮球排球乒乓球可量意多深.

这里还有数学婚联三则，它们有共同的横批为“数形结合”：

加法减法乘除法法法定连理；

中线垂线平分线线线结丝萝.

加减乘除法定代数百年和合；

点线面体缘结几何偕老白头.

数式计算九章代数规矩描绘连理枝；

点线测量三角几何方圆合并结丝萝.

2 算博士

这里说的“算博士”，不是数学博士，他是一位知名文学家，是“初唐四杰”之一的骆宾王.那么，为什么要把骆宾王称为“算博士”呢？

数字在诗文中有着特殊的作用，它常常能增强表现力，且使形式简明，音韵铿锵.下面一首五言诗是人们熟知的：

一去二三里，烟村四五家，

亭台六七座，八九十枝花.

在这短短的一首五言诗中，镶嵌了从一到十十个数字，非但不显得矫揉造作，反而十分简明地描绘出了一幅清雅的自然风光.

又如旧时戏台上常见的一副楹联：

三五人可作千军万马；

六七步走遍四海九州.

都是人们喜爱的数字诗文.然而究竟谁是这方面的代表人物呢?

张烘《朝野金载》卷六记有:"骆宾王文好以数对,如'秦地重关一百二,汉字离宫三十六.'时人号为算博士."看来,这个代表人物非骆宾王莫属了.

3 古诗中的数字"一"

数字"一"在数学中是最简单不过的了,可是经诗人的巧妙推敲安排,能给诗文增添色彩,化平淡为神奇.

唐代李白诗句:"朝辞白帝彩云间,千里江陵一日还."这里数字"一"极言行舟之速,透露出诗人当时轻快的心情.

元代徐再思用"一声梧叶一声秋,一点芭蕉一点愁"来渲染秋色,烘托秋思."几家深树里,一火夜渔归",光景如见,笔笔传神.

最富有情趣的莫过于咏江景的一首七言诗:"一蓑一笠一扁舟,一枝竹竿一条钩.一山一水一明月,一人独钓一江秋."十个"一"字描绘出渔船,渔翁和江中美景.

4 数学家谷超豪少年时

我国著名数学家、原复旦大学校长谷超豪上初中时,数学老师在讲了乘方的知识后,出了两道习题.

第一道是:用四个"1"组成一个最小的数,要求不用任何运算符号,看谁组得既快又准.

同学们的答案五花八门.有的说有 1 111,有的说是 111^1,还有的说是 11^{11},… 这时,谷超豪举手回答:"组成的最小数是 1^{111} 或 $1^{1^{11}}$ 或 1^{11^1} 或 $1^{1^{1^1}}$,即是 1."

第二道是:用三个"9"组成一个最大的数.谷超豪作短暂的思考后,答出"最大的数是 9^{9^9};并说,若将由三个'9'组成的整数按照从大到小的顺序排列,应为 $9^{9^9} > 9^{99} > 99^9 > 999$."

5 沁园春·数学

数苑飘香,千载繁荣,百世流芳.读《九章算术》,何其精彩,《几何原本》,意味深长.复变函数,概率理论,壮阔雄奇涌大江.逢盛世,趁春明日暖,好学轩昂.

难题四处飞扬,引无数英才细参商.仰伽罗华氏,煌煌群论,陈氏定理,笑傲

万方.一代天骄,A·怀尔斯,求证费马破天荒.欣回首,看满园桃李,无限风光.

6 数学诗三首

课堂日记

喜踏铃声进课堂,
五尺身材久沾光;
传神眼色添情感,
插翅思维跨海洋.
烛焰摇红人照影,
窗红送绿树排梁;
每逢证出青兰论,
抱得辉煌却彷徨.

书房题壁

早把痴情人数迷,
腰缠万贯几何题;
滩头拾贝如添子,
枕上描图似扮妻.
举尺能朝星走近,
持规不让月偏西;
三更梦猎追奇解,
回案常忘披睡衣.

人　生

人生多风雨,
拼搏少欢乐.
信念永不变,
终得辉煌果!

7 成语与对应法则 f

请用您熟悉的成语分别写出下列各题的对应法则 f:

(1)f(整) = 零;

(2)f(木) = 舟;

(3)$f\left(\frac{本}{末}\right) = \frac{末}{本}$;

(4)$f\left(\frac{黑}{白}\right) = \frac{白}{黑}$;

(5)f(声 + 色) = 声 + 色;

(6)f^{-1}(败) = 胜.

答案:(1) 化整为零　(2) 木已成舟　(3) 本末倒置　(4) 颠倒黑白　(5) 不动声色　(6) 反败为胜.

8 无中生有

用学过的运算符号(这里的运算不仅仅指加减乘除,还包括括号、绝对值等)把四个0连起来,使其值为24:0　0　0　0 = 24.

答案:$(0! + 0! + 0! + 0!)! = 24$.

9 数学谜语一则

哪一个汉字包括">","<"和"="。

答案:互.

趣苑拾贝(3)

1 烙饼问题

我们都知道,馅饼要一面一面地烙.如果烙熟一面需要5分钟,那么烙熟一只饼就需要10分钟.如果一口锅上能同时烙4只饼,那么烙熟6只饼需要多长时间呢?

有些同学可能会脱口而出,说答案是20分钟,其实再仔细想想,如果安排得当,可以花更少的时间.方法是:先同时烙4只饼,5分钟后,将其中2只翻过来接着烙,另外2只先拿出来,把外面2只未烙的放进锅里,这样,5分钟后,锅内2只已烙熟,剩下的4只一起只要再烙5分钟就都熟了.所以,按此方法总共只需15分钟,不仅节约了时间,而且节约了物力和财力.

2 老汉送马

一老汉为感激梁山好汉除暴安良,带了些千里马要送给梁山好汉.见过宋江后,他把带来的马匹的一半送给了宋江,宋江收下马后,把1匹马作为回礼送还给老汉;老汉又去见卢俊义,把现有剩马的一半送给卢俊义,卢俊义也把1匹马作为回礼送还给老汉;……一直送到108名好汉的最后一名段景住都是这样的.老汉下山回家时还剩2匹马.你知道老汉上山时一共带了多少匹千里马吗?

答案:老汉最初上山时仅带2匹马.

3 比较大小

已知 $a>0, a\neq 1$,不用分类讨论,比较 $\log_a(a+1)$ 与 $\log_a(\frac{1}{a}+1)$ 的大小.

解 $\log_a(\frac{1}{a}+1)=\log_a\frac{a+1}{a}=\log_a(a+1)-1$

所以
$$\log_a(a+1)>\log_a(\frac{1}{a}+1)$$

4 破译算式(用完 1 ~ 9)

$$\begin{array}{r} 大家 \\ \times \quad 都 \\ \hline 爱中 \\ +学生 \\ \hline 数学 \end{array}$$

答案:$17\times 4=68, 68+25=93$.

5 还原等式

算式中的汉字表示 1 ~ 8 中的数字,你能知道吗?

$$\begin{array}{r} 难做无米之炊 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 做无米之炊难 \end{array}$$

解 设难做无米之炊 $=abcdef$,得

$$abcdef\times 3=bcdefa$$

又设 $bcdef=x$,则

$$3(a\times 100\,000+x)=10x+a$$

$$x=42\,857a$$

因为 x 为六位数,所以 $a=1$ 或 2

当 $a=1$ 时,$x=42\,857$;

当 $a=2$ 时,$x=85\,714$.

所以原式为

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \times \quad 3 \\ \hline 428571 \end{array}$$

或

$$\begin{array}{r} 285714 \\ \times \quad 3 \\ \hline 857142 \end{array}$$

6 读报竞赛(十)

有一张正方形纸片,只允许把它剪一刀,再拼成如图1所示的"大元宝",怎么剪?

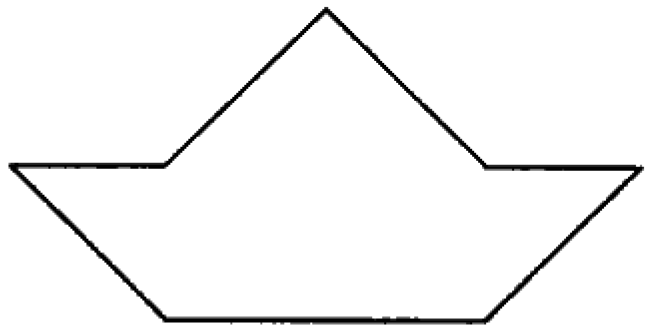


图1

答:将纸片对折,剪去一个45°角,即能拼出元宝形状(图2).

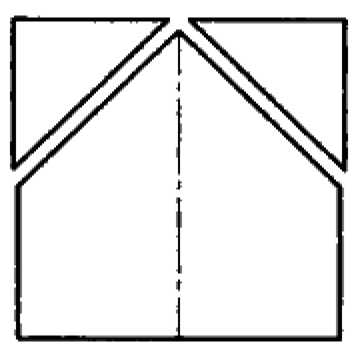


图2

7 读报竞赛(十二)

给你一把直尺,你能在一个已知的正六边形(图3)内画一个面积等于原来正六边形面积的$\frac{1}{27}$的小正六边形吗?

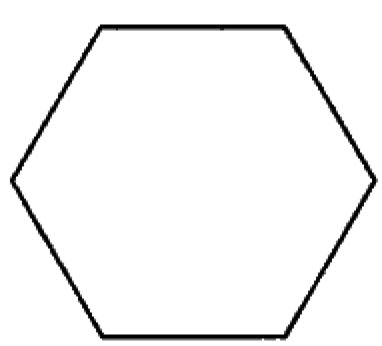


图3

答案:画法见图4所示.

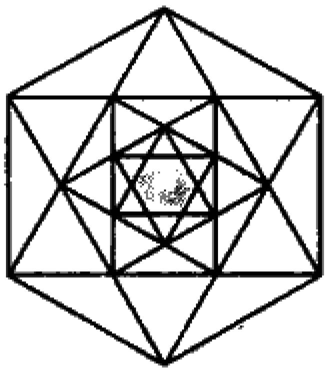


图4

趣苑拾贝(4)

1 “1名数学家 = 10个师”的由来

1943年,正值第二次世界大战.在此之前,在大西洋上的英美运输船队常常受到德国潜艇的袭击.当时,英美两国限于实力,无力增派更多的护航舰,一时间,德军的“潜艇战”搞得盟军焦头烂额,为此,有位美国海军将领专门去请教了几位数学家,数学家们运用概率论分析后发现,舰队与德军潜艇相遇是一个随机事件.按数学角度来看这一问题,有一定的规律.一定数量的船只(如100艘)编队规模越小,编次就越多(如每次20艘,就要有5个编次);编次越多,与敌人相遇的概率就越大.美国海军接受了数学家的建议,命令船队在指定海域集合,再集体通过危险海域,然后各自驶向自己预定的港口,结果奇迹出现了:盟军舰队遭袭被击沉的概率由原来的25%降低为1%,大大减少了损失,保证了物资的及时供应.

2 戒酒戒烟

某人嗜酒如命,醉后常与人吵架.一日,他接到外甥的一封全是数字的来信:

“99:

8179,7954,76229,8406,9405,7918934,1.91817.”

由于他看不懂,于是他就去请教一位数学老师,这位数学老师给他翻译如下:

“舅舅:

不要吃酒,吃酒误事,吃了二两酒,不是动怒,就是动武,吃酒要被酒杀死,一点酒也不要吃.”

舅舅听后,深受感动,从此下决心不再吃酒.

怎么让人把烟戒掉呢?摆事实,讲道理可能都无济于事,来看看经济上的利益驱动吧!

一个收入较低的人,每天只抽一包3.5元的“石林”香烟,若不抽烟,而把这些烟钱每月月底存入银行40年(月利息0.08%,按复利计算,下同),就可得到约6万元.

一个中等收入的人,每天只抽一包7元的“红塔山”,等于抽掉13万元.

一个收入较高的人,每天只抽一包25元的"小熊猫",等于抽掉43万元.从经济方面考虑,抽烟的人也应戒烟啊!

3 足球射门

足球场上有两句顺口溜:"冲向球门跑,越近就越好;斜着球门跑,射点要选好."

我们来看看这是怎么回事.

如图1,设球员接球时位于 C,他尽力沿 D 冲向球门,到 D 后,不仅离球门 AB 近了,射门更有力,而且对球门的张角也增加了,球更容易射中.

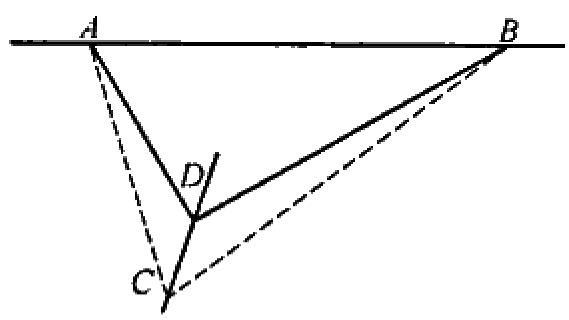


图1

如图2,设球员沿线踢球,射点应选在过点 A,B 且与 l 相切的圆的切点上(可证这样的圆有且仅有两个,一个圆的半径小一些,另一个圆的半径大一些,我们当然应当选其中半径小一些的圆).

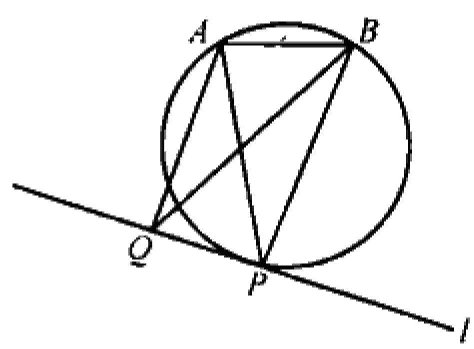


图2

4 书刊长宽的设计

你知道书刊的宽与长是怎么设计的吗?是否与"黄金数"0.618有关呢?这里面有一定的科学道理:

书刊在阅读时总得打开,如果翻开后的形状与其原形相似,那么看起来觉得美观,舒适.

设原形宽,长分别为 b,a,则有

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{2b}$$

得
$$\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\neq 0.618)$$

澄清了以前的错误猜测吧!亲自量一量,是否与以上结论吻合.

5 用四则运算逼近$\sqrt{3}$和$\sqrt{5}$

$$1+2+3+4+5+6+7+8\times 9=100$$
$$-1\times 2-3-4-5+6\times 7+8\times 9=100$$
$$1+2\times 3+4\times 5-6+7+8\times 9=100$$
$$(1+2-3-4)\times(5-6-7-8-9)=100$$
$$1+2\times 3+4+5+67+8+9=100$$
$$1\times 2+34+56+7-8+9=100$$
$$12+3-4+5+67+8+9=100$$
$$123-4-5-6-7+8-9=100$$
$$123+4-5+67-89=100$$
$$123+45-67+8-9=100$$
$$123-45-67+89=100$$

这是小学低年级常见的四则运算趣题.而国外有些杂志及智力俱乐部却举行过下面的智力竞赛:仅仅用0,1,2,3,4,5,6,7,8,9这10个数字组成一道算式,算式中只准使用加、减、乘、除这些四则运算,不过括号或数字连写还是在允许之列;对数字使用的先后顺序也没有严格要求,但绝对不能缺少或重复.最后看谁能使算式运算的结果最接近$\sqrt{3}$或$\sqrt{5}$.

关于$\sqrt{3}$,很多答案都被淘汰,登上冠军宝座的是这样两个算式
$$(5-2\div 3)\times(6-4\div 901)\div(7+8)$$
$$(6+7)\times(2\div 3-4\div 8\,109)\div 5$$

它们的值都等于1.732 050 807 744 44…,与$\sqrt{3}=1.732\,050\,807\,568\,8\cdots$接近.

接近$\sqrt{5}$的最简单的答案是
$$82\,095\div 36\,714=2.236\,067\,984\,964\,8\cdots$$

它与$\sqrt{5}=2.236\,067\,977\,499\,789\cdots$很接近.

与$\sqrt{5}$最接近的答案有三个
$$(90\times 68-1)\times 2\div 5\,473$$
$$2+0+19\times 68\div 5\,473$$
$$2-0+19\times 68\div 5\,473$$

它们的值相等,都等于2.236 067 970 034 7….

数学谜语(初中)

1. 灭火
2. 数字虽小却在百万之上
3. 天下无人敌
4. 旭日东升
5. 一来就干
6. 一加一不是二
7. 添一笔增百倍,减一笔少九成
8. 舌头

(以上各打一数词)

答案:1. 一　2. 一　3. 二　4. 九　5. 十　6. 十　7. 十　8. 千

1. 手足情深一丝牵
2. 祖国再度大一统
3. 耽搁了公事
4. 春风吹又生
5. 追本溯源
6. 岁岁重阳,今有重阳
7. 子牙钓鱼
8. 默许
9. 枕戈待旦
10. 丢了弓背
11. 拉二胡之前
12. 诊断以后
13. 议价
14. 员
15. 垂钓
16. 背着喇叭
17. 鼎足势成魏蜀吴
18. 飞机跑道
19. 并肩前进
20. 断纱接头
21. 一笔债务
22. 两牛打架
23. 大甩卖
24. 再见吧妈妈
25. 大同小异
26. 周而复始
27. 考试不作弊
28. 夏周之间
29. 算盘珠
30. 联合国宪章
31. 剃头
32. 负荆请罪
33. 掰手腕
34. 用手算
35. 从最后一个数起
36. 批评得当
37. 不足为奇
38. 左顾右盼
39. 长相一般
40. 问君知多少
41. 寻找单据
42. 剩下十分钱
43. 两角钱
44. 三十分

45. 人人富裕　　46. 啦叭套子
47. 主动争取　　48. 听候下令
49. 财政赤字　　50. 伪造账目
51. 追问到底　　52. 准备参赛
53. 交换赛场　　54. 热身赛
55. 团体赛　　56. 互相呼喊
57. 中秋明月　　58. 平原铁道
59. 货真价实　　60. 提弦调音
61. 五角一趟　　62. 勤点钞票
63. 两边清点　　64. 有情人终成眷属
65. 合法开支　　66. 打得鸳鸯各一方
67. 马术　　68. 戽
69. 多十分　　70. 集体钓鱼
71. 协议离婚　　72. 打成和局
73. 团体赛　　74. 摩拳擦掌
75. 五四三二一　　76. 邮寄账本
77. 信件统计　　78. 替人查账
79. 查账　　80. 开奖
81. 算术老师的教鞭　　82. 商店盘货
83. 兵对兵，将对将　　84. 左右夹攻
85. 重判　　86. 轻判
87. 车站告示　　88. 待命冲锋
89. 演员招考制度　　90. 五角
91. 刀口　　92. 海峡两岸盼统一
93. 千丝万缕　　94. 互盼
95. 合家欢　　96. 恰如其分
97. 一望无际　　98. 一模一样
99. 哨声响了　　100. 减法没算对

(以上各打一数学名词)

答案：1. 连心线　2. 重合　3. 误差　4. 不尽根　5. 不尽根′　6. 循环节　7. 公垂线　8. 中心对称(心中称对)　9. 等角(角：角斗，战斗)　10. 余弦　11. 正弦　12. 开方　13. 商数　14. 圆心　15. 等于　16. 负号　17. 三角形　18. 直径　19. 平行　20. 延长线　21. 负数　22. 对顶角　23. 绝对值　24. 分子分母　25. 近似　26. 循环　27. 真分数　28. 商　29. 代数　30. 最大公约数

31.除法 32.求和 33.比例 34.指数 35.倒数 36.有理数 37.偶数 38.移项 39.平面 40.几何 41.求证 42.余角 43.倍角 44.三角 45.无穷 46.大于号 47.不等号 48.等号 49.负数 50.无理数 51.求根 52.等比 53.更比 54.相似 55.合比 56.对称 57.圆 58.直径 59.绝对值 60.正弦 61.一元二次 62.常数 63.分数 64.同心圆 65.有理数 66.公分母 67.乘法 68.内角 69.余角 70.公垂线 71.约分 72.平角 73.公共角 74.等角 75.倒数 76.函数 77.函数 78.代数 79.对数 80.对数 81.指数 82.复数 83.同位角 84.二面角 85.加法 86.减法 87.乘法(乘车方法) 88.等号 89.优选法 90.半圆 91.切点 92.同心圆 93.繁分式 94.相等 95.共圆 96.精确值 97.无穷大 98.全等 99.集合 100.误差

1.射线	2. $\frac{7}{8}$
3.5 ÷ 2	4.1,2,5
5. $\frac{二}{五}$	6. − 718
7.等角	8. $1\ 000^2 = 100 \times 100 \times 100$
9. 10^3 与 100^2	10. $1\ 000 \times 10 = 10\ 000$
11.40 ÷ 6	12.2,4,6,8,10
13.0000	14.9999
15.99	16.1%
17. 1^n	18. $1 \times 1 = 1$
19.110	20.7 ÷ 2
21.一	22.十百千
23. + − ×	

(以上各打一成语)

答案:1.有始无终 2.七上八下 3.三心二意 4.丢三落四 5.低三下四 6.横七竖八 7.枕戈待旦 8.千方百计 9.千变万化 10.千变万化 11.陆续不断 12.无独有偶 13.万无一失 14. 万无一失 15.百无一是 16.百里挑一 17.始终如一 18.一成不变 19.一成不变 20.不三不四 21.大有人在 22.万无一失 23.支离破碎(把支分解开即为"+, −, ×")

1.100 − 1	2.一尺一
3. $(10 + 10)^2$	4.一加一不是二
5.左边两个九,右边九十九	6.上下相等,中间不等
7.( ) ÷ 森 = 3	8.晶 × 10 = ( )

9.(　) = 众 × 9　　10.人 + 人 + 人 - (　) = 人
11.多多多多 ÷ (　) = 2　　12.(　) = 昔 ÷ 7
13.(　) + 旭 = 早　　14.一二三四五六七九十

(以上各打一汉字)

答案:1.白　2.寺　3.芳　4.王　5.柏　6.互　7.杂　8.月　9.花　10.从(或天)　11.罗　12.晶　13.旧(或旦)　14.口("只"少"八")

1.54岁(打一明代人名)

2.东坡踏青(打一中国数学家)

3.孩子数星星(打一中国数学家)

4.爷爷打先锋(打一中国数学家)

5.工资法(打一运算律)

6.贸易法(打一运算律)

7.三八二十四(打一体育用语)

8.回眸一笑百媚生(打一中国数学家)

9. 解析几何(打一口头用语)

10.博览群书(打一中国数学家)

11.力(打一珠算口诀)

12.圆规画鸡蛋(打一城市名称)

13.两个寨子隔条岗,南寨没有北寨强;南寨好汉有五条,不及北寨人一双(打一数学用具)

14.歪(打数学三名词)

15.一个邮递员掀起了信箱的盖子,在清点有多少信件,请根据这一情况猜出三个数学名词.

16.将下面两个算式还原:

　　官教兵
×　兵教官
―――――
官兵教教官

答案:1.陆九龄　2.苏步青　3.苏步青　4.祖冲之　5.分配律　6.交换律　7.女子双打　8.杨乐　9.十八斤(把"析"分解开)　10.张广厚　11.二一添作五　12.太原　13.算盘　14.大于、小于、分子　15.开立方、函数、几何　16.301 × 103 = 31 003

数学谜语(高中)

1.欲破曹兵箭不足

2.家书抵万金

3.一口人

4.荆轲刺秦王

5.儿童储蓄

6.聚散无常

7.身高

8.会谈

9.欲言又止

10.浮萍

11.走致富之路

(以上各打一数学名词)

答案:1.矢量差 2.函数值 3.组合 4.展开图 5.微积分 6.不定积分 7.立体几何 8.集合论 9.控制论 10.不定根 11.趋向无穷

1.$0! = 1$

2.$\begin{cases} x = \cot t \\ y = \sin t \end{cases}(0 \leqslant t < 2\pi)$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ 的轨迹

(以上各打一成语)

答案:1.无中生有 2.如出一辙

不可或缺的常数

有一个数字,它是变量数学中不可缺少的常数,它是描述自然界各种连续变化的有力工具,它是自然界纷繁复杂背后隐藏的基本规律,它是伟大的数学家欧拉的杰出创造,它能使微积分的运算简洁方便,它是数学家看着就亲切的一个数字.它就是

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 45\cdots$$

假如你把1元钱存入银行,银行的年利率是100%(这只是一个假设),银行允许中间取本息,而且利息是平均分到各个时段的.比如把:你要是只存一个月你将拿到$\frac{13}{12}$元这么多的本息.这时如果不嫌麻烦你可以选择半年取一次钱,在连本带息的存入银行,这时年末你将得到

$$(1+\frac{1}{2})^2 = 2.25\ (元)$$

如果你还想多得钱,可以把一年分三段来取款,并连本带息存入,你将得到

$$(1+\frac{1}{3})^3(元)$$

如果你不嫌麻烦,银行允许,你将多跑几次银行,甚至坐在银行取款台那里不走,如果你把一年分成 n 次,你将得到

$$(1+\frac{1}{n})^n(元)$$

你完全可以相信,取的次数越多,最后得到的钱越多.但是最多能得多少呢?最多就能得到 $e = 2.718\ 281\ 828\ 45\cdots$ 元了.如果把利息由1变为 x,那么最多能得到 e^x 元.

这个数是用来描述自然界连续累加变化不可缺少的常数,自然界的经济增长和衰退,放射性元素的衰变,冰层的厚度,等等都离不开用这个数字来描述.

但 e 不是有理数,并且也不是任何整系数方程的根,所以 e 也是一个超越数.

巧填数学词语

在下面的横线上填一个数学词语,要求前后是两个词语.

1.不计其____而不厌　　2.寥寥无____去何从

3.平庸无____米而炊　　4.无独有____一数二

5.令人发____九寒天　　6.习以为____体裁衣

7.唯利是____影不离　　8.克己奉____直气壮

9.举棋不____所不然　　10.疲于奔____山题海

11.死而后____无不言　　12.推理论____哲保身

13.意志坚____愤填膺　　14.不约而____放思想

15.异想天____兴未艾　　16.理屈词____世闻名

17.五脏俱____价交换　　18.穷形尽____是而非

19.破镜重____旷神怡　　20.举足轻____安理得

21.九霄云____驰神往　　22.迎刃而____对如流

23.一窍不____秒必争　　24.有机可____网恢恢

答案:1.数学　2.几何　3.奇数　4.偶数　5.指数　6.常量　7.图形　8.公理　9.定理　10.命题　11.已知　12.证明　13.定义　14.同解　15.开方　16.穷举　17.全等　18.相似　19.圆心　20.重心　21.外心　22.解答　23.通分　24.乘法

$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ 的推广

容易用数学归纳法证明

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2 \quad ①$$

能推广该式吗?

显然,由 ① 可得

$$(1^3+2^3+\cdots+n^3)(1^3+2^3+\cdots+k^3)=(1+2+\cdots+n)^2(1+2+\cdots+k)^2 \quad ②$$

在 ② 中令 $n=k=2$,或 $n=2,k=3$ 并展开,可得

$$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2 \quad ③$$

$$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=(1+2+2+3+4+6)^2 \quad ④$$

19 世纪法国数学家李乌维里曾得到过一种推广式 ① 的有趣方法:

设 N 是一个任意的正整数,先求出 N 的全部正约数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$;再求出这些正约数的正约数的个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,则有

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \quad ⑤$$

不妨先来看两个具体的实例:

(1)10 有四个正约数 1,2,5,10.1,2,5,10 的正约数的个数分别是 1,2,2,4. 把它们代入式 ⑤,即得式 ③.

(2)12 有六个正约数 1,2,3,4,6,12.1,2,3,4,6,12 的正约数的个数分别是 1,2,2,3,4,6.把它们代入式 ⑤,即得式 ④.

式 ⑤ 的证明有些难懂,这里就不介绍了.

参考文献

[1] 孙维梓.立方的和 = 和的平方[J].中学科技,2005(5):14.

国语中的数字

数字本身有深刻的美的内容.数字和一些美好的事物联系在一起,会给人以美的享受.如十个数字:

一元复始,一帆风顺;
双喜临门,二度梅开;
三阳开泰,三思而行;
四通八达,四海为家;
五世其昌,五官端正;
六根清净,六艺,六韬,六合,六极;
七情六欲,七曜,七略;
八面玲珑,八面威风,八仙,八卦;
九霄云外,九转金丹;
十全十美.

广为传颂的《秀才赴京赶考》与《文君复书》,把数字用活,体现了数字别具一格的神韵美.《秀才赴京赶考》是说明朝时有一位穷书生,历尽千辛万苦赶往京城应试,由于交通不便,赶到京城时试期已过.经他苦苦哀求,主考官让他先从一到十,再从十到一作一对联.穷书生想起自己的身世,当即一气呵成:

一叶孤舟,坐着二三个骚客,启用四桨五帆,经过六滩七湾,历尽八颠九簸,可叹十分来迟.

十年寒窗,进了九八家书院,抛却七情六欲,苦读五经四书,考了三番二次,今天一定要中.

几十载的人生之路,通过十个数字形象深刻的表现出来了.主考官一看,拍案叫绝,并把他排在榜首.

加法“链条”

你可以随便取一个大于 1 的奇数,然后把这个奇数表示为两个正整数的和,如 $17 = 2 + 15$ 或 $17 = 6 + 11$ 等.一般说来,我们总能把一个奇数写成 $p + q$ 的形式,并规定把小一点的加数作为 p 放在前面,把大一点的加数作为 q 放在后面.接下去的操作就是要你把 p 改成 $2p$,同时把另一个加数 q 减去 p,这样它们的总和当然不会改变.你得每次把 $p + q$ 改为 $2p + (q - p)$,记为 $p + q \to 2p + (q - p)$.在大多数情况下,你完全可以像这样操作若干次.

以刚才的 17 为例:$17 = 1 + 16 \to 2 + 15 \to 4 + 13 \to 8 + 9 \to \cdots$ 到这里必须叫停,因为再接下去就会又出现 $16 + 1$,按规定就还得写成 $1 + 16$,回到了原始状态,也就是出现循环,所以这根“链条”的长度(其实是循环的长度)应当确定为 4 节.

如果我们变一种组合来写呢?例如,还可以把 17 写成 $3 + 14$,这时就会有 $17 = 3 + 14 \to 6 + 11 \to 5 + 12 \to 7 + 10 \to \cdots$ 到这里又得叫停,因为下面又回到了 $3 + 14$,所以这根“链条”的长度还是 4 节.

也许有同学说:“这种操作很平常,那么它奇特在哪里呢?”

别忙,我们不妨再用 21 来试验一下,看看 21 能有几根“链条”?长度各是多少?

(1)$21 = 1 + 20 \to 2 + 19 \to 4 + 17 \to 8 + 13 \to 5 + 16 \to 10 + 11 \to \cdots$

(2)$21 = 3 + 18 \to 6 + 15 \to 9 + 12 \to \cdots$

(3)$21 = 7 + 14 \to \cdots$

21 只有三根“链条”,它们的长度分别为 6 节,3 节,1 节,长度并不相同.

有不少数只有一根“链条”,如 11,13 等,那就谈不上什么“链条”长度相同不相同了.

请注意:大于 1 的奇数包括质数和合数.质数就如刚才的 17,它的两条“链条”长度相同;而合数就如刚才的 21,它的三根“链条”长度并不相同.那么,这是不是普遍规律呢?

其实,凡是奇质数必然具有相同长度的加法“链条”,凡是奇合数必然具有不同长度的加法“链条”.证明这一点并不容易.

买土地的故事

俄国大文豪托尔斯泰的短篇小说《人需要很多土地吗?》中有下面的一段故事:

有一个人要卖地,他规定太阳一出来,来买地的人就可以出去跑,一天跑路圈出来多大地方,这块地就属于他,价格是一千卢布,但太阳落山时,必须回到出发地,否则一千卢布就白花了.

有一个叫巴霍姆的人去买地,太阳一出来他就开始跑,巴霍姆先向前跑了10俄里才开始向左拐去,又跑了许多路再向左拐第二个直弯,此时正值中午,烈日当头,饥渴难耐,巴霍姆又跑了2俄里,还有15俄里赶近路终于在太阳落山时回到了出发地,但随即倒地不省人事,当家人告诉他圈出的地不值一千卢布时,巴霍姆立刻吐血而亡.

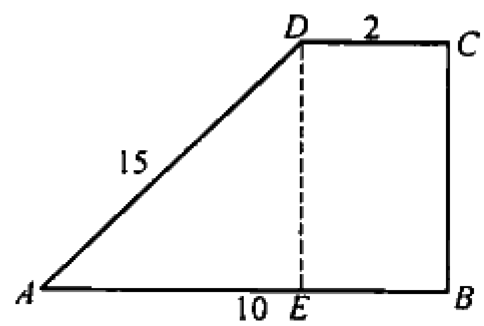


图 1

托尔斯泰通过小说告诫世人,人不能贪得无厌,宝贵的是生命,重要的是人的智慧.

故事涉及的是一道数学题,相传数学家托翁少年时对数学有着浓厚的兴趣,经常做一些有趣但不太难的数学题,他就解答过本题.

我们按小说的描述,可以画出巴霍姆的路线图(图 1)有 $BC = ED = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 13$(俄里),巴霍姆跑过的路程约是 40 俄里,圈出地的面积约为 $\frac{1}{2}(2 + 10) \times 13 = 78$(平方俄里).

通过以上分析,我们自然还会提出"最佳路线"问题:跑同样的路,怎样才能圈出最大的面积?

现在我们还只能作出猜测:圆形时面积最大!

漂洗衣服

在洗衣服时,衣服上已打好了肥皂,揉搓得很充分了,再拧一拧,当然不能把水全部拧干,设衣服上还有残留污物的水1千克,用20千克的清水来漂洗,怎样才能漂洗得更干净?

方案1 如果把衣服一下子放到20千克的清水中,那么连同衣服上那1千克水,一共21千克水.让污物均匀分布到这21千克水中,拧"干"后,衣服上还有1千克水,所以污物残留量是原来的$\frac{1}{21}$.

方案2 通常我们会把20千克水分两次用,比如,第一次用5千克,可使污物减少到$\frac{1}{6}$;再用15千克水,污物又减少到$\frac{1}{6}$的$\frac{1}{16}$,即$\frac{1}{96}$.分两次漂洗,效果好多了!

方案3 同样分两次漂洗,也可以每次用10千克水,每次可使污物减少到原来的$\frac{1}{11}$,两次漂洗后,污物减少到原有量的$\frac{1}{121}$.

我们再研究如下问题:

(1) 用a千克清水漂洗衣服,若分两次漂洗,每次各用多少千克清水,漂洗得最干净?

(2) 用a千克清水漂洗衣服,若分n次漂洗($n \geqslant 2$),每次各用多少千克清水,漂洗得最干净?

(3) 用a千克清水漂洗衣服,应分几次漂洗,每次各用多少千克清水,漂洗得最干净?

(4) 研究每次漂洗干净程度的提高率.

我们可以选一个简单的具体情形予以研究,得到如下结论:

(1) 平均使用:每次使用$\frac{a}{2}$千克清水.

(2) 平均使用:每次使用$\frac{a}{n}$千克清水.

(3) 平均使用水,且漂洗的次数越多,漂洗得越干净.

(4) 提高率会随着漂洗的次数逐渐降低,所以漂洗的次数太多了也无多大意义.

(由问题(4)还可提出漂洗衣服中的节水、节能问题,环保问题;为什么洗衣机只漂洗两次?)

求 $1+2+\cdots+n$ 的异类问题

问题1　在 $1\pm 2\pm\cdots\pm 100$ 中的"$\pm$"如何确定"+","-",可使结果为0?

请注意,$k-(k+1)-(k+2)+(k+3)=0$,所以问题1的一个答案为:

$(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+(9-10-11+12)+\cdots+(97-98-99+100)=0$(这里的"(　)"应去掉,添上"(　)"是为了让读者更容易看出规律.下同).

一般的,当 $n=4k(k\in\mathbf{N}^*$,下同)时,有

$$(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+[(4k-3)-(4k-2)-(4k-1)+4k]=0$$

当 $n=4k-1$ 时,有

$$(1+2-3)+(4-5-6+7)+(8-9-10+11)+\cdots+[(4k-4)-(4k-3)-(4k-2)+(4k-1)]=0$$

问题2　在 $1^2\pm 2^2\pm\cdots\pm 200^2$ 中的"$\pm$"如何确定"+","-",可使结果为0?

请注意,$k^2-(k+1)^2=-(2k+1)$,又

$$-(2k+1)+[2(k+1)+1]+[2(k+2)+1]-[2(k+3)+1]=0$$

所以

$$k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2-(k+4)^2+(k+5)^2+(k+6)^2-(k+7)^2=0$$

所以问题2的一个答案为

$$(1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2)+(9^2-10^2-11^2+12^2-13^2+14^2+15^2-16^2)+\cdots+(193^2-194^2-195^2+196^2-197^2+198^2+199^2-200^2)=0$$

一般的,当 $n=8k$ 时,有

$$(1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2)+(9^2-10^2-11^2+12^2-13^2+14^2+15^2-16^2)+\cdots+[(8k-7)^2-(8k-6)^2-(8k-5)^2+(8k-4)^2-(8k-3)^2+(8k-2)^2+(8k-1)^2-(8k)^2]=0$$

问题3　在 $1\times 2\pm 2\times 3\pm\cdots\pm 200\times 201$ 中的"$\pm$"如何确定"+","-",可使结果为0?

请注意,$k(k+1)-(k+1)(k+2)=-2(k+1)$,又

$$-2(k+1)+2(k+2)+2(k+3)-2(k+4)=0$$

所以

$$k(k+1)-(k+1)(k+2)-(k+2)(k+3)+(k+3)(k+4)-(k+4)(k+5)+(k+5)(k+6)+(k+6)(k+7)-(k+7)(k+8)=0$$

所以问题 2 的一个答案为

$$(1\times2-2\times3-3\times4+4\times5-5\times6+6\times7+7\times8-8\times9)+(9\times10-10\times11-11\times12+12\times13-13\times14+14\times15+15\times16-16\times17)+\cdots+(193\times194-194\times195-195\times196+196\times197-197\times198+198\times199+199\times200-200\times201)=0$$

一般的,当 $n=8k$ 时,有

$$(1\times2-2\times3-3\times4+4\times5-5\times6+6\times7+7\times8-8\times9)+(9\times10-10\times11-11\times12+12\times13-13\times14+14\times15+15\times16-16\times17)+\cdots+[(8k-7)(8k-6)-(8k-6)(8k-5)-(8k-5)(8k-4)+(8k-4)(8k-3)-(8k-3)(8k-2)+(8k-2)(8k-1)+(8k-1)8k-8k(8k+1)]=0$$

数学格言四则

有一句著名的格言说数学比科学大得多,因为它是科学的语言.数学不仅用来写科学,而且可以用来描写人生.下面介绍几位名人的人生格言,它们都是用很简单的"数学"(数字,符号,数学概念,式子等)来表达的,而且是那么深刻,绝妙.

1 托尔斯泰的分数

俄国大文豪托尔斯泰在谈到对人的评价时,把人比做一个分数.他说:"一个人就好像一个分数,它的实际才能好比分子,而他对自己的估价好比分母.分母越大,则分数的值就越小."

2 雷巴科夫的常数与变数

俄国历史学家雷巴科夫在利用时间方面是这样说的:"时间是个常数,但对勤奋者来说,是个'变数'.用'分'来计算时间的人比用'小时'来计算时间的人时间多59倍."

3 季米特洛夫的正负号

著名的国际工人运动活动家季米特洛夫在评价一天的工作时说:"要利用时间,思考一下一天之中做了些什么,是'正号'还是'负号',倘若是'+',则进步;倘若是'-',就得吸取教训,采取措施."

4 芝诺的圆

古希腊哲学家芝诺关于学习知识是这样说的:"如果用小圆代表你们学到的知识,用大圆代表我学到的知识,那么大圆的面积是多一点,但两圆之外的空白都是我们的无知面.圆越大其圆周解触的无知面就越多."

数学趣题

1. 有一根均匀的绳子,从头烧到尾总共需要1小时.现在有若干条相同的绳子,问如何用烧绳的方法来计时1小时15分钟呢?

解 需要三根绳子(设这三根绳子为 A,B,C),步骤如下:

(1)A 从两头烧,同时 B 从一头烧;

(2)A 烧完(为30分钟)后立刻烧 B 另一头,B 也烧完后为45分钟;

(3)B 烧完后立刻烧 C 两头,C 烧完后即为1小时15分钟.

2. 一个岔道路口分别通向诚实国和说谎国.来了两个人,一个是诚实国的,另一个是说谎国的.诚实国的人永远说真话,说谎国的人永远说谎话.现在你要去说谎国,但不知道应该走哪条路,需要问这两个人.请问应该怎么问?

解 问他们"去你的国家怎么走",他们肯定指向的都是诚实国.

3. 王教授想找出两个数码 a,b(数码只能是0,1,2,3,4,5,6,7,8,9),使得分数 $\frac{a}{b}$ = 小数 $\overline{a.b}$.请问他能做到这一点吗?

解 不能.否则得 $\frac{a}{b}=a+\frac{b}{10}, a=ab+\frac{b^2}{10}$,只能 $b=0$.而 b 在分母上,说明这样的 a,b 是不存在的.

4. 用96朵红花和72朵白花做成花束,如果各束花里红花的朵数相同,白花的朵数也相同,则每束花里最少有几朵花?

解 因为制成的每束花的朵数最少,所以制成的花束最多.

先求96与72的最大公约数,为24,所以制成的花束为24束.

得每束花里含4朵红花,3朵白花,即每束花里最少有7朵花.

5. 俄罗斯至今还在使用5分制.某学生在一学期内参加了10次测验,有的得3分,有的得4分,有的得5分,平均成绩为4.6分.那么这三种分数他各得了几次呢?

解 设该学生得了 x 次3分,y 次4分,$(10-x-y)$ 次5分,得

$$3x+4y+5(10-x-y)=4.6\times 10$$

$$2x+y=4$$

又 x,y 是正整数,所以 $x=1,y=2$.得该学生得了1次3分,2次4分,7次5分.

6. 两个朋友在闲谈. 一个说:“如果把我在43岁那年的公元数,乘以我45岁那年的公元数,再除以我出生那年的公元数,那么所得数也将是个公元数,在那一年我孙子就将……”

他刚说到这里,另一人就接口说:“我已经知道你出生在哪一年了!”请问这样说是有把握的吗?

解 设第一人出生在公元 x 年,得

$$\frac{(x+43)(x+45)}{x}=x+88+\frac{1\,935}{x}$$

的值是个公元数,必 $x=1\,935$,因为再小是不现实的. 即第一人出生在公元1 935年.(以上代数式的值是2 024,或许是他孙子满多少岁的时间,题中没作具体说明.)

7. 将1,2,3,4,5,6,7,8,9分别填入下边的算式,使之成立:

$$\bigcirc\bigcirc\times\bigcirc\bigcirc\bigcirc=\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

解 $12\times483=5\,796$.

8. 两块边长都为10米的正方形土地,有两头牛分别被拴在木桩上,一头被拴在角落,绳长10米;另一头被拴在中央,绳长5米. 哪头牛吃到的草多?(草地上的草长得均匀)

解 一头牛吃草的面积是半径为10米,圆形角为直角的扇形的面积;另一头牛吃草的面积是半径为5米的圆的面积. 这两块面积相等,均为 25π 平方米. 所以两头牛吃的草一样多.

9. 有红、黄、绿三种颜色的珠子各10粒,将其放进盒子里,如果我被蒙上眼睛去取这些珠子,请问:

(1) 我一次最少要取出多少粒才能确保出现三种不同颜色的珠子?

(2) 我一次最少要取出多少粒才能确保出现三种相同颜色的珠子?

解 (1)21粒;(2)7粒.

10. 100个和尚分100个馒头. 老和尚1人分3个,小和尚3人分1个,请问老和尚,小和尚各多少?

解 把1个老和尚和3个小和尚分成一组,每一组分4个馒头. 分成25组刚好符合题意.

所以老和尚,小和尚分别为25人,75人.

11. 把 $\underbrace{99\cdots9}_{n个9}{}^3$ 计算出来的结果(是一个十进制数)的各位数字相加,得到的结果是多少?

解 $\underbrace{99\cdots9}_{n个9}{}^3=(10^n-1)^3=10^{3n}-3\times10^{2n}+3\times10^n+1=$

$$\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}7\underbrace{00\cdots0}_{(n-1)\text{个}0}2\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}$$

所以所求结果是 $18n$.

12. $1^2+2^2+\cdots+2\,007^2$ 能写成 2 006 个不同的完全平方数之和吗?

解 可以,这是因为

$$1\,206^2+1\,608^2=(3\times402)^2+(4\times402)^2=(5\times402)^2=2\,010^2$$

13. 有一位寡妇要把前夫的遗产 3 500 元与自己的子女拆分. 根据当地的习俗规定,如果有一个儿子,母亲可得到儿子应得部分的一半; 如果有一个女儿,母亲可得到女儿遗产的 2 倍. 可她生下的是孪生儿女,有男孩也有女孩,应当怎样分配这笔遗产呢?

解 设母亲,儿子,女儿分得的遗产分别为 x 元,y 元,z 元,得

$$\begin{cases}x+y+z=3\,500\\x=\dfrac{y}{2}\\x=2z\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=1\,000\\y=2\,000\\z=500\end{cases}$$

所以母亲,儿子,女儿分得的遗产分别为 1 000 元,2 000 元,500 元.

数学天才——诺伯特·维纳

诺伯特·维纳(1894—1964)是20世纪最伟大的数学家之一,是信息论的先驱,又是控制论的创始人.从1940年开始,维纳与电工学家,生理学家,计算机设计家,通信工程师以及其他数学家开展广泛的合作,终于在1948年出版了他的名著《控制论》,宣告了控制论这门学科的诞生.

诺伯特·维纳之所以被称为天才是因为他有着传奇的经历.他智力超群,3岁能读写,7岁能攻读但丁和达尔文的著作,被称为"神童".14岁大学毕业,不到20岁就获得了美国著名学府哈佛大学的博士学位.

在博士学位的授予仪式上,主持人不知道诺伯特·维纳的实际年龄,见他一脸稚气,不禁引发了好奇心,当面问他的年龄.维纳的回答十分有趣:"我的年龄的立方是个四位数,年龄的四次方是个六位数,而且真是无巧不成书,它们正好把0,1,2,3,4,5,6,7,8,9全都用上了,还不重不漏."

亲爱的读者,你知道诺伯特·维纳获得博士学位时的年龄吗?

可以这样分析这道趣题:

由于$22^3 = 10\,648$已经超过了四位数,又因为$17^4 = 83\,521$不是六位数,所以所求年龄只能在18,19,20,21中去找.

由于$20^3 = 8\,000$,$19^4 = 130\,321$,$21^4 = 194\,481$都出现了数字重复的现象,剩下的只有18了,它符合题意吗?就请自己验证吧!

自叙数与反自叙数

你听说过自叙数吗?顾名思义,就是一种能刻画出自己“特点”的数.具体地说,自叙数从左到右的第一个数字表示它共含几个1,第二个数字表示它共含几个2,……,第九个数字表示它共含几个9,第十个数字表示它共含几个0.

这种奇特的自叙数存在吗?迄今为止,我们知道的自叙数只有一个,它就是2 100 010 006.

不难看出,自叙数的构造极为严密,牵一发而动全身.寻找它的工作举步维艰.无独有偶,其伴随问题也很难:是否存在“反自叙数”?

反自叙数的定义是:反自叙数从左到右的第一个数字表示它含几个非1的数字,第二个数字表示它含几个非2的数字,……,第九个数字表示它含几个非9的数字.

反自叙数是不能含0的,否则会出现矛盾!若它的第k位数字是0,就表示它含有0个非k数字,于是他的所有数字都是k,这又与它含有0相矛盾!所以反自叙数是九位数而不是十位数.进一步还能判断出反自叙数不会含有从1到9的所有数字.

999 899 874就是一个反自叙数.

同学们若有精力,也可试着寻找自叙数和反自叙数,还可定义出别的有意义的数.

最高的、最矮的

班上有64位同学,身高都有一些微小差异.让他们排成8行8列的方阵.如果从每一行8位同学中挑出一位最高的,那么在挑出的8位同学中一定有一位最矮的同学 A.让这些同学回到各自原来的位置站好后,再从每一列8位同学中挑出一位最矮的,那么在挑出的8位同学中一定有一位最高的同学 B.且假定 A 与 B 是不同的两个人,你看他们谁高?

这是一个很有趣的问题,但要做出满意的回答,却需动动脑筋.首先遇到的问题是 A,B 两位同学的位置无法确定,更何况64人排成8行8列的方阵,其排法又何止千万!

但是,问题真的那么复杂,那么难以解决吗?数学的方法可以为你帮很大的忙.A,B 两位同学在方阵中的位置不外乎以下三种情况:

(1)A 与 B 在同一行.这时 A 是从这一行中挑出的最高的,所以 A 比 B 高.

(2)A 与 B 在同一列.这时 B 是从这一列中挑出的最矮的,所以还是 A 比 B 高.

(3)A 与 B 既不同行,也不同列.如图1,我们总可以找到一个 A 所在的行与 B 所在的列相交的位置,假定排在这个位置上的是同学 C,则由题设得 A 比 C 高,C 比 B 高,所以仍然是 A 比 B 高.

综上所述,不论哪种情形,A 总比 B 高.

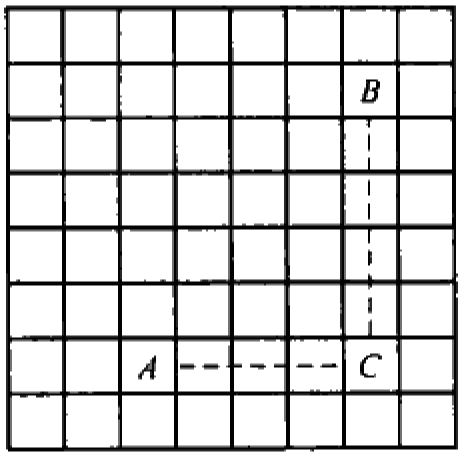


图1

最美的数学定理

1988 年,David Wells 在一家著名的国际性普及数学杂志《The Mathematical Intelligencer》(Vol.10 No.4)上曾就《哪一个是最美的?》做过调查. Wells事先给了读者 24 个选项,要求世界各地的数学爱好者对每一条,根据它们"美"的程度,打上0到10之间的一个分数.因为该杂志的读者群大都为专业数学家,所以可以认为评选结果反映的是数学家们的看法.最终"$e^{i\pi}+1=0$"以 7.7 分获得"最美的数学定理"的称号,被认为最美的前 10 名如表 1 所示.

表 1

排行	定理	排行	定理
1	$e^{i\pi}+1=0$	6	不动点定理
2	欧拉多面体公式: $V+F-E=2$	7	不存在平方为 2 的有理数
3	质数有无穷多个	8	π 是超越数
4	只存在五种正多面体	9	四色定理
5	$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$	10	每个形如 $4N+1$ 的质数必可唯一的表示成两个完全平方数的和

2000 年,台湾师大数学系的谢佳睿先生对台湾师大数学系本科大一至大四每个年级约 100 名学生及 40 名研究生进行了调查.问卷提供了 29 个候选项和 1 个空白项以供选择和填写.问卷调查了 3 个方面:最美的数学式子,最有用的数学式子,最想知道其发展史的数学式子,每个问题至多填写 5 个选项,不分顺序.其前两项统计如表 2,3 所示.

表 2

排行	大一	大二	大三	大四	大学部合计	研究生
1	泰勒公式	毕氏定理	泰勒公式	泰勒公式	泰勒公式	欧拉公式 $V+F-E=2$
2	毕氏定理	泰勒公式	毕氏定理	毕氏定理	毕氏定理	毕氏定理
3	Fibonacci 数列	Fibonacci 数列	海伦公式	$e^{i\pi}+1=0$	Fibonacci 数列	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$
4	海伦公式	欧拉公式 $V+F-E=2$	欧拉公式 $V+F-E=2$	欧拉公式 $V+F-E=2$	欧拉公式 $V+F-E=2$	$e^{i\pi}+1=0$
5	$e^{i\pi}+1=0$	正弦定理	Fibonacci 数列	海伦公式	海伦公式	$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$
6	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$	海伦公式	$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$	Fibonacci 数列	$e^{i\pi}+1=0$	泰勒公式
7	欧拉公式 $V+F-E=2$	$e^{ix}=\cos x+i\sin x$	$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$e^{ix}=\cos x+i\sin x$	正弦定理	Fibonacci 数列
8	正弦定理	$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$	正弦定理	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$	$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$	$e^{ix}=\cos x+i\sin x$
9	$\lg 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$	质数定理	三角形内角和为 180°	正弦定理	$e^{ix}=\cos x+i\sin x$	质数定理
10	$e^{ix}=\cos x+i\sin x$	$e^{i\pi}+1=0$	$e^{i\pi}+1=0$	点线距离	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$	海伦公式

表 3

排行	大一	大二	大三	大四	大学部合计	研究生
1	毕氏定理	毕氏定理	毕氏定理	毕氏定理	毕氏定理	毕氏定理
2	泰勒公式	泰勒公式	三角形内角和为 180°	泰勒公式	泰勒公式	泰勒公式
3	点线距离	三角形内角和为 180°	$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	三角形内角和为 180°	$C_n^m=\frac{m!}{n!(n-m)!}$
4	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$	$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	泰勒公式	三角形内角和为 180°	$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
5	$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	海伦公式	点线距离	圆周长 $=2\pi r$	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$	三角形内角和为 180°
6	三角形内角和为 180°	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$	圆面积 $=\pi r^2$	点线距离	圆面积 $=\pi r^2$
7	圆面积 $=\pi r^2$	$C_n^m=\frac{m!}{n!(n-m)!}$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$e^{ix}=\cos x+i\sin x$	圆面积 $=\pi r^2$	点线距离
8	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	圆面积 $=\pi r^2$	$C_n^m=\frac{m!}{n!(n-m)!}$	$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$
9	$C_n^m=\frac{m!}{n!(n-m)!}$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	海伦公式	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$C_n^m=\frac{m!}{n!(n-m)!}$	
10	海伦公式	点线距离	圆周长 $=2\pi r$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	

2005 年 6 月，香港数学资料库网站也曾经就最美的数学定理进行过网上调查，候选定理有 25 个，但是参加这一评选的人不多，具体结果这里就不作介绍了.

参考文献

[1] 李俊."最美数学定理"的几次评选[J].数学教学,2007(11):45-47.

趣题"四位王子"

文献[1]叙述了一道趣题"四位王子":

东方某国家的领土是正方形.一天,国王发现自己的四个儿子不仅有手足相残的阴谋而且密谋策划反对自己.国王听了自己机密顾问的意见后作出决定,用不着把王子们关入牢狱,只需把他们押送到国境的四个角落里去,每一个角落划出相等面积的三角形区域,绝不允许王子们越过自己的三角形区域,否则就要处以极刑.但是,国王的地形测量者遇到了由于这个边缘荒凉的自然地貌引起的巨大困难.结果,还是给每位王子划出了相等面积的区域,且四个三角形区域的形状互不相同(图1).难题是要求出四个面积相等的整边直角三角形(即三边长都是整数的直角三角形,也叫做勾股形),使它们的面积最小,且这四个三角形的形状互不相同.

下面介绍文献[1]给出的解答:

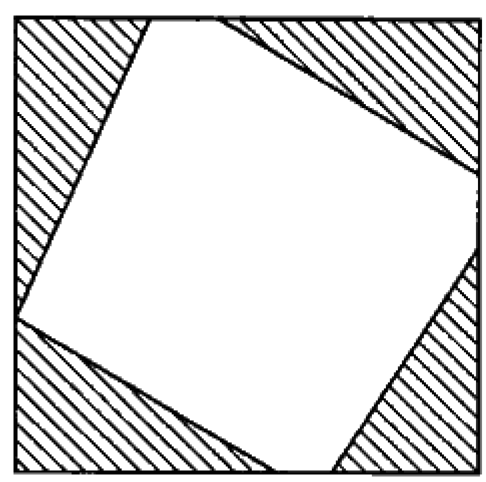


图1

定理1 设 $a=m^2+mn+n^2, b=m^2-n^2, c=2mn+n^2$,其中 $m,n\in\mathbf{N}^*, m>n$,则分别以 $(2ab, a^2-b^2, a^2+b^2)$, $(2ac, a^2-c^2, a^2+c^2)$, $(2a(b+c), (b+c)^2-a^2, (b+c)^2+a^2)$ 为三边的三个整边直角三角形的面积均为 $mn(m+n)(m-n)(m+2n)(2m+n)(m^2+mn+n^2)$.

定理2 在定理1中,若 $(m,n)=1, 2\nmid mn, 3\nmid m-n$,则得到的三个整边直角三角形的三边均互素(三边均互素的整边直角三角形也叫做基本勾股形).

定理2说明,三个面积相等的(基本)勾股形有无数组.这就解答了文献[2]提出的问题(三个面积相等的(基本)勾股形有多少组?请求出最小者;三个周长相等的(基本)勾股形有多少组?请求出最小者)之一.

定理3 若四个互不相同的整边直角三角形的面积相等,且它们的面积最小,则这四个三角形的三边分别是(518,1 320,1 418),(280,2 442,2 458),(231,2 960,2 969),(111,6 160,6 161),且这四个三角形的面积均为341 880.

$k(k\geqslant 4)$个面积相等的基本勾股形有无数组吗?请读者研究这个问题.

参考文献

[1] 杜登尼 E H.200个趣味数学故事[M].黄嘉诰,译.长沙:湖南科学技术出版社,1984:112,239-241.

[2] 张文忠.整数中的明珠[M].重庆:西南师范大学出版社,1992:123.

"智猪博弈"、竞争及学校管理

有一个"智猪博弈"的经典案例：

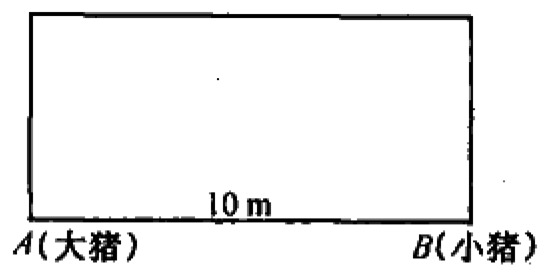


图 1

图 1 的猪圈角 A, B 有大、小两头猪，$AB = 10$ m. 大猪在 A 处踩踏板，B 处的投食口就会落下 5 kg 食物，小猪在 B 处踩踏板，A 处的投食口也会落下 5 kg 食物. 小猪从 B 跑向 A 及大猪从 A 跑向 B 的速度分别为 0.4 m/s, 0.5 m/s，大猪、小猪吃食的速度分别为 0.2 kg/s, 0.18 kg/s. 大猪踩一下踏板并迅速跑向 B 处，B 处会剩下 $5-\frac{10}{0.5}\times 0.18=1.4$ (kg) 食物(大猪跑去还能吃到一部分食物)；小猪踩一下踏板并迅速跑向 A 处，A 处会剩下 $5-\frac{10}{0.4}\times 0.2=0$ (kg) 食物，结果大猪会不知疲倦地奔忙于 A, B 之间，而小猪只会在食槽边等食(因为小猪踩踏板将一无所获，不踩踏板反而能吃上食物；而大猪踩踏板比不踩强).

下面把它改编成一些趣题.

改编方案 1(减量)：投食量减为原来的一半，即投食量变为 2.5 kg. 大猪踩一下踏板并迅速跑向 B 处，B 处会剩下 $2.5-\frac{10}{0.5}\times 0.18=-1.1$ (kg) 食物，即大猪还没跑到 B 处小猪就吃完了食物；小猪踩一下踏板并迅速跑向 A 处，A 处会剩下 $2.5-\frac{10}{0.4}\times 0.2=-2.5$ (kg) 食物，即小猪还没跑到 A 处大猪也吃完了食物. 谁先踩踏板都意味着为对方贡献食物. 结果可想而知：都不会踩踏板.

改编方案 2(增量)：投食量变为原来的 2 倍，即投食量变为 10 kg. 大猪踩一下踏板并迅速跑向 B 处，B 处会剩下 $10-\frac{10}{0.5}\times 0.18=6.4$ (kg) 食物；小猪踩一下踏板并迅速跑向 A 处，A 处会剩下 $10-\frac{10}{0.4}\times 0.2=5$ (kg) 食物，小猪、大猪谁想吃谁就会踩踏板，反正对方不会一次把食物吃完，且物质相对丰富，所以竞争意识不强.

改编方案 3(减量加移位)：投食量变为原来的一半即 2.5 kg, A, B 间的距离

变为 4 m. 大猪踩一下踏板并迅速跑向 B 处，B 处会剩下 $2.5-\frac{4}{0.5}\times 0.18=1.06$ (kg) 食物；小猪踩一下踏板并迅速跑向 A 处，A 处会剩下 $2.5-\frac{4}{0.4}\times 0.2=0.5$ (kg) 食物. 结果，小猪和大猪都拼命地抢着踩踏板，竞争意识非常强.

埃科卡曾经说过："经营管理实际上就是调动人的积极性."而调动人的积极性的最有效途径之一就是激励，学校管理也是如此，管理激励的方式包括思想工作，精神奖励，物质激励，让教职员工参与学校管理等多种形式，兑现奖惩，实施物质激励是进一步延伸和补充教师绩效考核的有效措施之一，奖励力度太大，教职员工个人都成了富翁，成本高不说，教师的积极性并不一定很高(何况学校也非企业，并没有丰厚的资金用于奖励)，这相当于增量方案，但如果奖励力度不大，而且见者有份(不劳动的小猪也有)，那么一度十分努力的大猪就不会有动力了，就像减量方案. 最好的办法是减量加移位方案，奖励并非人人有份，而是直接针对个人，既节约成本，又消除了"不劳而获"现象，从而实现有效激励.

那么，作为学校的领导者或是管理人员，是否应该时时提醒自己一下，我们所制定的各种制度是否简洁高效，在激励与制约之间找到了平衡点.

又一组"似非而是"的等式

文献[1]给出了这样的一些"似非而是"的恒等式:

(1) $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\dfrac{a+b}{a+(a-b)}$

(2) $\dfrac{\log_a\left(\dfrac{m+1}{m}\right)^m}{\log_a\left(\dfrac{m+1}{m}\right)^{m+1}}=\dfrac{\left(\dfrac{m+1}{m}\right)^m}{\left(\dfrac{m+1}{m}\right)^{m+1}}$

(3) $\dfrac{n+1}{n}\times(n+1)=\dfrac{n+1}{n}+(n+1)$

(4) $\sqrt[n]{a+\dfrac{a}{a^n-1}}=a\cdot\sqrt[n]{\dfrac{a}{a^n-1}}$

(5) $\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n}+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2$, $x^2+(1-x)=x+(1-x)^2$

本文再给出一组这样的等式——会游动的乘号等式.

(1) $1\times1\,111=1\,111\times1$　$2\times2\,222=2\,222\times2$　$3\times3\,333=3\,333\times3$

$4\times4\,444=4\,444\times4$　…　$9\times9\,999=9\,999\times9$

(2) $1\times3\,325=133\times25$　$1\times5\,134=151\times34$　$1\times8\,145=181\times45$

$2\times2\,724=227\times24$　$2\times4\,235=242\times35$　$2\times7\,756=277\times56$

$3\times2\,725=327\times25$　$3\times9\,975=399\times75$

$4\times3\,243=432\times43$　$4\times5\,448=454\times48$

$6\times8\,172=681\times72$

$7\times9\,875=798\times75$

$8\times3\,332=833\times32$　$8\times6\,486=864\times86$

$9\times8\,175=981\times75$

(3) $3\times99\,975=399\times75$　$3\times999\,975=3\,999\times75$　$3\times9\,999\,975=39\,999\times75$

…　$3\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}75=3\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times75\ (n\in\mathbf{N}^*)$

笔者尚不知晓这种等式的一般规律,请读者能深入研究,并发现出向 $3\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}75=3\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times75\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 这样的等式来.

参考文献

[1] 张文忠.中学数学中的趣题[M].西安:陕西科学技术出版社,1989:157-161.

又两组"金蝉脱壳"数组

文献[1]叙述了以下有趣现象:给定两组数 123 789,561 945,642 864 与 242 868,323 787,761 943,这两组数不仅和、平方和相等,而且同时去掉各数相同位置上的1个或2个甚至更多个数,所得到的两组数的和、平方和一直保持相等.

文献[2]说"这像金蝉脱壳一样,层层脱壳,金蝉却保持美丽本色不变".

阿尔伯特·H·贝勒著、谈祥柏译的通俗数学名著《数论妙趣——数学女王的盛情款待》(1998年上海教育出版社,世界著名数学家陈省身为该书题词"迎接2000数学年")(下简称《数论妙趣》)及专著[3]中都介绍了这一有趣现象.

定义 若$\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \sum_{i=1}^{n} y_i^k (k = 1,2)$,则称数组$(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$满足2度等幂和,记作$(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)_2$.

定理1 $(r,s,2r+2s-3t;t,2r+s-2t,r+2s-2t)_2$.

定理2 若有序数组

$$(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) = (r,s,2r+2s-3t;t,2r+s-2t,r+2s-2t)$$

$$(x'_1,x'_2,x'_3,y'_1,y'_2,y'_3) = (r',s',2r'+2s'-3t';t',2r'+s'-2t',r'+2s'-2t')$$

则 $(kx_1+lx'_1,kx_2+lx'_2,kx_3+lx'_3;ky_1+ly'_1,ky_2+ly'_2,ky_3+ly'_3)_2$

由定义可以验证定理1,2均成立.

在定理1中分别令$(r,s,t)=(1,5,-1),(2,6,-2),(3,1,1),(7,9,-1),(8,4,2),(9,5,1)$,得$(1,5,6;2,3,7)_2,(2,6,4;4,2,6)_2,(3,1,2;2,3,1)_2,(7,9,8;8,7,9)_2,(8,4,6;6,8,4)_2,(9,5,4;8,7,3)_2$.由它们并多次使用定理2,便可得文献[1]的有趣现象.

在定理1中分别令$(r,s,t)=(9,3,2),(8,2,3),(2,1,1),(8,4,1),(7,4,2),(5,4,2)$,得$(9,3,3;7,7,1)_2,(8,2,5;5,8,2)_2,(2,1,3;1,3,2)_2,(8,4,3;7,6,2)_2,(7,4,7;5,8,5)_2,(5,4,9;3,8,7)_2$.由它们并多次使用定理2,便可得文献[1]的有趣现象:给定两组数982 875,321 444,353 379 与 751 753,783 688,122 257,这两组数不仅和、平方和相等,而且同时去掉各数相同位置上的1个或2个甚至更多个数,所得到的两组数的和、平方和一直保持相等.

笔者最近阅读了文献[4],[5],由其中的一些数字等式,笔者又得到了两组

“金蝉脱壳”数组:给定两组数 13,35,57,79,92,24,46,68,81 与 18,86,64,42,29,97,75,53, 31,这两组数不仅和、平方和相等,而且同时去掉各数相同位置上的 1 个数,所得到的两组数的和、平方和也相等.主要应验证

$$13^2+35^2+57^2+79^2+92^2+24^2+46^2+68^2+81^2=$$
$$18^2+86^2+64^2+42^2+29^2+97^2+75^2+53^2=33\ 225$$

给定两组数 16,67,72,29,94,43,38,81 与 18,83,34,49,92,27,76,61,这两组数不仅和、平方和、立方和相等,而且同时去掉各数相同位置上的 1 个数,所得到的两组数的和、平方和也相等. 主要应验证

$$16^2+67^2+72^2+29^2+94^2+43^2+38^2+81^2=$$
$$18^2+83^2+34^2+49^2+92^2+27^2+76^2+61^2=29\ 460$$
$$16^3+67^3+72^3+29^3+94^3+43^3+38^3+81^3=$$
$$18^3+83^3+34^3+49^3+92^3+27^3+76^3+61^3=2\ 198\ 900$$

后者还与三阶幻方(图 1)有联系:所给定的两组数分别是幻方周围从 1 开始其逆时针、顺时针旋转得到的.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1

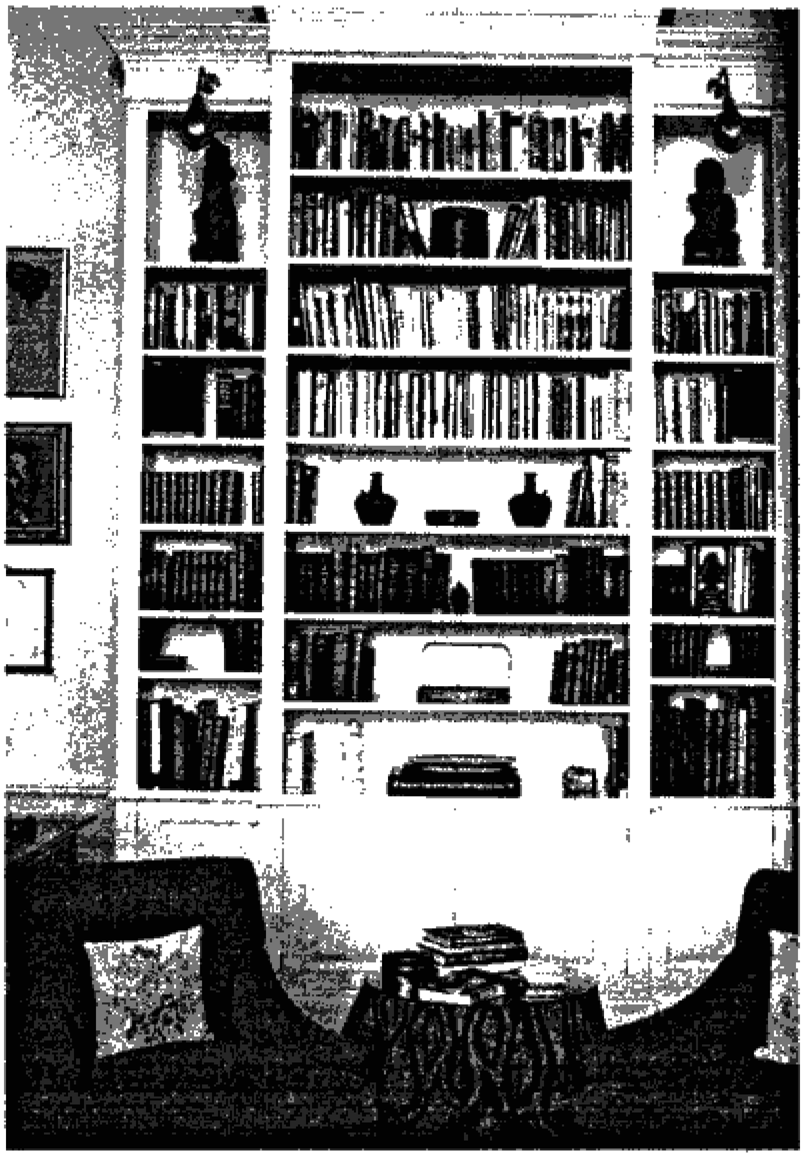
《数论妙趣》中还给出了一些多度等幂和的式子,以下各式在 $k=1,2,3,4,5$ 时均成立

$$1^k+4^k+5^k+5^k+6^k+9^k=2^k+3^k+3^k+7^k+7^k+8^k$$
$$0^k+5^k+6^k+16^k+17^k+22^k=1^k+2^k+10^k+12^k+20^k+21^k$$
$$1^k+11^k+13^k+33^k+35^k+45^k=3^k+5^k+21^k+25^k+41^k+43^k$$
$$1^k+16^k+19^k+49^k+52^k+67^k=4^k+7^k+31^k+37^k+61^k+64^k$$

参考文献

[1] 王世强.一组有趣的数字(转载)[J].数学通报,2007(1):64.
[2] 刘军.趣谈“金蝉脱壳数”的构造[J].中学数学月刊,1997(12):19-20.
[3] 甘志国.初等数学研究(I)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008:625-627.
[4] 张在明.三阶幻方的两个新性质[J].中国教育改革与研究,2003(4):17-18.
[5] 张在明.中学数学解题探索[M].昆明:晨光出版社,2006:307-311.

其 他



理化四文

1 由固体压强求密度一题

题 把一个长方体物块依次平放、侧放、立放在水平桌面上，物块对桌面的压强分别是 800 Pa，2 000 Pa，5 000 Pa，又已知物块的体积为 1 dm^3，求它的密度（g 取 10 N/kg）.

解 容易证明：把底面积为 S，高为 h，密度为 ρ 的长方体放在水平桌面上，则此长方体对桌面的压强是 $p = \rho gh$.

设本题中长方体物块的长、宽、高分别为 a，b，c，则 $abc = 10^{-3}\ m^3$.

当物体平放时，$p_1 = \rho gc = 800$ Pa；

当物体侧放时，$p_2 = \rho gb = 2\ 000$ Pa；

当物体立放时，$p_3 = \rho gc = 5\ 000$ Pa.

又因为 $g = 10$ N/kg，$abc = 10^{-3}m^3$，所以

$$\rho = \sqrt[3]{800 \times 2\ 000 \times 5\ 000}\text{kg/m}^3 = 2 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

答：此物块的密度为 2×10^3 kg/m^3.

本题是物理、数学知识的结合，物理方面用到了压强，数学方面用了一点技巧.

2 声现象的理解误区

下面列出对声现象理解上的错误认识，希望引起同学们注意.

2.1 只要有振动，就一定有声音

发声的物体都在振动，反过来，振动的物体不一定有声音.有无声音是由人的听觉决定的，人耳听得到的声音的频率范围为 20 ~ 20 000 Hz，在此范围之外的声波——超声波和次声波，人耳则感觉不到.此外，声音传播需要介质，如果物体在真空中振动，则不会产生声音的.

2.2 声源停止振动时声音消失

这个认识似乎有理，比如，用手按住锣面，声音也没有了，实际是人离锣面较近的缘故.其实，课本中对此的表述极其严密：振动停止，发声也停止，即振动停止后，停止发出声波，而已传送出去的声波仍会在介质中传播.回声就是这种

例子:对着高山喊一声,闭口后,经过一段时间还能听见被高山反射回来的声音.

2.3 回声方向和声源方向相反

其实,回声是声音的反射现象,它和光一样,有着相同的反射规律.课本中阅读材料"圜丘声音反射示意图"就清楚地说明了声音的反射规律.

2.4 声音的响度大时音调高,音调高时响度也大

音调、响声是声音的两个不同特征,音调指声音高低,由频率决定;响度指声音大小,由振幅和距发声体远近决定.牛叫声和蚊子嗡嗡声比较,牛叫声响度大,音调低,而蚊子嗡嗡声音调高,响度小.

3 眼镜的度数如何定义?

大家知道近视镜或远视镜(花镜)都有一定的度数,而且近视或远视越严重,眼镜度数就越高.那么,你知道眼镜度数是怎么回事吗?

1872年,法国人F·莫罗耶倡议镜片焦距以米计数,焦距1 m的镜片为1屈光度(D),镜片焦距的倒数即该镜片的屈光度,近视用负号(-),远视用正号(+).

此后世界各国都以此法确定眼镜度数.中国亦采用此法,并习惯将0.01D定为1度.

现在,我们就知道眼镜度数和镜片焦距之间的关系了,$A=\frac{100}{f}$,其中焦距f的单位是m,凸透镜的焦距为正值,凹透镜的焦距为负值;度数A的单位是m^{-1},也称为度.

下面,我们就来分析一个问题:

小宇眼睛近视,戴了一副300度的眼镜,一次他做了一个小实验,用奶奶的眼镜在距离火柴头25 cm处将火柴点燃.那么小宇的镜片是何种透镜,焦距是多少?奶奶的镜片又是何种透镜,度数有多大呢?

显然,小宇的眼睛近视,镜片是凹透镜,焦距

$$f=\frac{100}{A}=\frac{100}{-300}\text{m}=-\frac{1}{3}\text{m}\approx-33.3\ \text{cm}$$

奶奶的眼睛远视,镜片是凸透镜,焦距是25 cm,即0.25 m,所以度数

$$A=\frac{100}{f}=\frac{100}{0.25\ \text{m}}=400\ \text{m}^{-1}=400\text{度}$$

4 溶质与水的沸点

我们知道,在一个标准大气压下水的沸点是100 ℃.但是当水中溶解了其

他物质时,水的沸点就不是 100 ℃ 了.

对于水而言,如果每千克水中溶解 2 盎司(即 58.44 g) 盐,沸点就会提高到 101.026 ℃.对于冰的熔点也存在同样的问题,如果每千克冰含有 2 盎司的盐,熔点会降低 3.72 ℃.

所以在需要的时候,可以通过改变水(冰) 所含溶质的量,达到改变水的沸点(冰的熔点) 的目的.在冬天,腌菜的坛子里的酸水在 0 ℃ 以下也不会结冰;建筑工地上,为了防止水的结冰而影响水泥的凝固,可以在水里加盐,都是这个道理.

怎样撰写初等数学论文

数学论文是对数学研究成果的论述. 凡是运用概念、判断、推理、证明或反驳等逻辑思维手段来分析、表达数学理论和应用研究中的新问题、新成果的文章,均属数学论文的范畴. 数学论文是科研成果的推广和学术交流的重要手段,也是考核数学工作者水平的重要标准之一. 初等数学论文可以理解为与中小学数学教材上数学知识有关的论文.[1]

下面结合自己写作数学论文的体会,提出如何撰写初等数学论文方面的一些不成熟的看法,供同行参考并期待批评指正.

1 重在研究

数学论文绝不是文字、符号的简单拼凑、组合,必须阐述的是新成果、新观点,因而应言之有物,论证严格,有条理,逻辑性强. 写数学论文的关键是研究深入,"七分研究三分写" 就是这个道理. 真正有价值的论文,其基础必须是一个好的研究成果,没有坚实的科学研究成果,绝不可能写出好的论文,以下谨提出七方面的研究(下面的分类并不规范准确,只是提出了一些研究方向).

1.1 教材研究

教材方面的研究包括对教材内容及其教学方法的研究. 写初等数学论文的作者大多是工作在第一线的中小学数学教师,他们对教材上的概念、定理、解题及其教学方法都有些研究. 但是,对于应用范围最广泛的文献资料 —— 中小学教材,我们在研读它们时,仍可用批判的眼光去审视,比如初三《几何 · 第三册》教材(1994 年人民教育出版社),第 87 页的.

"定理 在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦相等,所对的弦的弦心距相等.

……

推论 在同圆或等圆中,如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等,那么它们所对应的其余各组量都分别相等." 推论有误(显然对应法则应理解为"所对的"). 它包含四个结论,但以下两个结论均不正确:

(1) 在同圆或等圆中,相等的弦所对的圆心角相等,所对的弧相等,它们的

弦心距相等.

(2) 在同圆或等圆中，如果两条弦的弦心距相等，那么这两条弦及其所对的圆心角、弧均相等.

因为在圆中，一条弦所对的弧有两段，所以上述结论(1)，(2) 中均得不到"弧相等".若把推论及结论(1)，(2) 中的"弧" 均改为"优弧、劣弧或半圆"，就没有错误的.

与初三《几何》教材配套使用的《数学课外作业 · 全一册》(湖北教育出版社，2001 年 6 月第 7 次印刷) 第 147 页"本章学习应注意的问题" 中写到：

"许多圆的基本性质，必须冠以'在同圆或等圆中' 这个前提. 例如'在同圆或等圆中，等弦所对的圆周角相等'，…… 但'等弧所对的圆周角相等' 则不必冠以'在同圆或等圆中'，……"

上述结论"在同圆或等圆中，等弦所对的圆周角相等" 不正确，因为"圆的一条弦所对的弧有两段".

运用"边边角" 不能判定两个三角形全等，但以下结论正确：若两个三角形有两边及其一边的对角对应相等，且另一边的对角之和不为平角，则这两个三角形全等(运用正弦定理可证).

学生对两圆位置关系的判断条件往往感到很复杂，运用图 1 可以很好地解决这个问题.



图 1

笔者的这篇文章发表于山西《学习报(初三版)》第 275 期(1997 年 11 月 25 日).

高中数学教材中讲述了二项展开式$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{n-i}y^i$的各项系数$C_n^0$，$C_n^1,\cdots,C_n^n$ 的大小规律具有单峰性. 笔者将此结论加以推广写成论文《$(ax+by)^n$ 的展开式系数绝对值的单峰性》，发表于《中学数学月刊》1998 年第 11 期.

1.2 竞赛研究

数学竞赛活动对培养、发现和选拔数学人才起着重要作用，数学竞赛早已受到广大数学爱好者的关注.

数学竞赛研究包括对赛题的解法、赛题结论的推广和赛题的编制等. 笔者曾发现有不少数学竞赛题是关于钟表上时针、分针夹角的问题(爱因斯坦曾在病床上研究过"时针、分针何时可以对调" 的问题)，我就对此问题作了一般性的研究，写成论文《钟表上时针、分针、秒针所夹的角度》发表于《数学通讯》2000

年第 7 期.

1.3　解题研究

学习数学知识、研究数学问题都离不开解数学题,一题多解,多题一解,数学题型的归类,寻找解题技巧,数学题结论的推广,数学命题的发现及编制都是数学解题研究的范畴.

笔者发表于《中学数学月刊》1998 年第 7 ~ 8 期的《两道例题的简解》就简化了两道数学题的解法(其中一道还是第四届 IMO 试题).

1.4　学术研究

学术研究指对数学中某一个专题作深入细致的研究,这种论文价值较大,但研究难度也很大,并且难出成果,所得结论必须是前人未曾得到的深刻结论.比如寻找“费马(Fermat,1601—1665)大定理的证明”就属于这种研究,数学家们经过了三百多年的努力才获证明.

笔者在 2000 年以前对整数性质研究较多,得到了关于整数性质及不定方程解法方面的一些结论,比如发表于湖北《武当学刊》1997 年第 2 期的《二次不定方程有理解的结构与整数解》(该文长 2 万字),《高等函授学报》1997 年第 4 期的《缩小变换黑洞》,《数学通讯》2001 年第 15 期的《浅探伪素数》. 杨之先生在 1993 年出版的专著《初等数学研究的问题与课题》(湖南教育出版社)第 192 页提出了“连贯多项式问题”,笔者的四篇论文《有理数集上不存在四连贯的二次多项式》(载于《数学通讯》1995 年第 12 期),《关于 n 连贯多项式的几个结论》(载于《中学数学》1998 年第 11 期),《一些连贯、三连贯的二次多项式》(载于《中学数学教学参考》2000 年第 4 期),《整数集上四连贯 n 次多项式的构造》(载于《中学数学》2001 年第 2 期)都属于这方面的研究.在 2000 年以后,我对不等式作过一些研究,比如发表在《数学通讯》2000 年第 23 期的《四种 Fermat 点及其作法》.

1.5　文献研究

多读期刊、书籍、报纸上别人发表的论文,对论文中的结论加以改进、加强、推广,包括找出错误,解决文中提出的问题、猜想,就属于文献研究,笔者发表了这方面的较多论文,列出部分篇目如下:《任意自然数的全部平方差分拆及其组数》(载于《数学通讯》1996 年第 11 期),《自然数的互素平方差分拆》(载于《中学数学月刊》1997 年第 11 期),《已知内切圆半径的(基本)勾股形的个数》,《例谈“定比分点坐标公式引出的结论”的运用》,《一道例题结论的推广》,《参赛应用题题 34 的完整解答》(分别载于《数学通讯》1997 年第 2 期,2000 年第 19,21 期,2001 年第 23 期),《“长三针”问题的简洁解法》(载于《中学数学月刊》2001 年第 3

期),《关于角格点一些猜想的证明》(载于《中学数学》2001 年第 6 期).

文献[2] 末提出了两个猜想:

猜想 1 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,证明或否定

$$\sqrt{\frac{a}{3+b}}+\sqrt{\frac{b}{3+a}}\leqslant 1 \quad ①$$

$$\sqrt{\frac{a}{1+3b}}+\sqrt{\frac{b}{1+3a}}\geqslant 1 \quad ②$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{1+7b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{1+7a}}\geqslant 1 \quad ③$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{7+b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{7+a}}\leqslant 1 \quad ④$$

猜想 2 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,$xyz=1$,证明或否定

$$\frac{1}{\sqrt{1+3x}}+\frac{1}{\sqrt{1+3y}}+\frac{1}{\sqrt{1+3z}}\geqslant\frac{3}{2} \quad ⑤$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+7x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+7y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+7z}}\geqslant\frac{3}{2} \quad ⑤$$

很容易否定这六个不等式:容易理解不等式 ① ~ ④ 中左边的代数式均可 $\to+\infty$(当 $\frac{a}{b}\to+\infty$ 或 $\frac{b}{a}\to+\infty$ 时),也均可 $\to 0$(当 $a\to 0$ 且 $b\to 0$ 时),因而不等式 ① ~ ④ 均不成立.还可举出具体的反例.

① 的反例:$a=\frac{5}{4}$,$b=2$.

② 的反例:$a=\frac{5}{8}$,$b=\frac{1}{2}$.

③ 的反例:$a=\frac{9}{16}$,$b=\frac{1}{2}$.

④ 的反例:$a=\frac{9}{8}$,$b=2$.

不等式 ⑤,⑥ 中左边的代数式均可 $\to$ ①(当 $x\to+\infty$,$y\to+\infty$ 时,$z=\frac{1}{xy}\to 0$),所以不等式 ⑤,⑥ 均不成立,很容易列举具体的反例.

⑤ 的反例:$x=y=8$,$z=\frac{1}{64}$.

⑥ 的反例:$x=y=8$,$z=\frac{1}{81}$.

不等式 ⑤,⑥ 中左边的代数式均可 $\to 2$(当 $x\to 0$,$y\to 0$ 时,$z=\frac{1}{xy}\to+\infty$),因而,笔者对不等式 ⑤,⑥ 重新提出:

猜想 若 $x,y,z>0$,$xyz=1$,则

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+3x}}+\frac{1}{\sqrt{1+3y}}+\frac{1}{\sqrt{1+3z}} \leqslant 2$$

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{1+7x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+7y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+7z}} \leqslant 2$$

对文献的研究,应尽可能深入、彻底,务必准确无误,绝不可别人没有错误,却说其有错,也不能仅仅只限于指出别人的错误,应尽可能的找到解决错误的办法,并把错误的结论修改为正确的结论.从论文《任意自然数的全部平方差分拆及其组数》题目中"任意"、"全部"、"及其"三个词来看,该文研究的比较全面、深入.也不能抓住别人的一点错误紧紧不放,能发表出来的文章总是有价值的,指出他人的错误语气要谦逊.陈景润在指出华罗庚先生《堆垒素数论》中的"它利"问题错误时说:"明星上的微尘我愿帮你拭去."

1.6 课外活动研究

数学课外活动是数学课堂的延续和补充,也是学生学习数学知识及数学教师传授数学知识的重要形式.数学课外活动开展得好,可以提高学生对数学的学习兴趣,让他们积极主动的钻研数学,使教师教得轻松、学生学得容易.

例 1 洗衣服问题.[3]

在洗衣服时,衣服上已打好了肥皂,揉搓得很充分了,再拧一拧,当然不能把水拧干,设衣服上还残留含有污物的水 1 千克,用 20 千克清水来漂洗,怎样才能漂洗得更干净?

方案 1 如果把衣服一下子放到这 20 千克清水中,那么连同衣服上那 1 千克水,一共 21 千克水,设污物均匀分布在这 21 千克水中,拧"干"后,衣服上还有 1 千克水,所以污物残存量是原来的$\frac{1}{21}$.

方案 2 通常我们会把 20 千克水分两次用.比如,第一次用 5 千克水,可使污物减少到$\frac{1}{6}$;再用 15 千克水,污物又减少到$\frac{1}{6}$的$\frac{1}{16}$,即$\frac{1}{96}$.分两次漂洗,效果好多了!

方案 3 同样分两次漂洗,也可以每次用 10 千克水,每次都使污物减少到原有量的$\frac{1}{11}$,两次漂洗后,污物减少到原来的$\frac{1}{121}$.

高中生即可运用所学的数列、数列的极限知识,对上述问题作一般研究.

例 2 由提示语猜价问题.

中国中央电视台第 2 套节目"幸运 52"栏目中,有一个猜商品价格的游戏,规则如下:给出一种商品让参赛者猜其价格,参赛者由主持人的提示语"高了"、"低了"一直猜下去,直到猜中为止.比如某商品的价格是 58 元,参赛者可用以

下猜法 5 次猜中:$40 \xrightarrow{\text{低了}} 50 \xrightarrow{\text{低了}} 60 \xrightarrow{\text{高了}} 55 \xrightarrow{\text{低了}} 58$.

一般的,参赛者可先估计出某商品的价格是区间$[a,b]$内的某个正整数x(单位:元;$a,b \in \mathbf{N}^*$),参赛者由主持人的提示语“高了”、“低了”怎样猜,才能尽快猜出x?

笔者得到的结论是:参赛者由主持人的提示语“高了”、“低了”猜$[a,b]$内的任一固定整数价格至多需$[\log_2(b-a)]+1$次(这里“1”表示取整),这种猜法是(以下$n=[\log_2(b-a)]+1$):$a-1+2^{n-1}\pm 2^{n-2}\pm 2^{n-3}\pm\cdots\pm 2^{n}$.

第 1 次猜 $a-1+2^{n-1}$;

若“高了”第 2 次就猜 $a-1+2^{n-1}-2^{n-2}$,若“低了”第 2 次就猜 $a-1+2^{n-1}+2^{n-2}$;

第 $k(k=2,3,\cdots,n)$ 次猜的数为第 $(k-1)$ 次猜的数加上或减去 2^{n-k}(“加”、“减”由提示语“低了”、“高了”确定).

例 3　速算星期几.[4]

读者朋友,你是否注意到“2001年1月1日星期一”这一页特殊的日历,又因为 2001 年是平年为 365 天,365 被 7 除余数为 1,所以 2002 年 1 月 1 日星期二.进而由 2002 年各月的天数知 2002 年各月 1 日依次是星期二、五、五、一、三、六、一、四、日、二、五、日.从而可得以下速算星期几的方法.

读者朋友,只要你记住以下数字:1 440,2 503,6 146,你就可以迅速算出 2002 年中任何一天是星期几.

例如,2002 年 6 月 10 日是星期几?只需用上述数字中的第 6 个数字“5”加上日数“10”,得 15,再用 $15\div 7$,得余数为 1,所以 2002 年 6 月 10 日是星期一(余数为 0 时表示星期天).

笔者曾在论文《公元纪年中三个计算问题的解决》中解决了以下三个问题:

(1) 公元 a 年 b 月 c 日是星期几?

(2) 从公元 a 年 b 月 c 日到公元 a' 年 b' 月 c' 日经过了多少天?

(3) 从公元 a 年 b 月 c 日经过 T(T 是整数)天后是哪一天?

笔者发表于《中学数学教学参考》2001 年 1,2 期合刊的论文《“分班数阵”的通项》及《数学通讯》1997 年第 9 期的《谈多边形的剪拼》也属于数学课外活动的研究.

在日常生活中,只要多留心,多思考,皆是数学研究的对象,数学论文的素材,数学知识的运用.总之,生活处处皆数学.华罗庚先生也曾说过:宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学.

1.7 跨学科研究

各学科之间的联系越来越紧密(各种边缘学科不断产生),数学、物理、化学、地理之间更是密不可分.

例4 如图2,屋檐的倾斜角 α 是多少时,雨水在屋顶停留的时间最短?

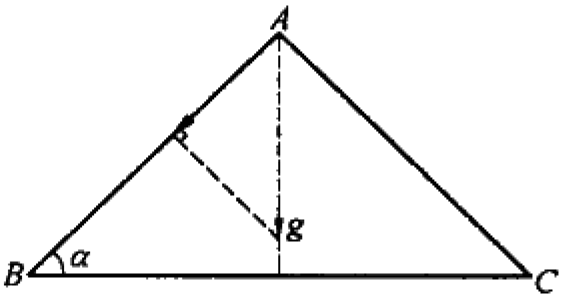


图2

解 由图2的分析可得,雨水在屋顶流下的加速度为 $g\sin\alpha$,所以 $AB=\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2$,又 $AB=\frac{\frac{1}{2}BC}{\cos\alpha}$,从而得 $t^2=\frac{2BC}{g\sin 2\alpha}$.

因为 BC 及 g 均为常量,所以,当且仅当锐角 $\alpha=45°$ 时雨水在屋顶停留的时间最短.

以上例4选自笔者的论文《用数学眼光看世界》(载于《数学通讯》2001年第8期).

根据爱因斯坦的相对论,在高速运动的物体上,将发生明显的"尺缩"、"钟慢"效应.当地球上过去1秒时,高速运动的宇宙飞船上只过去了$\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$秒,其中光速 $c=30$ 万千米/秒,v 是飞船航行的速度.[5] 由此可以计算出"人间一年,天上一天";当 $v=c\sqrt{1-\frac{1}{365^2}}\approx 0.999\,996\,25\,c$ 时,地球上过去了365天,而宇宙飞船上只过去了一天.

2 精于撰写

撰写论文,即将研究成果用文字、符号表述出来,同一个研究成果用不同的方式表达出来,所产生的效果也不相同,有的使人印象深刻,有的则使人不得要领,好的成果要写成一篇好论文,还要下一番工夫.

2.1 确定文题

文题即文章题目,要求用最简洁恰当的词句反映文章的特定内容,并且使之具有画龙点睛,启迪读者兴趣的功能.因此文题的用词十分重要,它直接关系到读者对文章的取舍态度,务必字字斟酌使之好读好记.[6]"秧好一半谷","题好一半文"就是这个意思,有的文题就是全文要证明的一条定理,比如《有理数集上不存在四连贯的二次多项式》;文题也可以是反映文章的核心内容,比如《二次不定方程有理解的结构与整数解》,《$\{R(n^m)\}$ 的周期性》(载于《数学通

讯》1994年第2期)；文题也可以生动活泼些，比如《用数学眼光看世界》，西藏刘保乾先生发表在《不等式研究通讯》1999年第4期的论文《待采撷的苹果——若干个三角形不等式问题》的文题就很吸引人．为了引用的方便，文题一般不要超过20个字符，并尽量少用标点符号，有时也可加上副标题来补充说明，还应注意文题的范围要大小适中，难度不要太大．

2.2　编拟提纲

正式撰写论文之前，必须列好写作提纲，以便确定先写什么，后写什么，以免杂乱无章，条理性差，数学论文一般由三部分组成，即引言、主要成果及进一步研究的问题．

引言即文题的引入，应简洁自然，可以由生活中的问题或文献中的问题引入本文要研究的问题．

叙述主要成果时应层次分明，可以先列出要证明的结论，再给出证明过程(包括正式证明之前的引理)；也可逐一推证出最终的结论．该部分是文章的主体，所占篇幅也较大．

文章末尾还可列出应进一步研究的问题，包括猜想等，此部分如果没有实质性的东西，就不必勉强写出．编拟提纲时还应注意以下几个问题：

(1) 要考虑论文发表的期刊(杂志)的发行范围及读者对象．

(2) 明确主题，包括问题的提出和课题的意义．

(3) 若是在他人研究成果的基础上作理论上的延伸和发展，要处理好自己所取得的成果与他人成果的关系．

(4) 论文的内容、格式及表现手法要能充分地表达写作目的．

(5) 用词要恰当，不要对自己所得的成果言过其实．

2.3　撰写论文

按照列好的写作提纲，把研究的成果用文字、符号逐段表述出来，就写成了一篇数学论文．撰写数学论文时，应注意以下四点：[6]

(1) 言之有物，内容充实．撰写数学论文的目的是交流、传播科学研究的成果，这就决定了论文的内容必须真实，不能有“水分”，也无须华丽的辞藻，更不要堆砌一大堆形容词，切忌空泛，越具体越清楚越好，有的文章简直就是一句话、一个字都不能省，精练到了极点，篇幅小但信息量大，这样的文章自然会受到读者喜爱．

(2) 条理清晰，逻辑性强．一个数学成果的内容本身是有其内在逻辑的，比如原因和结果的地位是不能颠倒的．撰写论文时必须把这些因果关系、前提条件等清晰地列出，使人一目了然，用逻辑的严密性达到很强的说服力．切不可杂乱无章，更不能在逻辑关系上犯科学性错误．

(3) 重点突出,取舍合理.所谓重点突出,取舍合理包含两层意思:一是论文的每一部分内容所占篇幅应比例合适;二是论文的每一部分内容本身也应重点突出,取舍合理,紧紧抓住主题 —— 主要问题,使得一篇论文像一棵树干粗壮的大树,而不像一片枝叶很多,树干很小的灌木丛.

(4) 文字通顺,用语规范.一是语言文字表达要符合汉语规范,标点符号要准确,段落化分合理,小标题要准确简明;二是科学用语要规范,名词术语符号准确,意义清楚,符合科学界用法习惯,特别不可任意生造词语或乱简化名词,例如把"解析几何"、"平面几何" 简化成"解几"、"平几",就混淆了口头语言与书面用语的差别,是不规范的写法.

2.4 注意格式

撰写文稿时要尽量做到执行国家统一的标准,所用物理量与单位符号应采用《中华人民共和国法定计量单位》的规定,选用规范的单位和书写符号.比如"∵","∴" 是早已宣布废除的符号,应改为汉字"因为"、"所以",为了简明,有时可使用图表说明,但绘图必须准确无误,比例适宜.

文中的标题号一律用阿拉伯数字,并顶格写,第一级用"1,2,…";第二级用"1.1,1.2,…;2.1,2.2,…";第三级用"1.1.1,1.1.2,…";….重要式子须居中,可对其编号.

文末还应附上参考文献,按照论文引用的先后顺序依次列出,文献的类型有专著、期刊、报纸、论文集、翻译作品等.

2.5 反复修改

"文章怕读,字怕上墙".文章写好后,不妨再多看多算(推证) 几遍,再加斟酌,再行修改(包括标点符号及语句通顺,用词恰当)[7].文章务必简明,可有可无的字、句一律删去,还要尽可能加大信息量,凡能用符号、式子表达的就不用汉语句子表示,凡不常用的名词、术语、记号一定要给出定义或准确的说明.中国唐朝诗人贾岛修改诗句时"两句三年得,一吟双泪流",值得我们学习,修改文章,绝不是简单地看几遍,花的力气应不小于成文之前的研究和撰写,也不能做掩耳盗铃、蒙混过关的事.

3 淡化发表

写出的每一篇文章都凝聚着作者潜心钻研,精心撰写,细致誊稿等心血,总希望自己的文章能尽早发表.事实上,每位初等数学爱好者都经受过这方面的挫折,号称"数学王子" 的高斯(Gauss,1777—1855) 在 22 岁时写成的专著《算术研究》第一次出版时就遭到拒绝,直到 1801 年才被另一家出版社出版.实际上这本书远远走在时代的前列,它很快成为一大批数学家的研究起点[1].撰写论

文必须持这样的观点:多研究、深研究,精心写文,不能过多的在意是否发表,如果发表了对作者是巨大的鼓励,若没发表也不能泄气,应从自身角度找出原因,并努力改进,如果整天只等着发表文章,会影响研究的,也绝不会有很多好的成果问世.投稿时,应自留底稿,一方面可使自己的成果没有丢失,还可作为以后研究的基础,其中的结论、方法也可自己运用;另一方面还可避免自己的重复劳动,自己没发表的文章也可自成体系(其中价值大的还可等待时机出版专著——我想专著就是这样写成的吧),还应尽可能的不麻烦编辑退稿,因为他们人手少,很忙,千万不可一稿多投,若造成同一篇论文在两家刊物上都发表了的局面,对刊物及作者本人都是不好的事;更不能抄袭别人的东西冠以自己的名字来发表,包括东拼西凑也是不允许的,引用别人的成果一定要在文末列出这些参考文献,并且文章的主要成果应是自己的,法国数学家费马生前很少发表文章,后人才整理出版了他的论文集《数学杂文集》,他在数学的很多领域都有自己的建树,后人对他评价极高.并且他的人品很好,他说他证明了的结论都是真实的(费马大定理可能是个例外)[1] 许宝騄是我国著名的统计学家,美国斯坦福大学统计系的走廊里悬挂着他的画像,他的论文经过反复锤炼,才肯发表,价值很高,他常说:“我不希望自己的文章登在有名的杂志上因而出了名,我希望一本杂志因为刊登了我的文章而出名”.

论文写好后,应延期发表,先放几天,然后再用批判的眼光读几遍,挑其毛病,进行修改、润色.反复几次后,必可增色不少.千万不可一味自我欣赏,说自己得到了重要结论,这是一篇力作,那是一篇大作、代表作.

另外,你决定向哪家杂志投稿,就应该熟悉这家杂志的栏目、要求,比如天津师范大学《中等数学》以数学竞赛为主要内容,华中师范大学《数学通讯》只接受高中的数学内容.笔者在 1994 年曾把一篇论文投给武汉大学《数学杂志》编辑部,该编辑部回信说:“本刊不能接受初等数学方面的论文,建议转投《数学通讯》或《数学通报》.”笔者改投后,果真发表于《数学通讯》1995年第7期,这篇论文就是《余数另外的意义》.

初等数学研究爱好者们:应当放下包袱,开动机器,勤于思考,有所发现,不断提高,只要你多投入,多付出,毕生努力,矢志不移,你一定会有更多、更好的初等数学研究成果问世!

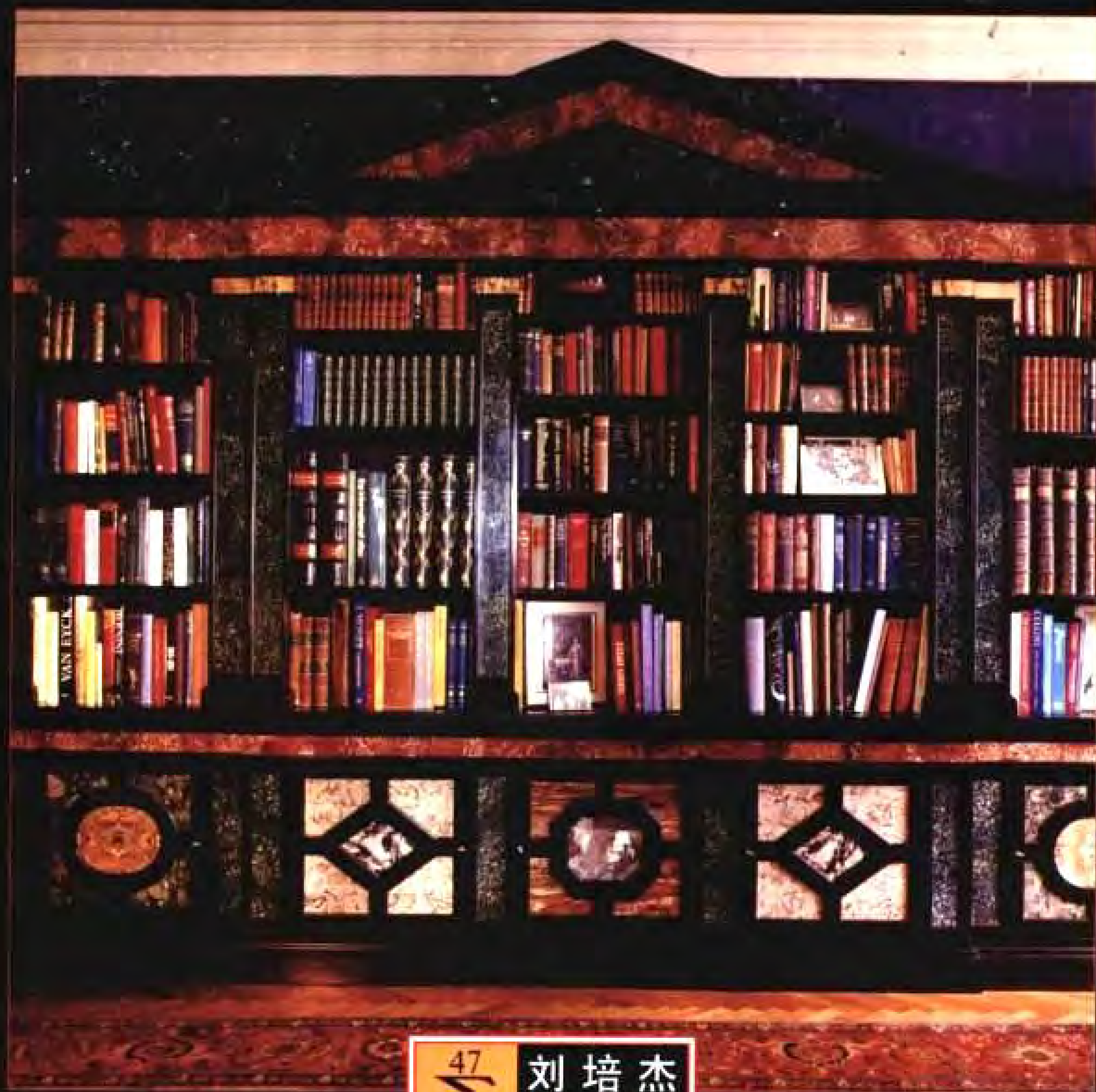
参考文献

[1] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992.

[2] 千海军,安振平.由一道竞赛题引发的思考[J].中学数学教学参考,2001(2).37-38.

[3] 余继光.三个数学应用问题的案例分析[J].数学通讯,2000(9):7-8.

[4] 李永.巧算星期几[J].数学通讯,2001(23):45.
[5] 夏昌华.由科幻小说引出的数学问题[J].中学生数学(高中版),2001(8):17.
[6] 毛经中.浅谈理科毕业论文的写作[M]//李旭初.毕业论文写作指导.武汉:华中师范大学出版社,1993:15-30.
[7] 朱运才.撰写数学论文之我见[J].数学通讯,2001(15):30-31.



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn

ISBN 978-7-5603-2820-1